

(52)

$T_{p(0,0,0)}$

$$\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(b + \lambda) \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ r & -1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(b + \lambda) [(r + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma r]$$

(2) $\lambda = -b$, $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(r+1) \pm \sqrt{(r+1)^2 - 4\sigma(r+1)} \right)$

$\Sigma_{\text{up}}: \forall a \ r < 1 \quad \lambda_{\pm} < 0 \quad \lambda < 0$

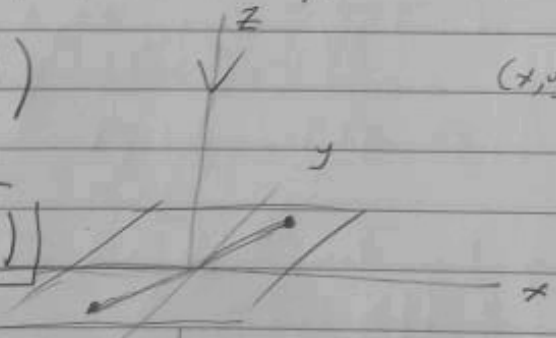
Zufriedenes - Approximates

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) \xrightarrow{S} (-x, -y, z)$$

$S =$ anaylisis from z-axis

$\Leftrightarrow X' = F(X)$



$$F(S(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \sigma(-y+x) \\ r(-x)+y+xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = S(F(x,y,z))$$

Example from

$$(SX)' = SX' = S F(X) = F(SX)$$

Apa an $(x(t), y(t), z(t)) \downarrow \text{on} \Rightarrow (-x(t), -y(t), z(t)) \downarrow \text{on}$

0 z - αξιωματικά είναι ασφαιρικός διότι

$$\text{αν } x=y=0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x'=y'=0 \quad \text{και } z'=-bz$$

Πρόταση 1 ($r < 1$)

Εστω $r < 1$ ($\Rightarrow (0,0,0)$ φωδίσκο σφαιρο ισορροπίας)

Τότε είναι οι δυναμικές συστήματα προς $t \rightarrow \infty$ στο $(0,0,0)$

Απόδειξη

$$V(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

$$\dot{V}(x,y,z) = \nabla V \cdot F$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2\sigma y \\ 2\sigma z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ r x - y - x z \\ x y - b z \end{pmatrix}$$

$$= -2\sigma(x^2 + y^2 - (1+r)xy) - 2\sigma b z^2$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - (1+r)xy \\ -\frac{1+r}{2} & 1 \\ -\frac{1+r}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_B$

$$\text{tr} B = 2 > 0, \quad \det B = 1 - \frac{1}{4}(1+r)^2 > 0$$

$\therefore \langle BX, X \rangle$ θετικά ορισμένο T.f.

$$\Rightarrow \dot{V} < 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \neq (0,0,0)$$

ληπτων $\Rightarrow (0,0,0)$ είναι ασφαιρικός εστιακός

□

Τι συμβαίνει καθώς το r περνάει μέσω του 1;

Γραμμικοποιείται στο $(0,0,0)$ για $r > 1$

$$\lambda_+ > 0, \quad \lambda_- = -b < 0, \quad \lambda_0 < 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ d ασταθής ιδιοχώρος,} \\ 2 \text{ d ευσταθής ιδιοχώρος.} \end{array} \right.$ (βαρφα)

Πρόταση 2 (r > 1)

Τα Σ.Ι. Q_{\pm} είναι ευσταθής κόμβοι για

$$(3) \quad 1 < r < r^* = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$$

Απόδειξη

$$\left. \begin{array}{l} \partial(x', y', z') \\ \partial(x, y, z) \end{array} \right|_{(x,y,z)=Q_{\pm}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$\lambda^3 - (\text{tr} A) \lambda^2 + \frac{1}{2} (\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)) \lambda + \det A = 0$$

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma) \lambda^2 + b(\sigma+r) \lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

Για $r=1$ έχουμε

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma) \lambda^2 + b(\sigma+1) \lambda = 0$$

$$\lambda = 0, \lambda = -b, \lambda = -\sigma - 1$$

Σταρπτες: -p_{ij}es

$$-\sigma - 1 < -\sigma + 1 < -b < 0 \quad (\sigma > b + 1)$$

Επισης $f_r(\lambda) > 0$ για $\lambda \geq 0, r > 1$

\Rightarrow για r κοντα στο 1, $r > 1$, και οι τρεις ρυες

αρνητικες.

Ερωτημα: (?) μικροτερα τιμη του $r (> 1)$ ετσι ωστε το $f_r(\lambda)$ εχει ριζα ηε μηδενικο πραγματικο ηρος ($\lambda = 0$ δεν ειναι οποτε αναγκαστικο) $\lambda = \pm \omega i$

$$f_r(i\omega) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(i\omega)^3 + (1+b+\sigma)(i\omega)^2 + b(\sigma+r)(i\omega) + 2b\sigma(r-1) = 0$$

$$-\omega^3 i - (1+b+\sigma)\omega^2 + b(\sigma+r)i\omega + 2b\sigma(r-1) = 0$$

$$-\omega^3 + b(\sigma+r)\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = b(\sigma+r)$$

$$(1+b+\sigma)\omega^2 = 2b\sigma(r-1)$$

$$(1+b+\sigma) / b(\sigma+r) = 2 / \sigma(r-1)$$

\Rightarrow (3).

□

Πρόταση 3

$\exists \gamma^*$ τ.ω. όλες οι λύσεις των (1)
 Τελικά εξέρχονται και παραμένουν στο \mathbb{R}^3 υποεπίπεδο

$$V(x, y, z) = \gamma^*$$

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + b(z - 2r)^2$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \nabla V \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2rx \\ 2\sigma y \\ 2b(z-2r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = -2\sigma [rx^2 + y^2 + b(z-2r)^2] \\ &= -2r (rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 - br^2) \end{aligned}$$

Η εξίσωση

$$(4) \quad rx^2 + \sigma y^2 + b(z-2r)^2 = \gamma^* \quad , \quad \gamma^* > 0$$

ορίζει ένα ελλειψοειδές: E_γ



Δείξτε ότι $\exists \nu^* > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5) \quad \dot{V} = \nabla V \cdot F < 0 \quad \text{στο } \partial E_\nu$$

για $\nu > \nu^*$ (Άσκηση 11)

$$\Leftrightarrow N \cdot F < 0, \quad N \perp \partial E_\nu$$

Επιπλέον ότι ποια των αλυσίδων Lorenz (1)

δεν μπορεί να εξέλθει από το E_ν .

Καυόντας κατασκευή χώρου του θεωρήματος

των LaSalle δείξτε ότι το ω -οριακό

σύνολο κάθε μιας των (1) είναι εντός

των E_ν^* . (Άσκηση 12. (με εις αόριστον

απαγωγή)).

□

Εστω D ένα χωρίο στο \mathbb{R}^3 με οφάγο ∂D

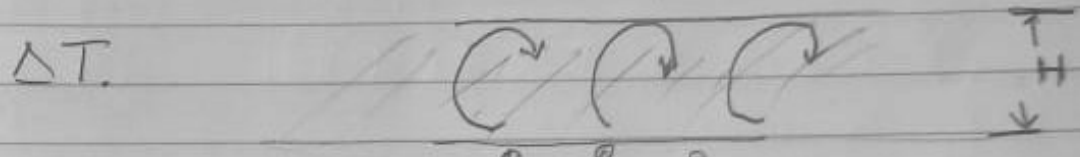
και εστω $D(t) = \phi(t; D)$.

Εστω $V(t) = \text{Όγκος των } D(t)$

Ο. Εξισώσεις Lorenz - Φαινόμενα "Χαοτικής" σε Δομοτάξεις n > 2

1. Το Φαινόμενο Rayleigh (Rayleigh 1916)

Μεγέθη της ροής ενός στρωμάτος κυρτών βελών Η, όταν η διαφορά της θερμότητας μεταξύ των επάνω και κάτω επιφανειών είναι σταθερή,



Οι εξισώσεις είναι ΜΔΕ (Navier-Stokes και συνέχισμα) με αχρηστεύς των ταχυτήτων και των διαφροτήτων

2. Η Απλοποίηση (Lorenz 1963)

Κανόνας για σχετικά χαμηροβίδη απλοποίηση ο Lorenz φαίνεται σε ένα αλγεβρικό ΣΔΕ

(1)
$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = \sigma x - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad \boxed{\sigma > b+1}$$

όπου οι μεταβλητές

$x =$ ταχύτητα

$y =$ διαφορά θερμοκρασίας ΔT

$z =$ διαφορά θερμοκρασίας, ως προς το βάθος, από την γραμμική κατανομή.

r, σ, b θετικές σταθερές.

3. Πρώτα Βήματα στην Ανάλυση του (1)

Σημεία Ισορροπίας

① $\sigma(y-x) = 0 \Rightarrow x = y$

② $rx - y - xz = 0 \Rightarrow rx - x - xz = 0 \Leftrightarrow x(r-1-z) = 0$

③ $xy - bz = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } \underline{z = r-1}$

③ $\Rightarrow x^2 = bz = b(r-1) \quad \underline{x = \pm \sqrt{b(r-1)}}$

$\{(0,0,0), (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)\} =: \{(0,0,0), \textcircled{1}\}$

3 Σ.Ι. για $r > 1$, $r=0$ διακρίβωση.

Γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

(152)

$T_{\text{patt. 470}}$
 $(0,0,0)$ $\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} =: A$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(b + \lambda) \det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ r & -1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(b + \lambda) [(\sigma + \lambda)(1 + \lambda) - \sigma r]$$

(2) $\lambda = -b$, $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right)$

$\Sigma_{\text{sp}}: \Gamma \text{ a } r < 1 \quad \lambda_{\pm} < 0 \quad \lambda < 0$

Supertypes - Approximates

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) \xrightarrow{S} (-x, -y, z)$$



$S = \text{rotation from } z\text{-axis}$

$\Leftrightarrow X' = F(X)$

$$F(S(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \sigma(-y+x) \\ r(-x)+y+xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = S(F(x,y,z))$$

Example join

$$(SX)' = SX' = S F(X) = F(SX)$$

Apa an $(x(t), y(t), z(t)) \downarrow \text{on} \Rightarrow (-x(t), -y(t), z(t)) \downarrow \text{on}$

0 z-achsen sind orientiert
 (1) $x' = y' = 0 \Rightarrow$ für $z' = -bz$

Theorem 1 ($r < 1$)
 Form $r < 1 \Rightarrow$ (1900) funktionen (eigenschaften)
 Teil 1) ist ein System (aus f und g)

Ausgang
 $V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\nabla V(x,y,z) = \nabla V \cdot F$

$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-y-xz \\ x-y-bz \\ xy-bz \end{pmatrix}$

$= -2z(x^2 + y^2 - (1+1)xy) - 2cbz^2$

$= \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{2}{1+r} \\ 1 \\ -\frac{2}{1+r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \right\rangle$

B

$\text{tr} B = 2z, \det B = 1 - \frac{4}{(1+r)^2} > 0$

$\therefore \langle BX, X \rangle$ ist ein positives T.P.

$\Rightarrow \nabla V < 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \neq (0,0,0)$

Es folgt \Rightarrow (1900) ist ein lokales Maximum

Таблицы к числу r не переделывайтесь по ТЗ 1;

Получено r (по) по $r > 1$

$$\lambda > 0, \lambda = -b < 0, \lambda < 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ d. } \text{корней (полюсов)} \\ 2 \text{ d. } \text{корней (нулей)} \end{array} \right.$ (сигна)

Таблица 2 (121)

Та же $\mathbb{R}^n \neq$ или нулевых корней по

(3)

$$\lambda < r < r^* = \sigma \left(\frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \right)$$

Алгоритм

$$\begin{array}{c} \frac{0(x', y', z')}{2(x', y', z')} \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & b(r-1) & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$\lambda^3 - (\text{tr} A) \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} (\text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2) \lambda + \det A = 0$$

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma) \lambda^2 + b(\sigma+r) \lambda + z b \sigma (r-1) = 0$$

via $r=1$ 2 Xupus

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma) \lambda^2 + b(\sigma+r) \lambda = 0$$

$$y = 0, \quad y = -b, \quad y = -a - b$$

Interceptes: y -axis

$$-a - b < -a + 1 < -b < 0 \quad (a > b + 1)$$

Fixing $f(x) > 0$ for $x > 0, x < 1$

\Rightarrow for x outside $0, 1, x > 1$, $x < 0$ the plot is

aparties.

Exemplo: $f(x) = x^2 + 2bx + 2b^2$ (1) $f(x) = x^2 + 2bx + 2b^2$ \Rightarrow $x = 0$ for x outside $0, 1$ the plot is aparties. $\lambda = \pm \omega$!

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2) + (x^2 + 2bx + 2b^2) + (x^2 + 2bx + 2b^2) = 0$$

$$-x^3 - (x^2 + 2bx + 2b^2) + (x^2 + 2bx + 2b^2) = 0$$

$$-x^3 + b(x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = b(x^2)$$

$$(x^2 + b)(x^2) = 2bx(x^2 - 1)$$

$$(x^2 + b)(x^2) = 2bx(x^2 - 1)$$

\Rightarrow (3)



II) potans 3

$E \cdot \nabla^*$ Tuv o'i Juvast Tuv (A) Teyra Baxpaxtal raq Dapaxuv o'ro ϵ // qatibalar

$V(x,y,z) = r^*$

$V(x,y,z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2r)^2$

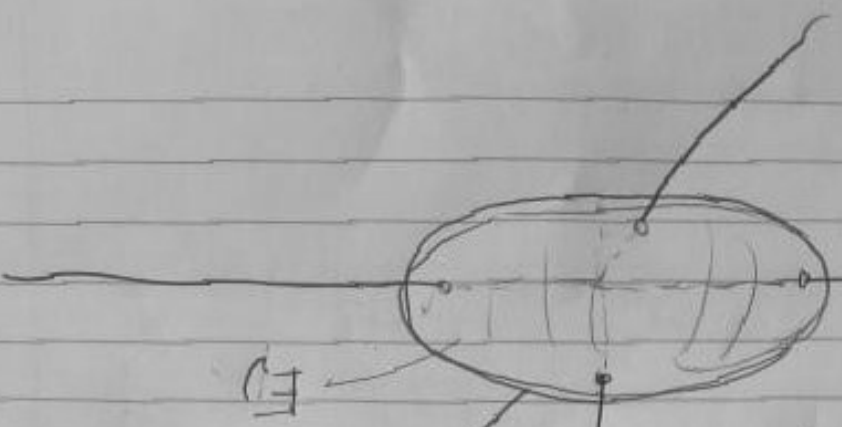
Axbosim
 $\nabla V = \Delta V = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \\ 2\sigma y \\ 2\sigma(z-2r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \\ 2\sigma y \\ 2\sigma(z-2r) \end{pmatrix} = -2\sigma [rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 - br^2]$

$= -2\sigma (rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 - br^2)$

H $\epsilon = 16 \mu\text{cm}$

(4)

$\sqrt{x^2 + \sigma y^2 + b(z-2r)^2} = r$
 O'qirer eva ϵ // qatibalar: $E \cdot \nabla$
 $r > 0$



(1st)

Δεστέ οτι $\exists y^* > 0$ τέτοιο ώστε

(5) $\nabla v = \nabla v \cdot F < 0$ στο ∂E_y

για $y > y^*$ (Αρκούν 111)

$\Leftrightarrow N \cdot F < 0, N \perp \partial E_y$

Επιπλέον οτι για τα εσωτερικά σημεία (x, y)

δεν υπάρχει καμία εστία οτι $\nabla v \cdot E_y > 0$.

Καυτών κατ'ελάχιστον x για τα εσωτερικά

τα ∂E_y δεστέ οτι $\nabla v \cdot \text{outward normal} > 0$.

Ομοίως καθε y για $x \in \partial E_y$ είναι $\nabla v \cdot E_y > 0$.

Τα E_y^* (Αρκούν 12) (ή εστία ομοίως)

από την (1).

□

Εάν ∇v στο X είναι στο \mathbb{R}^n ή ομοίως ∂D

και είναι $\nabla v = \phi(t, x)$.

Εάν $\nabla v = \phi(t, x) = \phi(t, x)$

Ο. Εξισώσεις Lorenz - Φαινόμενα "Χοιρι" σε
Δοξαίσις 172

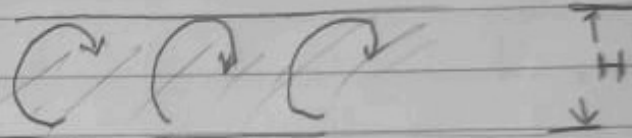
1. Το Φαινόμενο Φαινόμενα (Rayleigh 1916)

Μεγέθη της ροής ενός στρωμάτος κυρτών βρόχων

Η, όταν η διαφορά της θερμότητας μεταξύ

της επάνω και κάτω επιφανείας είναι στο έδαφος,

ΔΤ.



Οι εξισώσεις είναι ΜΔΕ (Navier-Stokes και

θερμότητας με αγκυρώσεις των ταχυτήτων και των θερμοτήτων)

2. Η Απλοποίηση (Lorenz 1963)

Κανόνας για σχετικά χαμηροί βίαι απλοποίηση 0

Lorenz επέλεξε σε ένα αλγόριθμο 3 ΣΔΕ

$$(1) \begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = \sigma x - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma > b+1}$$

Τότε κανονικά έχουμε την διαφοροποίηση 6.8 [AK]

των Itôville έχουμε (Άσκηση 13)

$$(6) \quad \frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \operatorname{div} F \, dx dy z$$

$$F(x, y, z) = (\sigma(y-x), x-y-xz, xy-bz)$$

$$F_x + F_y + F_z = -\sigma - 1 - b < 0$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = -(\sigma + b + 1) V(t)$$

\therefore

$$(7) \quad V(t) = e^{-(\sigma + b + 1)t} V(0)$$

Συμπέρασμα

Το Μεγιστο Αραιοτητα ονομα $M \subset E, *$

έχει μέτρο Lebesgue στο \mathbb{R}^3 100 με μηδέν.

□

όπου οι μεταβλητές

$x =$ ταχύτητα

$y =$ διαφορά θερμοκρασίας ΔT

$z =$ διαφορά δυναμικού, ως προς το βάθος, από την γραμμική κατανομή.

r, σ, b θετικές σταθερές.

3. Πρώτα Βήματα στην Ανάλυση του (1)

Σημεία Ισορροπίας

① $\sigma(y-x) = 0 \Rightarrow x = y$

② $r x - y - x z = 0 \Rightarrow r x - x - x z = 0 \Leftrightarrow x(r-1-z) = 0$

③ $x y - b z = 0 \quad \therefore x = 0 \quad \text{ή} \quad \boxed{z = r-1}$

③ $\Rightarrow x^2 = b z = b(r-1) \quad \boxed{x = \pm \sqrt{b(r-1)}}$

$\{(0,0,0), (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)\} =: \{(0,0,0), \textcircled{2}\}$

3 Σ.Ι. για $r > 1$, $r=0$ διακρίβωση.

Γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$