Γραμμ. στο $(0,0,0)$

$$\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}\bigg|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(b+\lambda)\det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma \\ r & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(b+\lambda)\left[(\sigma+\lambda)(1+\lambda) - \sigma r\right]$$

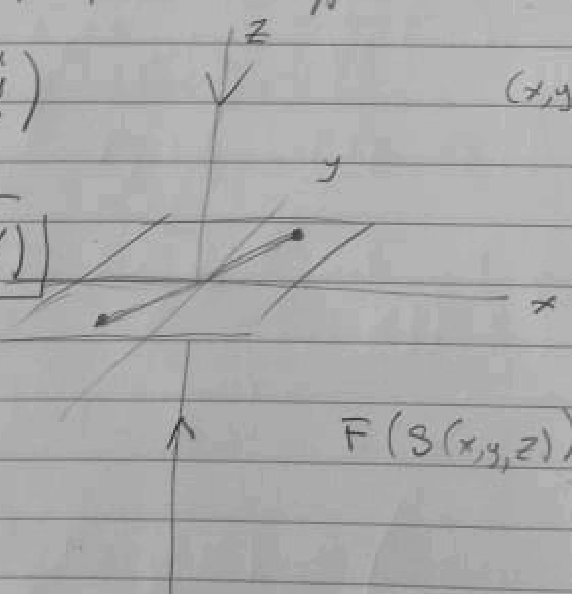
(2) $\lambda = -b, \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}\right)$

Συμπ.: Για $r<1$ $\lambda_\pm < 0$, $\lambda < 0$

Συμμετρίες - Αναλλοίωτες

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \boxed{X' = F(X)}$



S

$(x,y,z) \to (-x,-y,z)$

S = ανάκλαση μέσω z-άξονα

$$F(S(x,y,z)) = (\sigma(-y+x),\ r(-x)+y+xz,\ xy-bz)$$
$$= S(F(x,y,z))$$

Έχουμε λοιπόν

$$(SX)' = SX' = SF(X) = F(SX)$$

Άρα αν $(x(t),y(t),z(t))$ λύση $\Rightarrow$ $(-x(t),-y(t),z(t))$ λύση

Ο z-άξονας είναι αναλλοίωτος διότι

αν $x=y=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} x'=y'=0$ και $z'=-bz$.

<u>Πρόταση 1</u> $(r<1)$

Έστω $r<1$ ($\Rightarrow (0,0,0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας)

Τότε όλες οι λύσεις συγκλίνουν καθώς $t \to +\infty$ στο $(0,0,0)$

<u>Απόδειξη</u>

$$V(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

$$\dot{V}(x,y,z) = \nabla V \cdot F$$

$$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2\sigma y \\ 2\sigma z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix}$$

$$= -2\sigma\left(x^2+y^2-(1+r)xy\right) - 2\sigma b z^2$$

$$x^2+y^2-(1+r)xy$$

$$= \Bigg\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+r}{2} \\ -\frac{1+r}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg\rangle$$

$$\operatorname{tr} B = 2 > 0, \quad \det B = 1 - \tfrac{1}{4}(1+r)^2 > 0$$

$\therefore \langle BX, X\rangle$ θετικά ορισμένη τ.μ.

$\Rightarrow \dot{V} < 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \neq (0,0,0)$

Επομένως $\Rightarrow (0,0,0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές

□

Τι συμβαίνει καθώς το r περνάει μέσω του 1;

Γραμμικοποίηση στο $(0,0,0)$ για $r>1$

$\lambda_+ > 0, \quad \lambda = -b < 0, \quad \lambda_- < 0$

$$\begin{cases} 1d \text{ ασταθής ιδιόχωρος}, & (\text{σάγμα}) \\ 2d \text{ ευσταθής ιδιόχωρος}. \end{cases}$$

Πρόταση 2 $(r>1)$

Τα Σ.Ι. $Q_\pm$ είναι ευσταθείς κόμβοι για:

(3) $$1 < r < r^* = \sigma\left(\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}\right)$$

Απόδειξη

$$\left.\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}\right|_{(x,y,z)=Q_+} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$\lambda^3 - (\mathrm{tr}A)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right)\lambda + \det A = 0$$

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

Για $r=1$ έχουμε

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+1)\lambda = 0$$

$\lambda = 0, \quad \lambda = -b, \quad \lambda = -\sigma - 1$

διακριτες ριζες

$-\sigma - 1 < -\sigma + 1 < -b < 0 \qquad (\sigma > b + 1)$

Επισης $f_r(\lambda) > 0$ για $\lambda \geq 0$, $r > 1$

$\Rightarrow$ για r κοντα στο 1, $r > 1$, και οι τρεις ριζες αρνητικες.

Ερωτημα: ? μικροτερη τιμη του $r (> 1)$ ετσι ωστε το $f_r(\lambda)$ εχει ριζα με μηδενικο πραγματικο μερος ($\lambda = 0$ δεν ειναι οποτε αναγκαστικα) $\lambda = \pm \omega i$

$f_r(i\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$(i\omega)^3 + (1 + b + \sigma)(i\omega)^2 + b(\sigma + r)(i\omega) + 2b\sigma(r - 1) = 0$

$-\omega^3 i - (1 + b + \sigma)\omega^2 + b(\sigma + r) i\omega + 2b\sigma(r - 1) = 0$

$-\omega^3 + b(\sigma + r)\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = b(\sigma + r)$

$(1 + b + \sigma)\omega^2 = 2b\sigma(r - 1)$

$(1 + b + \sigma)\cancel{b}(\sigma + r) = 2\cancel{b}\sigma(r - 1)$

$\Rightarrow (3)$.

$\square$

Πρόταση 3

$\exists\, \nu^*$ τ.ω. όλες οι λύσεις της (1) τελικά εισέρχονται και παραμένουν στο ελλειψοειδές

$$V(x,y,z) = \nu^*$$

$$V(x,y,z) = r x^2 + \sigma y^2 + \sigma (z-2r)^2$$

Απόδειξη

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}$$

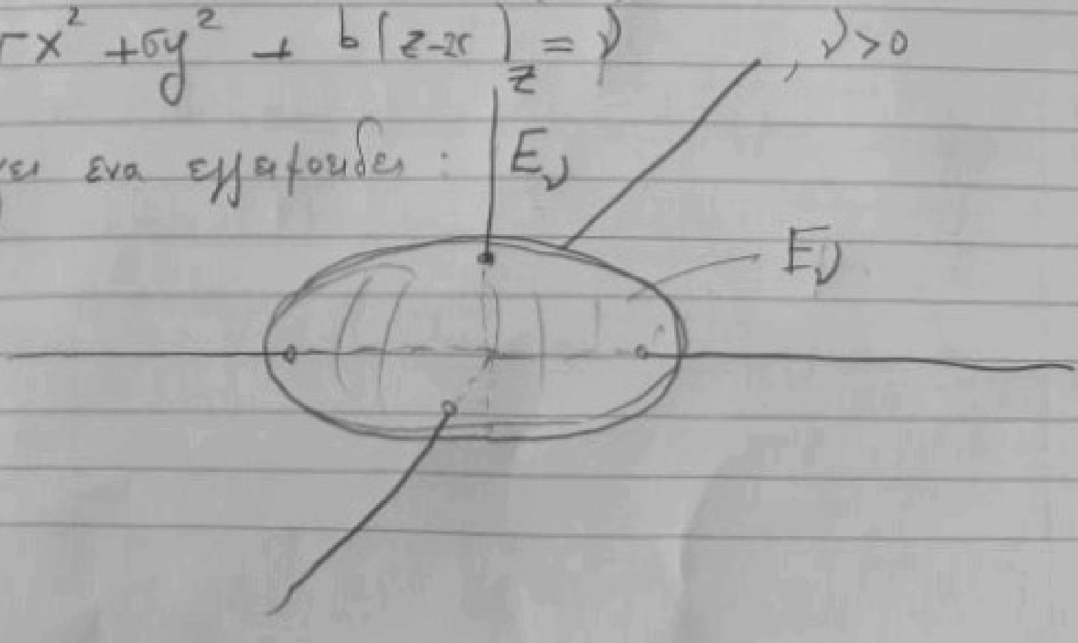
$$= \begin{pmatrix} 2rx \\ 2\sigma y \\ 2\sigma(z-2r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = -2\sigma\left[rx^2 + y^2 + b\left(z^2 - 2rz\right)\right]$$

$$= -2\sigma\left(rx^2 + y^2 + b(z-r)^2 - br^2\right)$$

Η εξίσωση

(4) $\quad rx^2 + \sigma y^2 + b(z-2r)^2 = \nu \quad , \nu > 0$

ορίζει ένα ελλειψοειδές : E_ν



Δείξτε ότι $\exists\, \nu^* > 0$ τέτοιο ώστε

(5) $\dot{V} = \nabla V \cdot F < 0$ στο ∂E_ν

για $\nu > \nu^*$ (Άσκηση 11)

$\Leftrightarrow \; N \cdot F < 0, \quad N \perp \partial E_\nu$.

Έπεται ότι ροή του συστήματος Lorenz (1) δεν μπορεί να εξέλθει από το E_ν.

Κάνοντας κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος του LaSalle δείξτε ότι το ω-οριακό σύνολο κάθε λύσης του (1) είναι εντός του E_{ν^*}. (Άσκηση 12 (με εις άτοπον απαγωγή)).

$\square$

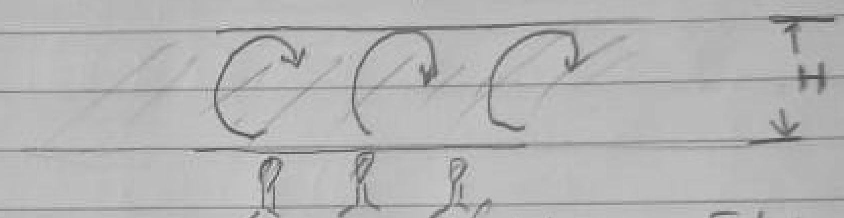
Έστω D ένα χωρίο στο $\mathbb{R}^3$ με σύνορο ∂D και έστω $D(t) = \phi(t; D)$.

Έστω $V(t) =$ Όγκος του $D(t)$

Οι Εξισώσεις Lorenz – Φαινόμενα "Χάος" σε Διαστάσεις $n \geq 3$.

1. Το Φυσικό Φαινόμενο (Rayleigh 1916)

Μελετη της ροης ενος στρωματος υγρου βαθους H, οταν η διαφορα της θερμοκρασιας μεταξυ της επανω και κατω επιφανειας ειναι σταθερη, ΔT.



Οι Εξισωσεις ειναι ΜΔΕ (Navier-Stokes και θερμοτητας με αγνωστους την ταχυτητα και την θερμοτητα)

2 Η Απλοποιηση (Lorenz 1963)

Κανοντας μια σχετικα χονδροειδη απλοποιηση ο Lorenz καταληξε σε ενα συστημα 3 ΣΔΕ

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases} \qquad \boxed{\sigma > b+1}$$

όπου οι μεταβλητές
$x =$ Ταχύτητα
$y =$ διαφορά θερμοκρασίας ΔT
$z =$ διαφορά θερμοκρασίας, ως προς το βάθος, από την γραμμική κατανομή.

r, σ, b θετικές σταθερές.

3. ## Πρώτα Βήματα στην Ανάλυση του (1)

Σημεία Ισορροπίας

① $\sigma(y-x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=y$
② $rx-y-xz=0 \quad \Rightarrow \quad rx-x-xz=0 \Leftrightarrow x(r-1-z)=0$
③ $xy-bz=0 \quad \therefore \quad x=0$ ή $\boxed{z=r-1}$

③ $\Rightarrow x^2=bz=b(r-1) \qquad \boxed{x=\pm\sqrt{b(r-1)}}$

$$\{(0,0,0),\ (\pm\sqrt{b(r-1)},\ \pm\sqrt{b(r-1)},\ r-1)\} =: \{(0,0,0),\ Q_{\pm}\}$$

3 Σ.Ι. για $r>1$, $r=0$ διακλάδωση

Γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Γραμμ. στο $(0,0,0)$

$$\left.\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}\right|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ r & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(b+\lambda)\det\begin{pmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma \\ r & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(b+\lambda)\left[(\sigma+\lambda)(1+\lambda) - \sigma r\right]$$

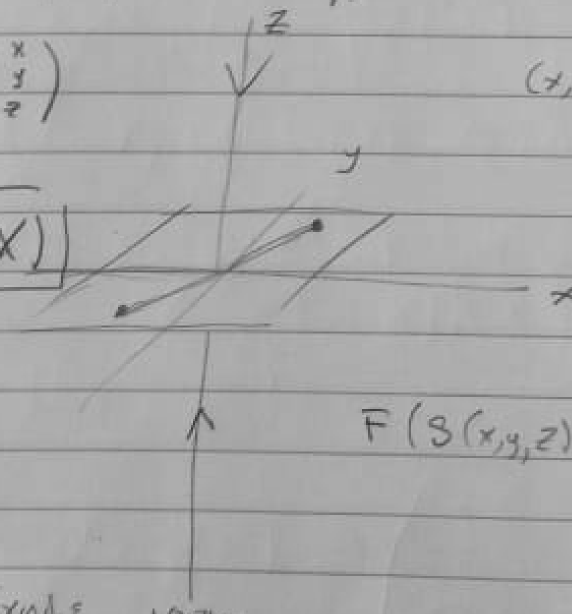
(2) $$\lambda = -b \;, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}\right)$$

Συμπ.: Για $r<1$ $\lambda_{\pm} < 0$, $\lambda<0$.

Συμμετρίες - Αναλλοίωτες

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{X' = F(X)}$$



S: $(x,y,z) \to (-x,-y,z)$

S = ανάκλαση μέσω z-άξονα

$$F(S(x,y,z)) = (\sigma(-y+x),\, r(-x)+y+xz,\, xy-bz)$$
$$= S(F(x,y,z))$$

Έχουμε λοιπόν

$$(SX)' = SX' = SF(X) = F(SX)$$

Άρα αν $(x(t),y(t),z(t))$ λύση $\Rightarrow$ $(-x(t),-y(t),z(t))$ λύση

Ο z-άξονας είναι αναλλοίωτος διότι

αν $x=y=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} x'=y'=0$ και $z'=-bz$.

Πρόταση 1 $(r<1)$

Έστω $r<1$ ($\Rightarrow (0,0,0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας)

Τότε όλες οι λύσεις συγκλίνουν όταν $t\to+\infty$ στο $(0,0,0)$.

Απόδειξη

$$V(x,y,z)=x^2+\sigma y^2+\sigma z^2$$

$$\dot V(x,y,z)=\nabla V\cdot F$$

$$=\begin{pmatrix}2x\\2\sigma y\\2\sigma z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma(y-x)\\rx-y-xz\\xy-bz\end{pmatrix}$$

$$=-2\sigma\left(x^2+y^2-(1+r)xy\right)-2\sigma bz^2$$

$x^2+y^2-(1+r)xy$

$$=\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\frac{1+r}{2}\\ -\frac{1+r}{2} & 1\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\operatorname{tr}B=2>0,\quad \det B=1-\frac{1}{4}(1+r)^2>0$

$\therefore \langle BX,X\rangle$ θετικά ορισμένη τ.μ.

$\Rightarrow \dot V<0 \Leftrightarrow (x,y,z)\neq(0,0,0)$

Lyapunov $\Rightarrow (0,0,0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές

□

Τι συμβαίνει καθώς το r περνάει μέσω του 1;

Γραμμικοποίηση στο $(0,0,0)$ για $r>1$

$\lambda_+ > 0, \quad \lambda = -b < 0, \quad \lambda_- < 0$

$\begin{cases} 1d \text{ ασταθής ιδιόχωρος}, \\ 2d \text{ ευσταθής ιδιόχωρος}. \end{cases}$ (σάγμα)

<u>Πρόταση 2</u> $(r>1)$

Τα Σ.Ι. $Q_\pm$ είναι ευσταθείς κόμβοι για

(3) $$1 < r < r^* = \sigma\left(\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}\right)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\left.\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)}\right|_{(x,y,z)=Q_+} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} =: A$$

$$\lambda^3 - (\operatorname{tr}A)\lambda^2 + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right)\lambda + \det A = 0$$

$$f_r(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

Για $r=1$ έχουμε

$$f_1(\lambda) = \lambda^3 + (1+b+\sigma)\lambda^2 + b(\sigma+1)\lambda = 0$$

$\lambda = 0, \ \lambda = -b, \ \lambda = -\sigma - 1$

διακριτες ριζες

$-\sigma - 1 < -\sigma + 1 < -b < 0$ $\quad (\sigma > b+1)$

Επισης $f_r(\lambda) > 0$ για $\lambda \geq 0$, $r > 1$

$\Rightarrow$ για r κοντα στο 1, $r > 1$, και οι τρεις ριζες αρνητικες.

Ερωτημα: ? μικροτερη τιμη του $r (> 1)$ ετσι ωστε το $f_r(\lambda)$ εχει ριζα με μηδενικο πραγματικο μερος ($\lambda = 0$ δεν ειναι οποτε αναγκαστικα) $\lambda = \pm \omega i$

$f_r(i\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$(i\omega)^3 + (1+b+\sigma)(i\omega)^2 + b(\sigma + r)(i\omega) + 2b\sigma(r-1) = 0$

$-\omega^3 i - (1+b+\sigma)\omega^2 + b(\sigma+r) i\omega + 2b\sigma(r-1) = 0$

$-\omega^3 + b(\sigma + r)\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = b(\sigma + r)$

$(1+b+\sigma)\omega^2 = 2b\sigma(r-1)$

$(1+b+\sigma)\cancel{b}(\sigma + r) = 2\cancel{b}\sigma(r-1)$

$\Rightarrow (3)$.

$\square$

Πρόταση 3

$\exists\ \nu^*$ τ.ω. όλες οι λύσεις της (1)
τελικά εισέρχονται και παραμένουν στο ελλειψοειδές

$$V(x,y,z) = \nu^*$$

$$V(x,y,z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma (z-2r)^2$$

Απόδειξη

$$\dot{V} = \nabla V \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix}$$

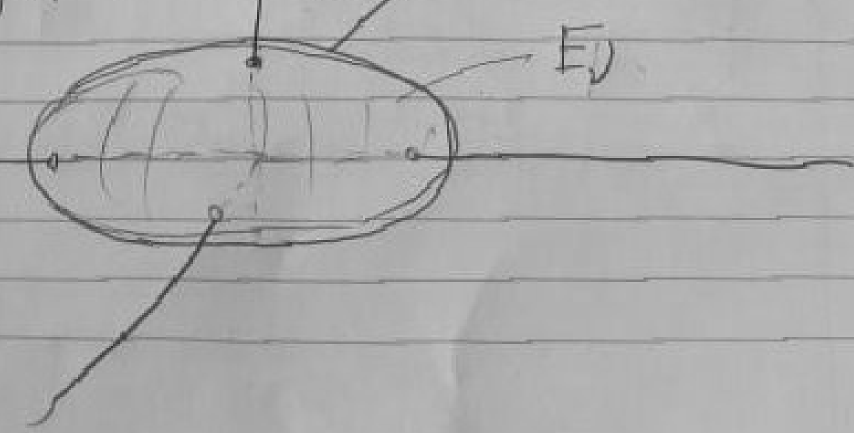
$$= \begin{pmatrix} 2rx \\ 2\sigma y \\ 2\sigma(z-2r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ rx-y-xz \\ xy-bz \end{pmatrix} = -2\sigma\left[rx^2+y^2+b(z^2-2rz)\right]$$

$$= -2\sigma\left(rx^2+y^2+b(z-r)^2-br^2\right)$$

Η εξίσωση

(4) $\quad rx^2 + \sigma y^2 + b(z-2r)^2 = \nu \quad , \nu > 0$

ορίζει ένα ελλειψοειδές : E_ν



Δείξτε ότι $\exists\, \nu^* > 0$ τέτοιο ώστε

(5) $\dot{V} = \nabla V \cdot F < 0$ στο ∂E_ν

για $\nu > \nu^*$ (Άσκηση L1)

$\Leftrightarrow \quad N \cdot F < 0, \quad N \perp \partial E_\nu$

Έπεται ότι ροή του συστήματος Lorenz (1) δεν μπορεί να εξέλθει από το E_ν.

Κάνοντας κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος του LaSalle δείξτε ότι το ω-οριακό σύνολο κάθε λύσης του (1) είναι εντός του E_{ν^*}. (Άσκηση L2 (με εις άτοπον απαγωγή).

$\square$

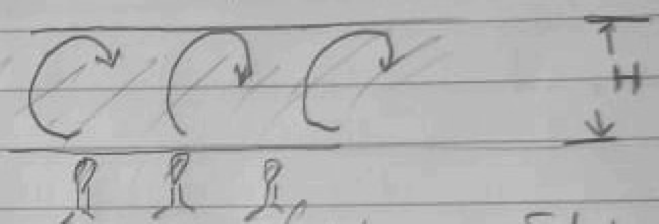
Έστω D ένα χωρίο στο $\mathbb{R}^3$ με όριο ∂D και έστω $D(t) = \phi(t; D)$.

Έστω $V(t) =$ Όγκος του $D(t)$

0. Εξισώσεις Lorenz – Φαινόμενα "Χάους" σε Διαστάσεις $n>2$.

1. Το Φυσικό Φαινόμενο (Rayleigh 1916)

Μελέτη της ροής ενός στρώματος υγρού βάθους Η, όταν η διαφορά της θερμοκρασίας μεταξύ της επάνω και κάτω επιφάνειας είναι σταθερή, ΔΤ.



Οι Εξισώσεις είναι ΜΔΕ (Navier-Stokes και θερμότητος με αγνώστους την ταχύτητα και την θερμότητα)

2 Η Απλοποίηση (Lorenz 1963)

Κάνοντας μια σχετικά χονδροειδή απλοποίηση ο Lorenz κατέληξε σε ένα σύστημα 3 ΣΔΕ

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \sigma(y-x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma > b+1}$$

Τοτε κανοντας χρηση του Θεωρηματος 6.8 [AK]

του Liouville εχουμε (Ασκηση 13)

(6) $$\frac{dV}{dt} = \int_{D(t)} \operatorname{div} F \, dxdydz$$

$$F(x,y,z) = \left(\sigma(y-x),\ rx-y-xz,\ xy-bz\right)$$

$$F_x + F_y + F_z = -\sigma - 1 - b$$

$\therefore$ $$\frac{dV}{dt} = -(\sigma+b+1)\,V(t)$$

$\therefore$

(7) $$V(t) = e^{-(\sigma+b+1)}\,V(0)$$

<u>Συμπερασμα</u>

Το Μεγιστο Αναλλοιωτο συνολο $M \subset E_{\gamma}^{*}$ εχει μετρο Lebesgue στο $\mathbb{R}^3$ ισο με μηδεν.

$\square$

όπου οι μεταβλητές

$x =$ Ταχύτητα

$y =$ διαφορά θερμοκρασίας ΔT

$z =$ διαφορά θερμοκρασίας, ως προς το βάθος, από την γραμμική κατανομή.

r, σ, b θετικές σταθερές.

3. Πρώτα Βήματα στην Ανάλυση του (1)

Σημεία Ισορροπίας

① $\sigma(y-x)=0 \Rightarrow x=y$

② $rx-y-xz=0 \Rightarrow rx-x-xz=0 \Leftrightarrow x(r-1-z)=0$

③ $xy-bz=0 \quad \therefore x=0$ ή $\boxed{z=r-1}$

③ $\Rightarrow x^2=bz=b(r-1) \qquad \boxed{x=\pm\sqrt{b(r-1)}}$

$\{(0,0,0), (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)\} =: \{(0,0,0), Q_\pm\}$

3 Σ.Ι. για $r>1$, $r=0$ διακλάδωση.

Γραμμικοποίηση

$$\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$