Σχόλια επί της Απόδειξης της Ασυμπτωτικής Ευστάθειας (σ. 89).

Έχουμε δείξει ευστάθεια. Θα δείξουμε ότι αν επί πρόσθετως η V είναι αυστηρή Lyapounov τότε για τις λύσεις που περιέχονται στον δίσκο ευστάθειας

(1) $$B((\bar{x},\bar{y});\varepsilon)$$

ισχύει

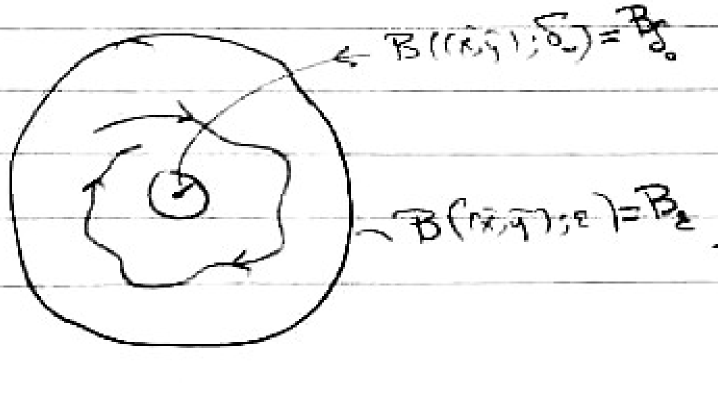
(2) $$\lim_{t\to+\infty}(x(t),y(t))=(\bar{x},\bar{y})$$

Επιχειρηματολογούμε μέσω ατόπου. Έστω ότι υπάρχει μία τέτοια λύση $(x(t),y(t))$ για την οποία δεν ισχύει η σχέση (2).
Θα χρειαστούμε:

Άσκηση*
Έστω $(\bar{x},\bar{y})$ ευσταθές Σ.Ι. και έστω λύση εντός δίσκου ευστάθειας $B((\bar{x},\bar{y});\varepsilon)$. Δείξτε ότι αν για κάποια ακολουθία $\{t_n\}\to\infty$ $(x(t_n),y(t_n))\to(\bar{x},\bar{y})$, τότε το όριο $\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t))$ υπάρχει και είναι $(\bar{x},\bar{y})$.

Από την Άσκηση* προκύπτει ότι $\exists\ \delta_0>0$ τ.ω.

$$\|(x(t),y(t))-(\bar{x},\bar{y})\|\geq\delta_0>0\ ,\quad \text{για } t\geq T$$



$\dot{V}(x,y)$ συνεχής, αρνητικά ορισμένη

$$\Rightarrow \max_{\overline{B_\varepsilon\setminus B_{\delta_0}}}\dot{V}(x,y)=-\gamma<0.$$

Για $t \geq T$ $(x(t), y(t)) \in B_\varepsilon \setminus B_{\delta_0}$ Ορισμός σ. 85

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) \cdot (f_1, f_2) = \dot{V}(x(t), y(t))$$

$$\leq -\gamma < 0$$

$$\Rightarrow \int_T^t \left[\frac{d}{d\tau} V(x(\tau), y(\tau))\right] d\tau \leq \int_T^t -\gamma \, d\tau = -\gamma (t - T)$$

$$\Leftrightarrow V(x(t), y(t)) - V(x(T), y(T)) \leq -\gamma (t - T) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$

ΑΤΟΠΟ !

$\square$

Πρόβλημα

Μελετήστε η ευστάθεια του Σ.Ι. του

$$\begin{cases} x_1' = -x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_2' = -2x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

Λύση

Σ.Ι. : $-x_1^3 + x_1 x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1(-x_1^2 + x_2^2) = 0$ (1)

$-2x_1^2 x_2 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_2(-2x_1^2 - x_2^2) = 0$ (2) $\Rightarrow x_2 = 0$ ή $-2x_1^2 - x_2^2 < 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$\Downarrow$ (1)

$\boxed{x_1 = 0}$

(0,0) Σ.Ι.

2ου μέρος πολυώνυμα βαθμού $\geq 2 \Rightarrow Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Συμπέρασμα: Γραμμικοποίηση δεν δίνει πληροφορία.

Μέθοδος Lyapunov:

ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

(Τετράγωνο Απόστασης, θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$)

$$\dot{V}(x_1,x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2$$

$$= x_1\left(-x_1^3 + x_1 x_2^2\right) + x_2\left(-2x_1^2 x_2 - x_2^3\right)$$

$$= -x_1^4 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2^2 - x_2^4$$

$$\leq 0.$$

Επίσης $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow -x_1^4 - x_1^2 x_2^2 - x_2^4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2) = (0,0).$$

$\therefore$ $(0,0)$ ασυμπτωτικά ευσταθές.

$\square$

Παράδειγμα

$$x'' - f(x) = 0$$

$$U(x) = -\int_0^x f(s)\,ds = \text{Δυναμική Ενέργεια}$$

Πρόταση: Αν $\bar{x}$ απομονωμένο τοπικό ελάχιστο της $U(x)$ Τότε το $(\bar{x}_1, 0)$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας για το

$$\begin{cases} x' = y = f_1(x,y) \\ y' = f(x) = f_2(x,y) \end{cases} \qquad 0 = U'(\bar{x}) = -f(\bar{x}) = 0$$

A) Γραμμικοποίηση: $\left.\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}\right|_{(\bar{x},0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{x},0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}$

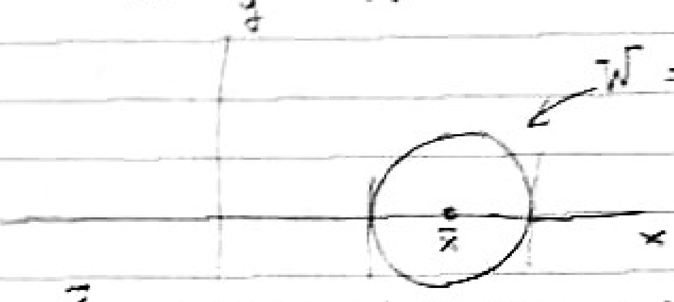
$$U''(\bar{x}) \geq 0 \Leftrightarrow -f'(\bar{x}) \geq 0$$

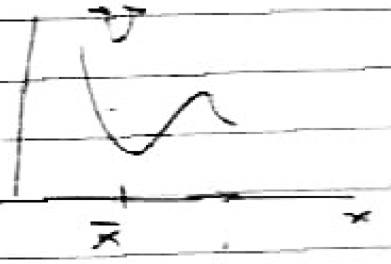
$$\lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - f'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = i\sqrt{-f'(\bar{x})}$$

ΔΕΝ ΔΙΝΕΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ !

B) Μέθοδος Liapunov

Μηχανική Ενέργεια : $V(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + U(x) - U(\bar{x})$





$\bar{x}$ τοπικό ελάχιστο $\Rightarrow \exists$ W τ.ω.

$\frac{1}{2} y^2 + U(x) - U(\bar{x}) \geq U(x) - U(\bar{x}) \geq 0$, $(x,y) \in W$

$\therefore V(x,y) \geq V(\bar{x},0) = 0$, $(x,y) \in W$

$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = U'(x) y + y f(x) = 0.$

Θεώρημα Liapunov $\Rightarrow$ Ευστάθεια □

Παράδειγμα

Να εξεταστεί η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας

$$x'' + (x')^3 + x = 0.$$

Σημείωση

$x'' + x = 0$ γραμμικός ταλαντωτής

$F = ma$, $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $U(x) = \frac{1}{2} x^2$

$(x')^3 = (x')(x')^2$ = μη γραμμική αντίσταση – τριβή

$v = x'$

$F = -\frac{\partial U}{\partial x} - v^3$

Μηχανική Ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}(x')^2 + V(x)$$

$$\frac{d}{dt}E = x'x'' + \frac{dV(x)}{dx}x' = x'\left[x'' + x\right] = x'\left[-(x')^3\right] \leq 0.$$

Απόσβεση.

Διαισθητικά : $\nexists$ περιοδικές λύσεις, το $(0,0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

$\square$

Ανάλυση

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y^3 \end{cases} \qquad (0,0) \ \Sigma.\mathrm{I}.$$

$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = xy + y(-x - y^3) = -y^4 \leq 0.$$

Θεώρημα $\Longrightarrow$ Ασ. Ευστάθεια.

Σχ : Η γραμμικοποίηση δεν είναι περιοδική (Γραμμικό είναι κέντρο).

$\square$

Παραδειγμα

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 - x_1 f(x_1,x_2) \\ x_2' = -x_1 - x_2 f(x_1,x_2) \end{cases}$$

$2x_2 - x_1 f = 0 \quad \times x_2$

$-x_1 - x_2 f = 0 \quad \times x_1$

$\Rightarrow 2x_2^2 + x_1^2 = 0$

$(x_1 = x_2 = 0)$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f > 0$.

Θα δειξουμε οτι το $(0,0)$ ειναι ασ. ευσταθες μεσω Lyapunov.

Σημ: Μεσω γραφηκοποιησης ο.κ.

Ακολουθια $V(x_1,x_2) = a x_1^2 + b x_2^2$ $\quad a, b$ προσδιοριστοι. $a>0,\ b>0.$

$\dot{V}(x_1,x_2) = 2a x_1 (2x_2 - x_1 f) + 2b x_2(-x_1 - x_2 f)$

$= 4a x_1 x_2 - 2a x_1^2 f - 2b x_1 x_2 - 2b x_2^2 f$

$4a - 2b = 0 \quad (a = \frac{1}{2}, b = 1)$

$= (-2a x_1^2 - 2b x_2^2) f$

Αρνητικα Ορισμενη.

$\Rightarrow (0,0)$

$\square$

Πεδίο Έλξης Σ.Ι.

Σ = Πεδίο Έλξης $(\bar{x},\bar{y})$ στο U

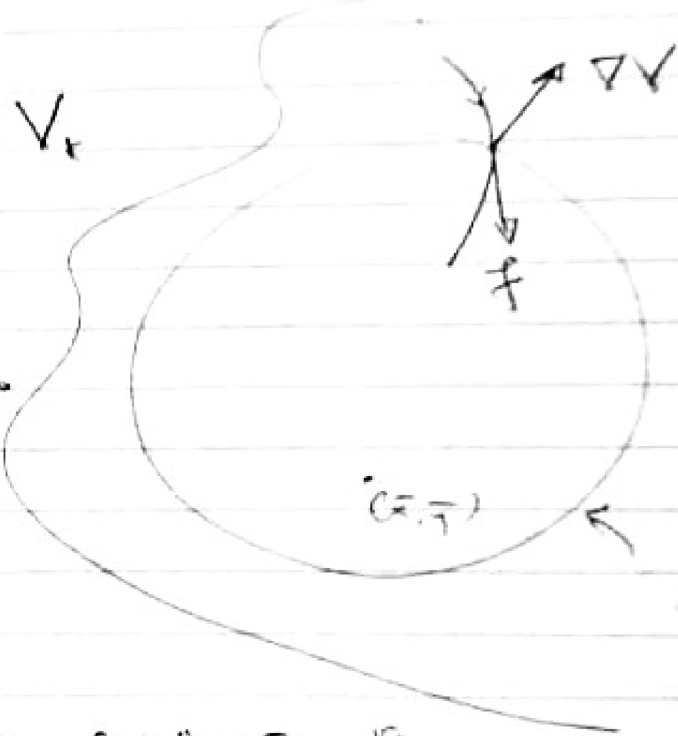
$$\Sigma = \{ (x_0,y_0) \in U \mid \varphi(t,(x_0,y_0)) \to (\bar{x},\bar{y}),\ t \to +\infty \}$$

Θεώρημα

V, $C^1(U)$ συνάρτηση, $U \subset \mathbb{R}^2$, $(\bar{x},\bar{y}) \in U$

$$V_k := \{ (x,y) \in U \mid V(x,y) < k \},\quad \bar{V}_k \subset U.$$

$k > 0$, φιξαρισμένο.



(α) V_k φραγμένο, $(\bar{x},\bar{y}) \in V_k$

(β) $V(x,y) > 0$

στο $U \setminus \{(\bar{x},\bar{y})\}$, $V(\bar{x},\bar{y}) = 0$

(γ) $\dot{V}(x,y) < 0$

στο $U \setminus \{(\bar{x},\bar{y})\}$

Τότε το V_k είναι θετικά αναλλοίωτο και

$$V_k \subset \Sigma.$$

$$x' = f_1(x,y)$$
$$y' = f_2(x,y)$$

Απ

1. Το Θεώρημα Lyapunov δίνει ασυμπτωτική ευστάθεια.

2. $\nabla V \cdot (f_1, f_2)\Big|_{\partial V_k} = \dot{V}(x,y)\Big|_{\partial V_k} < 0$

Έστω $(x(t^*), y(t^*)) \in \partial V_k$, δηλαδή $V(x(t^*), y(t^*)) = k$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t^*} V(x(t), y(t)) = \dot{V}(x(t^*), y(t^*)) < 0$$

$\Longrightarrow$ V_k θετικά αναλλοίωτο.

3. Έστω $(x_0, y_0) \in V_k \Longrightarrow (x(t), y(t)) \in V_k,\ t \geq 0$

Θεώρημα συνέχισης $\Longrightarrow$ ολική ύπαρξη

Θα δείξουμε τώρα ότι $(x(t), y(t)) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$

Με άτοπο. Από την Άσκηση*, σ. 90

$\exists\ \delta_0 > 0,\ T > 0$ τ.ω.

$$\|(x(t), y(t)) - (\bar{x}, \bar{y})\| \geq \delta_0 > 0$$

όπου $\delta_0 > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε μικρό στην ώστε

$B((\bar{x}, \bar{y}); \delta_0) \subset V_k$.

$$\max_{\overline{V_K \setminus B((\bar{x},\bar{y});\delta_0)}} \dot{V} = -\gamma < 0$$

($\dot{V}$ συνεχής, $\overline{V_K \setminus B_{\delta_0}}$ συμπαγές, $\dot{V} < 0$ για $(x,y) \neq (\bar{x},\bar{y})$)

Όπως και προηγουμένως, σ (91), έχουμε

$$\frac{d}{dt} V(x(t),y(t)) = \dot{V}(x(t),y(t)) \leq -\gamma < 0$$

$$\Rightarrow \int_T^t \left(\frac{d}{dt} V(x(t),y(t))\right) dt \leq \int_T^t -\gamma \, d\tau = -\gamma(t-T) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

ΑΤΟΠΟ !

$\square$