Πρώτον λόγω συμμετρίας $x_0 = y_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Έπεται ότι
$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}\frac{R^4}{2^2} = \frac{1}{2}R^2\left(1 - \frac{1}{2^2}R^2\right)$.
Εάν επιλέξουμε $R_0 = 2$ τότε $\max\limits_{x^2+y^2=R^2} f < 0$ για $R > R_0$.

Η περίπτωση (ii) είναι παρόμοια.

(10.27) ή (10.27) [Τοπογραφικό $f \to -f$]

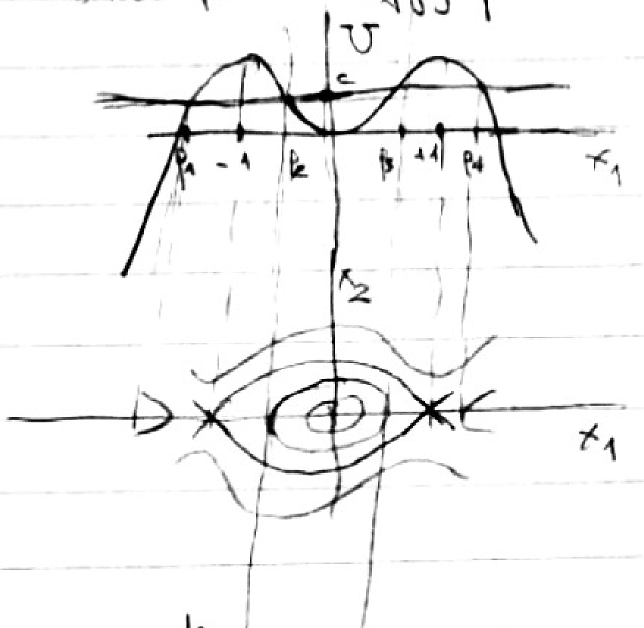
$x'' + f(x) = 0$, $-f(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2)$

Σε μορφή συστήματος (Διευσταθής βλ. Παράδειγμα 10.12)

$x_1' = x_2$

$x_2' = 4x_1 - 4x_1^3$

που έχει σημεία ισορροπίας τα $(-1,0), (0,0), (1,0)$. Για να σχεδιάσουμε το επίπεδο φάσης υπολογίζουμε την $U(x_1) = -\int^{x_1} f(\xi)\,d\xi = 2x_1^2 - x_1^4$.



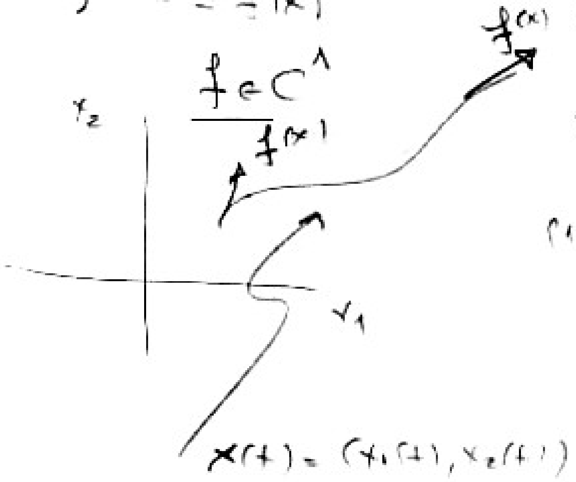
Παρατηρούμε (από το σχήμα) ότι $U_{max} = 1$, και ότι περιοδικές λύσεις αντιστοιχούν για κάποιες στάθμες της Χαμιλτονιανής H_c, $0 < c < 1$. Η εξίσωση $U(x_1) = c \iff 2x_1^2 - x_1^4 = c$ έχει 4 ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Από τον γενικό τύπο της περιόδου στη

$$T = 2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}}$$ έχουμε ότι $$T = 2\int_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{dx}{\sqrt{2(c - 2x^2 + x^4)}}$$

Συστήματα στο Επίπεδο (§10.3).

[AK]

(1) $x' = f(x)$ $\quad x = (x_1, x_2)$



$f = (f_1, f_2)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)$$

Τροχιά: $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Σ.Ι.: $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$.

Παρατήρηση (Αυτόνομο)

Αν $x(t)$ λύση της (1) $\Rightarrow y(t) := x(t+k)$, k σταθερά, επίσης λύση

$$\Big(y'(t) = x'(t+k) = f(x(t+k)) = f(y(t))\Big).$$

□

Παραδείγματα

1) Lotka-Volterra [βλ §1.9 [AK]]

$$(2) \begin{cases} y_1' = (\alpha - \beta y_2) y_1 \\ y_2' = (\delta y_1 - \gamma) y_2 \end{cases}$$

$\overset{y_2}{\text{predator}} - \overset{y_1}{\text{prey}}$
(θηρευτών - θηραμάτων)

Σ.Ι.: $(\alpha - \beta y_2) y_1 = 0$, $(\delta y_1 - \gamma) y_2 = 0$

$$\left\{ (0,0), \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \right\}$$

Πολικές: $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$

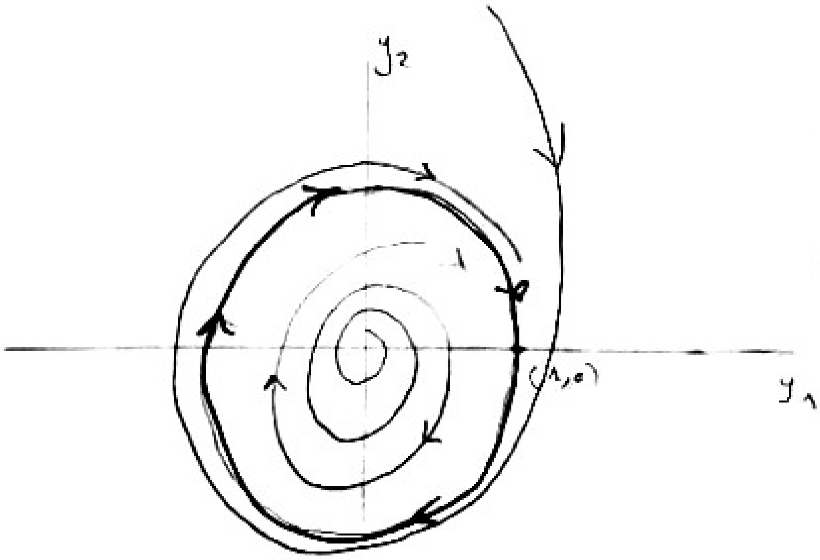
$$y_1' = r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = r\sin\theta + r\cos\theta\,(1-r^2) \qquad \text{(i)}$$
$$y_2' = r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' = -r\cos\theta + r\sin\theta\,(1-r^2) \qquad \text{(ii)}$$

$$\text{(i)}\cos\theta + \text{(ii)}\sin\theta \implies \boxed{r' = r(1-r^2)} \qquad 1$$

$$\text{(i)}\sin\theta - \text{(ii)}\cos\theta \implies -r\theta' = r \iff \boxed{\theta' = -1} \qquad 2$$

Διάγραμμα Φάσης

$$r(1-r^2) = r(1+r)(1-r) \qquad (r>0)$$



Οριακός κύκλος

(limit cycle, globally attracti

Π

Ορισμός Δυναμικού Συστήματος

$$(1)\quad \frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = x, \quad f \in C^1$$

$$y = (y_1, y_2), \quad f(y) = \big(f_1(y_1,y_2),\, f_2(y_1,y_2)\big), \quad y \in \mathbb{R}^2$$

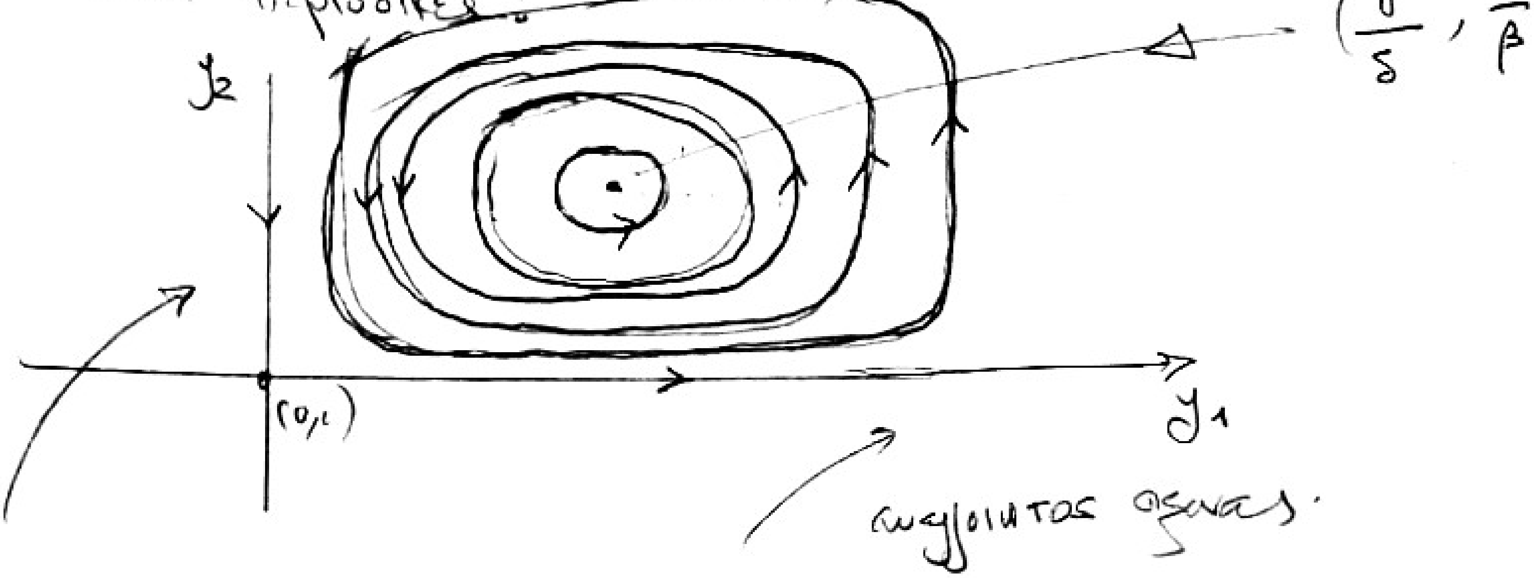
Συμβολίζουμε την λύση με $\varphi(t,x)$

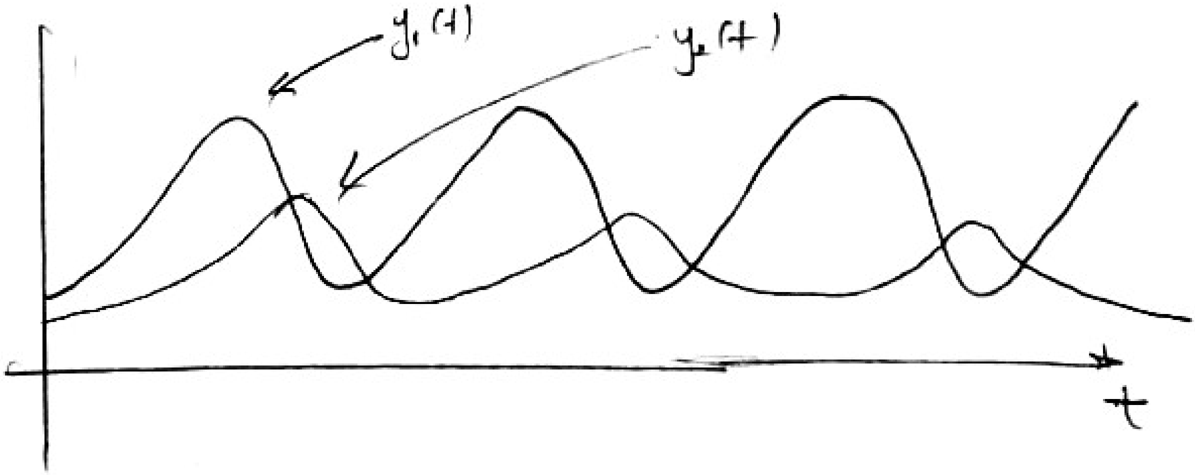
$\boxed{\text{Ασ } 1.52}$ (και §1.9) [AK].

Όλες οι λύσεις που αντιστοιχούν σε θετικές αρχικές συνθήκες

$$(y_1(0), y_2(0)) = (y_1^0, y_2^0)$$

είναι περιοδικές:





2) Οριακός Κύκλος (limit cycle)

$$(3) \quad \begin{cases} y_1' = y_2 + y_1(1 - y_1^2 - y_2^2) \\ y_2' = -y_1 + y_2(1 - y_1^2 - y_2^2) \end{cases}$$

Απο Θεωρημα Υπαρξης - Μοναδικοτητος (Picard - Lindelöf) § 10.6
∃! λυση. Υποθεταμε οτι το πεδιο ορισμου ειναι το $\mathbb{R}$.
Απο Θεωρημα Συνεχους Εξαρτησης § 2.4

(2) $\lim_{x \to \bar{x}} \varphi(t, x) = \varphi(t, \bar{x})$ ομοιομορφα σε t-συμπαγη

Δυναμικο Συστημα

Μια μονοπαραμετρικη οικογενεια $\psi(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
που εχει τις ιδιοτητες

(α) $(t,x) \longrightarrow \psi(t,x)$ συνεχης

(β) $x \longrightarrow \psi(t,x)$ 1-1, με αντιστροφη την $\psi(-t,x)$

(γ) $\psi(0,x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

(δ) $\psi(t+\tau, x) = \psi(t, \psi(\tau, x)) \quad \forall\, t, \tau, x$
(ιδιοτητα Ομαδος)

λεγεται Δυναμικο Συστημα

Θεωρημα

Η (1) οριζει μεσω της φ (απεικονιση λυσης) δυναμικο συστημα.

Απ: Η (γ) εξ' ορισμου

Η (δ):
...με $\xi(t) = \varphi(t+\tau, x)$, $z(t) = \varphi(t, \varphi(\tau, x))$

Θα δειξουμε οτι η $\xi(t), z(t)$ επιλυουν το ιδιο Π.Α.Τ.

Γρωτα με λόγω αυτονομίας (σ 49) η $\xi(\cdot)$ επιλύει την εξίσωση με αρχικά συνθήκη

$$\xi(0) = \varphi(\tau, x).$$

Η $z(\cdot)$ επιλύει την εξίσωση με αρχική συνθήκη

$$z(0) = \varphi(0, \varphi(\tau, x)) = \varphi(\tau, x).$$

Από μοναδικότητα $\xi(t) \equiv z(t)$.

Η (β) :

Κάνουμε χρήση της (δ) με $\tau = -t$

Η (α) : Από την (2).

$\square$

Η Αρχή της Γραμμικοποίησης

(1) $y' = f(y)$, $f \in C^1$, $y \in \Omega$ = ανοικτό

$\bar{y}$ Σ.Ι. : $f(\bar{y}) = 0$ $\qquad \Omega \ni 0$

Γραμμικοποίηση

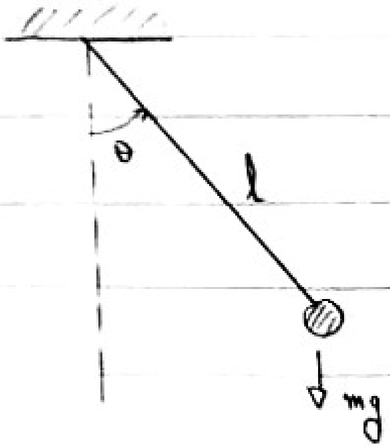
Jacobianos

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(\bar{y})}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(Df(\bar{y})\right) x$$

Πίνακας A (ανεξάρτητος του x, t)

Παραδειγματα

1) Εκκρεμες



$F_T = k v$ (τριβη)

(1) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Θετουμε : $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $\alpha = \frac{k}{2m}$, $y_1 = \theta$, $y_2 = \theta'$

(2) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\omega^2 \sin y_1 - 2\alpha y_2 \end{cases}$

Σ.Ι. : $y_2 = 0$, $-\omega^2 \sin y_1 - 2\alpha y_2 = 0$

$\therefore$ $\{ (n\pi, 0),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$

$(0,0)$ κατω θεση $(\pi, 0)$ επανω θεση

(n αρτιο ή περιττο αντιστοιχουν στα 2 προηγουμενα)

$(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ Σ.Ι.

(3) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos\bar{y}_1 & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$