... καμπύλες στάθμης $\{H = C\}$ με C μεγάλη.

(γ) Δείξτε ότι δοθέντος διαστήματος $I = (\alpha, \beta)$ στον άξονα των t, υπ... λύση της εξίσωσης με ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \beta$.

10.27 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + f(x(t)) = 0,$$

όπου $f(x) = 4x - 4x^3$.

X $-f(x) = 4$

(α) Να σχεδιαστεί το x, x'–επίπεδο φάσης, συμπεριλαμβανομένων όλων σημείων ισορροπίας και των περιοδικών λύσεων.

(β) Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει απειρία περιοδικών λύσεων και ότι η περί... T κάθε τέτοιας λύσης μπορεί να γραφτεί

$$T = \sqrt{2} \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{c - 2x^2 + x^4}},$$

όπου $0 < c < 1$ και $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ είναι οι διαδοχικές ρίζες πολυωνύμου $c - 2x^2 + x^4$.

10.28 Έστω το $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ πολυώνυμο περιττού βαθμού, με θετικό συντελεστή όρο της μεγαλύτερης δύναμης. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της

$$x'' + p(x) = 0$$

είναι φραγμένες στο $(-\infty, +\infty)$.

10.29 Να μελετηθεί η ευστάθεια του $(0,0)$ για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -\alpha x + y + \alpha y^2 \\ y' = (1-\alpha)x + y^4, \end{cases}$$

για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.30 Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για την

$$x'' + g(x) = 0,$$

όπου $g(x) = x^2 + bx + c$ και $b, c \in \mathbb{R}$. Να θεωρηθούν οι εξής περιπτώσεις:

(α) ... δύο πραγματικές ρίζες,

τις αρχικές συνθήκες ώστε ο όρος $e^{-\varepsilon t}$ να μηδενίζεται.

<u>Απάντηση:</u> $\{\ (x,y)\ |\ x = x_1 + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} y\ ,\ y$ ελεύθερο $\}$.

(δ) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης του (Σ_ε) για $\varepsilon > 0$, καθώς και οι ιδιόχωροι του συστήματος.

.12 Εστω f και g συναρτήσεις που ικανοποιούν τις

(α) $f, g \in C^1(-\infty, +\infty)$,

(β) $xg(x) > 0$ για $x \neq 0$, και

$$\int_0^x g(u)\,du \ \to \infty,$$

καθώς $|x| \to +\infty$, και

(γ) $f(x) > 0$ για κάθε x.

Να δειχθεί ότι το σημείο $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές για την διαφορική εξίσωση

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$$

13 Υλικό σημείο μάζας 4 είναι σταθεροποιημένο στο $x = 0$ επί της πραγματικής ευθείας και ένα άλλο υλικό σημείο μάζας 1 είναι σταθεροποιημένο στο σημείο $x = 3$. Ένα τρίτο υλικό σημείο κινείται μεταξύ των δύο πρώτων και η θέση του $x(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$x'' = \frac{G}{(3-x)^2} - \frac{4G}{x^2},$$

όπου G θετική σταθερά. Να γραφτεί η εξίσωση σε μορφή συστήματος 2×2, να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας με συντεταγμένη x μεταξύ 0 και 3 και να προσδιοριστεί αν τα σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή.

4 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x' = y + x^3 \cos(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y^3 \cos(x^2 + y^2) \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι η γραμμικοποίηση δεν δίνει πληροφορία στο $(0,0)$.

(β) Αποφασίστε για την ευστάθεια του $(0,0)$ κάνοντας χρήση κατάλληλης συνάρτησης Lyapounov.

10.20 Για $a > 0$ θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2ax_2 + x_1^3. \end{cases}$$

(α) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθεια μετά από γραμμικοποίηση.

(β) Να σχεδιαστούν αντιπροσωπευτικές καμπύλες στάθμης της

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι η V είναι η Χαμιλτονιανή για την περίπτωση που $a = 0$. Επίσης παρατηρήστε ότι η καμπύλη στάθμης $V = \frac{3}{4}$ περιέχει τις ετεροκλινείς τροχιές για $a = 0$.

(γ) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^2$ για το οποίο η $\gamma^+(x_0)$ είναι φραγμένη, το $\omega(x_0)$ συνίσταται από ένα σημείο ισορροπίας.

(δ) Να εκτιμηθεί το πεδίο έλξης του σημείου $(0,0)$.

(ε) Έστω η ευσταθής πολλαπλότητα

$$W^s(1,0) = \{\, x_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(t, x_0) \to (1,0) \text{ καθώς το } t \to +\infty \,\}$$

που αντιστοιχεί στο $(1,0)$. Να δειχθεί ότι

$$||\varphi(t, x_0)|| \to +\infty \text{ καθώς το } t \to +\infty\,,$$

για κάθε $x_0 \in W^s(1,0)$. Το αντίστοιχο ισχύει και για το $W^s(-1,0)$.

(στ) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης.

10.21 Να μελετηθεί η ευστάθεια του $(0,0)$ για το σύστημα (σε πολική μορφή)

$$\dot\theta = 1\ ,\ \ \dot r \doteq \begin{cases} r^2 \sin\left(\frac{1}{r}\right) & ,\ r > 0 \\ 0 & ,\ r = 0 \end{cases}$$

10.22 Να δειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2. \end{cases}$$

10.23 Έστω ότι το σύστημα

10.15 (α) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για την εξίσωση

$$x'' + g(x) = 0 \ , \ g(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}.$$

(β) Να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για την εξίσωση

$$x'' + (x')^3 + g(x) = 0,$$

όπου g όπως στο (α).

10.16 Έστω η Χαμιλτονιανή

$$H(x,y) = \frac{1}{2}[x^2(x-1)^2 + y^2].$$

Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για τα συστήματα

$$(\alpha) \qquad x' = \frac{\partial H}{\partial y} \ , \ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

και

$$(\beta) \qquad x' = -\frac{\partial H}{\partial x} \ , \ y' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

10.17 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -y + y^3 - x^3 \\ y' = 2x - x^3 - y^3. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι αν $(x(t), y(t))$ λύση του συστήματος τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $x^2(t) + y^2(t) \leq M$ στο $[0, +\infty)$, δηλαδή η $(x(t), y(t))$ είναι φραγμένη.

Υπόδειξη: Να βρείτε συνάρτηση $V(x,y)$ τύπου Lyapounov στο εξωτερικό κάποιας περιφέρειας.

10.18 Έστω f C^1 συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$, με $f(\pm\infty) = \pm\infty$, $f > 0$ στο $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, και $f < 0$ στο (a,b), όπου $a < b$. Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης της

$f(\pm\infty) = +\infty$

$$x'' + f(x) = 0,$$

να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να καθοριστεί η ευστάθειά τους.

10.19 Θεωρούμε στο επίπεδο το σύστημα $y' = f(y)$, όπου

$$f(y) = \begin{bmatrix} -y_1 + y_1 y_2 \\ -a y_1^2 - y_2^3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \ , \ a \in \mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές και το πεδίο έλξης περιλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο αν $a < 0$, είτε είναι το $\mathbb{R}^2$ αν $a \geq 0$.

10.24 Έστω ότι για δεδομένη συνεχή συνάρτηση $f(t)$ το σύστημα

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + f(t)$$

έχει λύση $\varphi(t)$ που είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει M τέτοιο ώστε $\|\varphi(t)\| \leq M$ για $t \geq 0$. Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις του συστήματος είναι φραγμένες.

10.25 Θεωρούμε την εξίσωση (βλ. Παράδειγμα (1.37))

$$x'' + g(x) = 0.$$

(α) Να δειχθεί ότι το ισοδύναμο σύστημα είναι

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -g(x_1), \end{cases}$$

το οποίο είναι συντηρητικό, με Χαμιλτονιανή

$$H(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + G(x_1), \quad G(x_1) = \int_0^{x_1} g(u)\, du.$$

(β) Θεωρώντας καμπύλες στάθμης της H στο επίπεδο φάσης $x_1 - x_2$ δείξτε ότι κάθε περιοδική λύση της εξίσωσης αντιστοιχεί σε κλειστή καμπύλη στάθμης της H που τέμνει τον x_1-άξονα σε δύο σημεία, $(a, 0)$ και $(b, 0)$, όπου $a < b$.

(γ) Κάνοντας χρήση της συμμετρίας των καμπυλών στάθμης ως προς τον x_1-άξονα, να δειχθεί ότι η (ελάχιστη) περίοδος T της περιοδικής λύσης δίνεται από τον τύπο

$$\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{2[G(b) - G(u)]}}.$$

10.26 Θεωρούμε την εξίσωση

$$R'' + 4kR^3 = 0,$$

όπου $k > 0$ σταθερά, $R = R(t)$.

(α) Παρατηρήστε ότι οι καμπύλες στάθμης της Χαμιλτονιανής

$$H(R, R') = kR^4 + \frac{1}{2}(R')^2$$

είναι κλειστές καμπύλες στο επίπεδο φάσης $R - R'$, συμμετρικές ως προς καμπύλες στάθμης $\{H = C\}$ με C μεγάλη.

(γ) Δείξτε ότι δοθέντος διαστήματος $I = (\alpha, \beta)$ στον άξονα των t, υπ λύση της εξίσωσης με ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου $\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \beta$.

10.27 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x''(t) + f(x(t)) = 0,$$

όπου $f(x) = 4x - 4x^3$.

X $-f(x) = 4$

(α) Να σχεδιαστεί το x, x'–επίπεδο φάσης, συμπεριλαμβανομένων όλων σημείων ισορροπίας και των περιοδικών λύσεων.

(β) Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει απειρία περιοδικών λύσεων και ότι η περί T κάθε τέτοιας λύσης μπορεί να γραφτεί

$$T = \sqrt{2}\int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{c - 2x^2 + x^4}},$$

όπου $0 < c < 1$ και $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ είναι οι διαδοχικές ρίζες πολυωνύμου $c - 2x^2 + x^4$.

10.28 Έστω το $p(x)$, $x \in \mathbb{R}$ πολυώνυμο περιττού βαθμού, με θετικό συντελεστή όρο της μεγαλύτερης δύναμης. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της

$$x'' + p(x) = 0$$

είναι φραγμένες στο $(-\infty, +\infty)$.

10.29 Να μελετηθεί η ευστάθεια του $(0,0)$ για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -\alpha x + y + \alpha y^2 \\ y' = (1-\alpha)x + y^4, \end{cases}$$

για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.30 Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για την

$$x'' + g(x) = 0,$$

όπου $g(x) = x^2 + bx + c$ και $b, c \in \mathbb{R}$. Να θεωρηθούν οι εξής περιπτώσεις:

(α) ... δύο πραγματικές ρίζες,

... τις αρχικές συνθήκες ώστε ο όρος $e^{-\varepsilon t}$ να μηδενίζεται.

Απάντηση: $\{\ (x,y) \mid x = x_1 + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} y\ ,\ y$ ελεύθερο $\}$.

(δ) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης του (Σ_ε) για $\varepsilon > 0$, καθώς και οι ιδιόχωροι του συστήματος.

.12 Εστω f και g συναρτήσεις που ικανοποιούν τις

(α) $f, g \in C^1(-\infty, +\infty)$,

(β) $xg(x) > 0$ για $x \neq 0$, και

$$\int_0^x g(u)\, du \ \to \infty,$$

καθώς $|x| \to +\infty$, και

(γ) $f(x) > 0$ για κάθε x.

Να δειχθεί ότι το σημείο $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές για την διαφορική εξίσωση

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0.$$

13 Υλικό σημείο μάζας 4 είναι σταθεροποιημένο στο $x = 0$ επί της πραγματικής ευθείας και ένα άλλο υλικό σημείο μάζας 1 είναι σταθεροποιημένο στο σημείο $x = 3$. Ένα τρίτο υλικό σημείο κινείται μεταξύ των δύο πρώτων και η θέση του $x(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$x'' = \frac{G}{(3-x)^2} - \frac{4G}{x^2},$$

όπου G θετική σταθερά. Να γραφτεί η εξίσωση σε μορφή συστήματος 2×2, να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας με συντεταγμένη x μεταξύ 0 και 3 και να προσδιοριστεί αν τα σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή.

4 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x' = y + x^3 \cos(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y^3 \cos(x^2 + y^2) \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι η γραμμικοποίηση δεν δίνει πληροφορία στο $(0,0)$.

(β) Αποφασίστε για την ευστάθεια του $(0,0)$ κάνοντας χρήση κατάλληλης συνάρτησης Lyapounov.

10.20 Για $a > 0$ θεωρούμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 2ax_2 + x_1^3. \end{array}\right.$$

(α) Να προσδιοριστούν τα σημεία ισορροπίας και να μελετηθεί η ευστάθεια μετά από γραμμικοποίηση.

(β) Να σχεδιαστούν αντιπροσωπευτικές καμπύλες στάθμης της

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^4}{4} + \frac{x_2^2}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι η V είναι η Χαμιλτονιανή για την περίπτωση που $a = 0$. Επίσης παρατηρήστε ότι η καμπύλη στάθμης $V = \dfrac{3}{4}$ περιέχει τις ετεροκλινείς τροχιές για $a = 0$.

(γ) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^2$ για το οποίο η $\gamma^+(x_0)$ είναι φραγμένη, το $\omega(x_0)$ συνίσταται από ένα σημείο ισορροπίας.

(δ) Να εκτιμηθεί το πεδίο έλξης του σημείου $(0,0)$.

(ε) Έστω η ευσταθής πολλαπλότητα

$$W^s(1,0) = \{\, x_0 \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(t, x_0) \to (1,0) \text{ καθώς το } t \to +\infty \,\}$$

που αντιστοιχεί στο $(1,0)$. Να δειχθεί ότι

$$||\varphi(t, x_0)|| \to +\infty \;\text{ καθώς το } t \to +\infty\,,$$

για κάθε $x_0 \in W^s(1,0)$. Το αντίστοιχο ισχύει και για το $W^s(-1,0)$.

(στ) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης.

10.21 Να μελετηθεί η ευστάθεια του $(0,0)$ για το σύστημα (σε πολική μορφή)

$$\dot{\theta} = 1 \;,\;\; \dot{r} \doteq \left\{\begin{array}{ll} r^2 \sin\left(\dfrac{1}{r}\right) & ,\; r > 0 \\ 0 & ,\; r = 0 \end{array}\right.$$

10.22 Να δειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2. \end{array}\right.$$

Έστω ότι το σύστημα

10.15 (α) Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για την εξίσωση

$$x'' + g(x) = 0 \quad , \quad g(x) = \frac{2x}{(1+x)^2}.$$

(β) Να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για την εξίσωση

$$x'' + (x')^3 + g(x) = 0,$$

όπου g όπως στο (α).

10.16 Έστω η Χαμιλτονιανή

$$H(x,y) = \frac{1}{2}[x^2(x-1)^2 + y^2].$$

Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης για τα συστήματα

$$(\alpha) \qquad x' = \frac{\partial H}{\partial y} \quad , \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

και

$$(\beta) \qquad x' = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad , \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

10.17 Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} x' = -y + y^3 - x^3 \\ y' = 2x - x^3 - y^3. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι αν $(x(t), y(t))$ λύση του συστήματος τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $x^2(t) + y^2(t) \le M$ στο $[0, +\infty)$, δηλαδή η $(x(t), y(t))$ είναι φραγμένη.

<u>Υπόδειξη:</u> Να βρείτε συνάρτηση $V(x,y)$ τύπου Lyapounov στο εξωτερικό κάποιας περιφέρειας.

10.18 Έστω f C^1 συνάρτηση επί του $\mathbb{R}$, με $f(\pm\infty) = \pm\infty$, $f > 0$ στο $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, και $f < 0$ στο (a, b), όπου $a < b$. Να σχεδιαστεί το επίπεδο φάσης της

$f(\pm\infty) = +\infty$

$$x'' + f(x) = 0,$$

να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να καθοριστεί η ευστάθειά τους.

10.19 Θεωρούμε στο επίπεδο το σύστημα $y' = f(y)$, όπου

$$f(y) = \begin{bmatrix} -y_1 + y_1 y_2 \\ -a y_1^2 - y_2^3 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

Να δειχθεί ότι το $(0,0)$ είναι ευσταθές και το πεδίο έλξης περιλαμβάνει ένα ημιεπίπεδο αν $a < 0$, είτε είναι το $\mathbb{R}^2$ αν $a \ge 0$.