(β) Χρησιμοποιώντας το (α) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$[illegible]$$

1.4 Να λυθούν τα Π.Α.Τ.

(α) $y' = (\cos t)(y - 1)$, $y(0) = 1$

(β) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$, προσδιορίστε το διάστημα ύπαρξης.

(γ) $y' = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y - 1)}$, $y(0) = -1$.

(δ) $3\dfrac{dy}{dt} = y\cos t$, $y(1) = 0$.

1.5 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x' + \sigma x = f(t) \quad , t \geq 0 \tag{1.102}$$

Αν $f \in C([0, +\infty])$ και $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \rho \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

(α) αν $\sigma > 0$ τότε κάθε λύση ϕ της εξίσωσης έχει την ιδιότητα

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \frac{\rho}{\sigma},$$

(β) αν $\sigma < 0$ τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση ψ της εξίσωσης τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \frac{\rho}{\sigma}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον κανόνα De l'Hôpital. Για το (β) δείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση της (1.102) στο $[0, +\infty)$: $x = -\int_0^{+\infty} e^{-\sigma(t-s)} f(s)\, ds$.

1.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$x' = \frac{2t}{1 + x^2}, \quad x(0) = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

1.7 Να δειχτεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

έχει την ιδιότητα $y \to 0$ καθώς το $t \to +\infty$.

Υπόδειξη: Να θεωρηθούν ξεχωριστά οι περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$. Άλλος τρόπος: εφαρμογή της άσκησης 1.5.