της μορφής $(\lambda, u(\lambda))$.

1.2 Μικρή (ομαλή) διαταρ~~ρ~~αχή Χαμιλτονιανού Συστήματος

([A], σελ. 149)

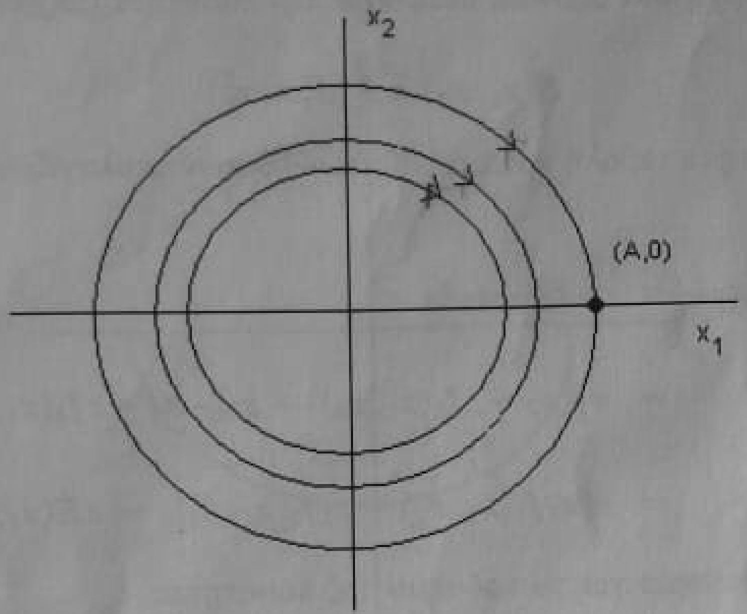
Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2) \qquad |\varepsilon| << 1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{14}$$

(όπου f_i C^1 συναρτήσεις)
που διαφέρει ελαφρώς από τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \tag{15}$$

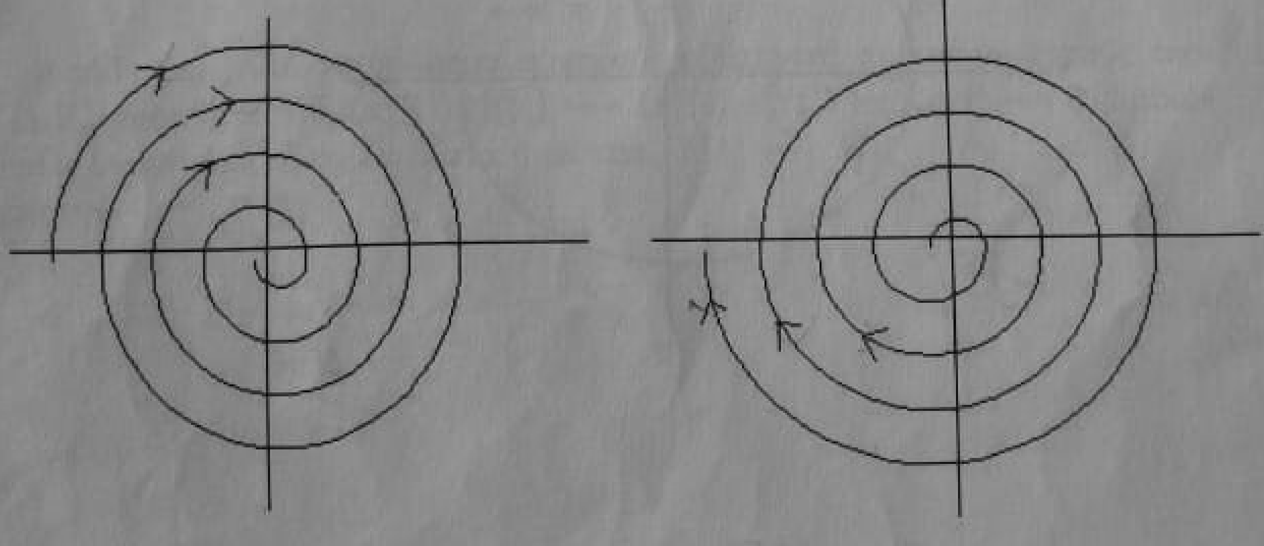
του οποίου όλες οι λύσεις είναι περιοδικές:



Σχ. 4Α

$$x_1^0(t) = A\cos(t - t_0)$$
$$x_2^0(t) = -A\sin(t - t_0)$$

Οι τροχιές του (14) εν γένει δεν είναι κλειστές και ενδέχεται να έχουμε τη μορφή ελικοειδούς με απόκλειση της τάξης του ε μεταξυ 2 διαδοχικών στροφών:



Σχ. 4Β

Για να αποφασίσουμε κατά πόσο η ελικοειδής λύση πλησιάζει ή απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων, θεωρούμε την ποσότητα (μηχανική ενέργεια)

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

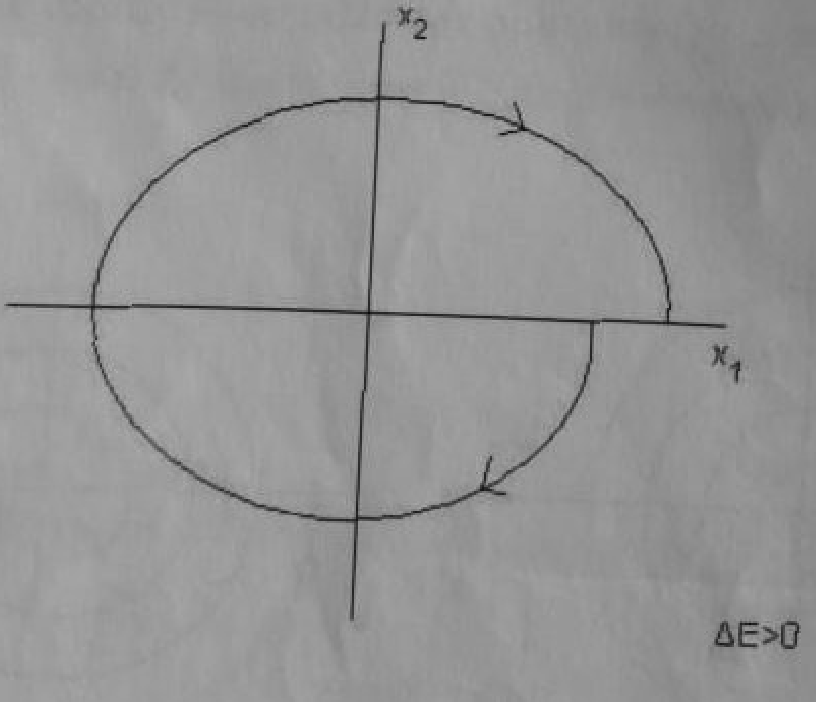
της οποίας τη μεταβολή κατά μήκος των λύσεων υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2)) + x_2(-x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_=2)) \\ &= \varepsilon(x_1 f_1(x_1, x_2) + x_2 f_2(x_1, x_2)) =: \varepsilon \dot{E}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

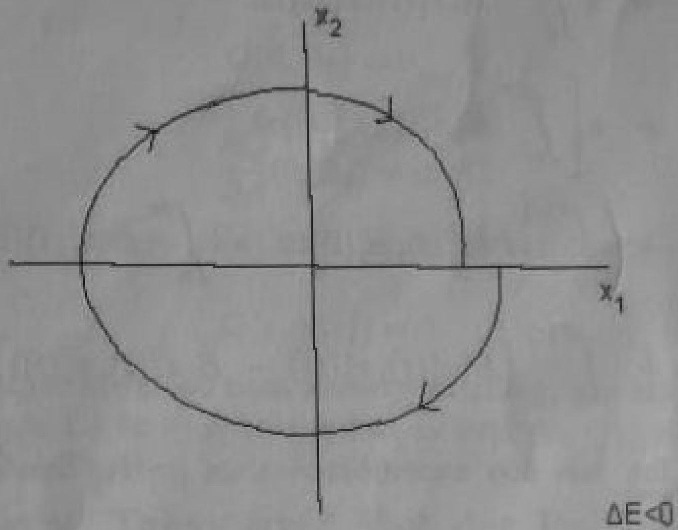
Ζητάμε πληροφορία για το πρόσημο της ποσότητας

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \varepsilon \dot{E}(x_1^\varepsilon(t), x_2^\varepsilon(t))dt =: \Delta E \qquad (16)$$

που αντιστοιχει στη μεταβολή της ~~μηχανικής~~ ενέργειας της $(x_1^\epsilon(t), x_2^\epsilon(t))$ κατά μια πλήρη "περιστροφή": $x_2^\epsilon(0) = x_2^\epsilon(T(\epsilon)) = 0$



Σχ. 4Γ.



Σχ. 5

Λήμμα 1.3

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A\cos(t-t_0), -A\sin(t-t_0))dt \ + \ o(\varepsilon). \qquad (17)$$

<u>**Συμβολισμός:**</u> Εξ' ορισμού, $o(\varepsilon)$ είναι ποσότητα που εξαρτάται από το ε και

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0.$$

[AK §2.4]

Απόδειξη. Από το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης από παραμέτρους των Σ.Δ.Ε. προκύπτει ότι $(x_1^\varepsilon(t), x_1^\varepsilon(t)) \longrightarrow (x_1^0(t), x_2^0(t))$ καθώς $\varepsilon \longrightarrow 0$, ομοιόμορφα στα συμπαγή του t. Κατά συνέπεια, $T(\varepsilon) \longrightarrow 2\pi$.
Από την

ε ×

ΣΔΕ

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \varepsilon \int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t))dt \\
&= \varepsilon \Bigg[\int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \\
&+ \left(\int_0^{T(\varepsilon)} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \; - \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \right) \\
&+ \int_0^{T(\varepsilon)} \left(\dot{E}(x_1^{\varepsilon}(t), x_2^{\varepsilon}(t)) \; - \; \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t)) \right) dt \Bigg].
\end{aligned}
\tag{18}
$$

λόγω ότι του $\lim_{\varepsilon \to 0}$ των δύο παρενθέσεων είναι μηδέν, από συνχή εξάρτηση προκύπτει η (17).

$\square$

Θέτουμε

$$F(A) := \int_0^{2\pi} \dot{E}(x_1^0(t), x_2^0(t))dt \tag{19}$$

και γράφουμε την (17) ως

$$\Delta E = \varepsilon \left[F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \tag{20}$$

Θεώρημα 1.4 *Έστω ότι η F έχει απλή ρίζα στο A_0.*

$$F(A_0) = 0 \quad F'(A_0) \neq 0$$

Τότε το (14) έχει περιοδική λύση πλάτους $A_0 + O(\varepsilon)$ για $|\varepsilon| << 1$.

Συμβολισμός: Το $O(\varepsilon)$ ~~είναι~~ παράσταση που εξαρτάται από το ε και για την οποία ισχύει η εκτίμηση $|O(\varepsilon)| < C|\varepsilon|$ ~~όπου C σταθερά ανεξάρτητη από το ε,~~ για $|\varepsilon| << 1$, όπου C μια σταθερά ανεξάρτητη του ε.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$Q(\epsilon, A) := F(A) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Η Q είναι C^1 (εδώ κάνουμε χρήση από Σ.Δ.Ε. της ομαλής εξάρτησης ως προς ε) και

$$Q(0, A_0) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial A}(0, A_0) \neq 0.$$

Μέσω του ΘΠΣ, υπάρχει $A(\varepsilon)$, $A(0) = A_0$, τέτοια ώστε

$$Q(\varepsilon, A(\varepsilon)) = 0.$$

Άρα το (14) έχει λύση που είναι κλειστή καμπύλη, άρα περιοδική. □ και σχ

Σχόλιο: Το Λήμμα 1.3 θα ήταν τετριμμένο αν αντί για $o(\varepsilon)$ είχαμε $O(\varepsilon)$.

1.3 Εφαρμογή: Ταλαντωτής Van der Pol [ηλεκτρικά κυκλώματα].

Θεωρούμε την εξίσωση

$-x$

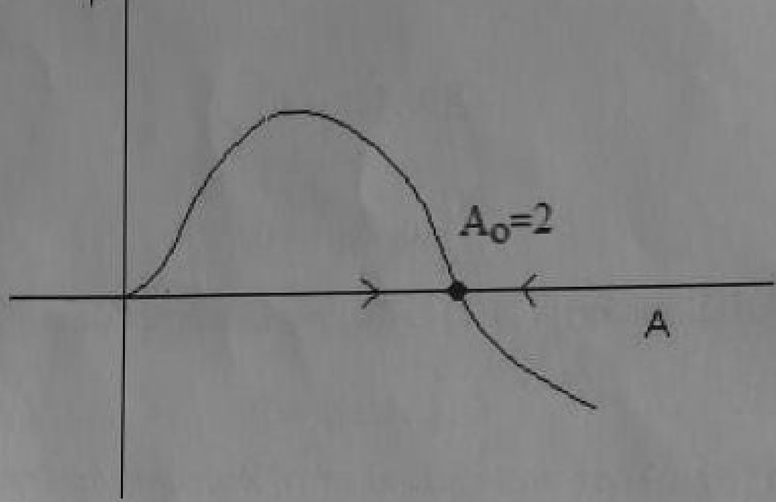
$$\ddot{x} = -x + \varepsilon\dot{x}(1 - x^2) \qquad (Van\ der\ Pol)$$

την οποία γράφουμε σε μορφή συστήματος θέτοντας $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon x_2(1 - x_1^2). \\ \dot{E}(x_1, x_2) &= x_2^2(1 - x_1^2) \end{aligned}$$

$$F(A) = \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t - t_0)(1 - A^2\cos^2(t - t_0))dt =$$

$$= \pi(A^2 - \frac{A^4}{4}).$$



Σχ. 6

Κατά συνέπεια η εξίσωση Van der Pol έχει περιοδική λύση για $|\varepsilon| << 1$ κοντά στην περιφέρεια $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Άσκηση 1.5 *Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση Duffing:* $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$. *Παίρνετε καμία πληροφορία;*

Άσκηση 1.6 *Εφαρμόστε τη μέθοδο στην εξίσωση:*
$\ddot{x} = -x + \varepsilon |\dot{x}|^p \dot{x}(1 - x^{2q})$.
όπου $p,\ q > 0$.
(i) (Χ. Ιωαχίμ) Για $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *και άρτιο* και $q \in \mathbb{N}$, η *εξίσωση έχει μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους*

$$x_1^2 + x_2^2 = \left[\frac{2.4...2q}{1.3...(2q-1)} \frac{2.4.6...(2q+p+2)}{2.4...p(p+2)}\right]^{\frac{1}{q}} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

X_2^2

(ii) (Χ. Ιωαχίμ) Για p, q *όπως στο (i), και επίσης* $p + 2 = 2q$ *έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους* $x_1^2 + x2^2 = 4 + O(\varepsilon)$,

X_2^2

~~*(iii) (Μπερκέτης) Για p, q όπως*~~ *στο ένα και* $\lim_{q \to \infty} \frac{4}{q} = 2$ *έχουμε μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο πλάτους* $x_1^2 + x2^2 = 4 + O(\varepsilon)$, $\varepsilon \longrightarrow 0$.

$q \in \mathbb{N}/\{0\}$.

Άσκηση 1.7 *Θεωρείστε την εξίσωση τύπου Van der Pol*

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon f(\dot{x})(1 - x^2)$$