

Χρήσιμα Θεωρήματα,

Θεώρημα 1

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ συνεχείς τ.μ με κοινή σ.η.η

$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και χώρο καταστάσεων $S_{X_1, X_2, \dots, X_n}$

Εστω $y_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ για $i=1, \dots, n$

1-1 μετασχηματισμός με αντίστροφο

$x_i = b_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ για $i=1, 2, \dots, n$

που αντιστοιχεί το $S_{X_1, X_2, \dots, X_n}$ στο $S_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}$

Τότε η κοινή σ.η των

$Y_i = a_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $i=1, 2, \dots, n$ δίνεται από

$$f_{Y_1, Y_2, \dots, Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{S_{X_1, X_2, \dots, X_n}} (b_1(y_1, \dots, y_n), \dots, b_n(y_1, \dots, y_n)) \cdot |J|$$

όπου J η Ιακωβιανή

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial b_1(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial b_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial b_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial b_n(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Θεώρημα 2

Εστω $T_1, T_2, \dots, T_n$ ανεξ. και ισόνομες τ.μ με κοινή συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_T(t)$

Εστω οι τ.μ $T(1) < T(2) < \dots < T(n)$

$r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$. Τότε η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $T(1), T(2), \dots, T(n)$ δίνεται από

$$f_{T(1), T(2), \dots, T(n)}(t_1, \dots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!} [1 - F_T(t_r)]^{n-r} \prod_{i=1}^r f_T(t_i)$$

για $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r$

Θεώρημα 3

Εστω $T_1, \dots, T_n$ ανεξ. & ισόνομες με $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, $\lambda > 0$

Εστω $T(1) < T(2) < \dots < T(n)$. Θετούμε $D_j = T(j) - T(j-1)$ $j=1, 2, \dots, n$
 $T(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$

Τότε

- (i) $D_1, \dots, D_n$ ανεξ. τ.μ
- (ii) $D_j \sim \exp((n-j+1)\lambda)$ $j=1, 2, \dots, n$
- (iii) $D_j^* = (n-j+1)D_j \sim \exp(\lambda)$ $j=1, 2, \dots, n$

Απόδειξη

Από Θ. 2 $f_{T(1), T(2), \dots, T(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = n! \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i}$
 για $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$

για $D_j = T(j) - T(j-1)$ $j=1, 2, \dots, n$

είναι 1-1 μετασχηματισμός από $T(j) = \sum_{i=1}^j D_i$ $j=1, 2, \dots, n$,

η Ιακωβιανή = 1

$$\left. \begin{aligned} \text{Είval } T(1) &= D_1 \\ T(2) &= D_1 + D_2 \\ &\vdots \\ T(n) &= D_1 + \dots + D_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \sum_{j=1}^n T(j) &= n D_1 + (n-1) D_2 + \dots + (n-j+1) D_j + \dots + D_n \\ &= \sum_{j=1}^n (n-j+1) D_j \end{aligned}$$

Οηότε από το 0.1

$$\begin{aligned} \int_{D_1, D_2, \dots, D_n} (d_1, d_2, \dots, d_n) &= n! \cdot \lambda^n e^{-\lambda \sum_{j=1}^n (n-j+1) d_j} \\ &= \prod_{j=1}^n (n-j+1) \lambda e^{-\lambda (n-j+1) d_j} \end{aligned}$$

$$\int_{D_j} (d_j) = (n-j+1) \lambda e^{-\lambda (n-j+1) d_j}$$

$$d_j > 0 \\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$\int_{D_1, D_2, \dots, D_n} (d_1, d_2, \dots, d_n) = \prod_{j=1}^n \int_{D_j} (d_j) \\ D_j \sim \exp((n-j+1)\lambda)$$

αποδείξτε το (i), (ii)

$$D_j^* = (n-j+1) D_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Ισχύει: T_i ανεξ. τ/ε και $T_i \sim \exp(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$
 τότε $T(1) = \min_i \{T_i\} \sim \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$ (αποδείξτε το)

Εάν $T_i \sim \exp(\lambda) \quad \forall i$ τότε $T(1) \sim \exp(n\lambda) \Rightarrow n T(1) \sim \exp(\lambda)$
 ή $D_1 \sim \exp(n\lambda)$ ή $n D_1 \sim \exp(\lambda)$

Παρατηρώ $D_2 = T(2) - T(1)$ ο ελάχιστος χρόνος για τα $1 \leq n$ βλαβή
 $n-1$ μηχανών άρα $D_2 \sim \exp((n-1)\lambda)$, με αυτό το συλλογισμό
 $D_j \sim \exp((n-i+1)\lambda)$

Δείξτε ότι αν $T_i \sim \exp(\lambda) \quad \forall i$

$D_1, \dots, D_n$ ανεξ. και $D_i \sim \underbrace{(n-i+1)\lambda}_{\lambda_i}$

Τότε
 $T = T(k) = D_1 + \dots + D_k \sim$ hypoexponential distribution
(Generalized Erlang distribution)

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

$$\hookrightarrow E(T(k)) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n-i+1)\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} \right)$$

$$V(T(k)) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i^2}$$

k out of n : G χρειάζεται το $T(n-k+1)$