

4/3/2020

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$

$R(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$

$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda$

$MTTF = E(T) = \frac{1}{\lambda}$

$V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

$R(MTTF) = P(T > MTTF) = R\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e^{-1}$

Θέωρημα 1: Έστω η τμ T έχει εκθετική κατανομή $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

Τότε για του υπολοίπου (residual) χρόνο ζωής:

$P(T > t+x | T > x) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$ ανεξάρτητη του x

Απόδειξη

$P(T > t+x | T > x) = \frac{R(t+x)}{R(x)} = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t}$

Θέωρημα 2

Έστω ότι η σωρότηση αξιοπιστίας R μιας μη σπυντικής (και μη επιθυμητής) τμ, η τμ ικανοποιεί τη σχέση $R(t+x) = R(t) \cdot R(x), \forall t \geq 0, \forall x \geq 0$, τότε η T ακολουθεί εκθετική κατανομή για κάποιο $\lambda > 0$.

$P(T > t+x | T > x) = \frac{P(T > t+x)}{P(T > x)} = P(T > t)$

Απόδειξη

Έστω ότι $c > 0, m, n$ θετικοί ακέραιοι, αφού $R(t+x) = R(t) \cdot R(x)$

$R(nc) = [R(c)]^n$ (*)

$R(c) = R\left(m \frac{c}{m}\right) = \left[R\left(\frac{c}{m}\right)\right]^m \Rightarrow R\left(\frac{c}{m}\right) = [R(c)]^{\frac{1}{m}}$ (**)

δεν παθαίνει ποτέ βλάβη

Θα δείξω ότι $0 \leq R(1) \leq 1$

• Έστω $R(1) = 1$, αφού $R(n) = [R(1)]^n$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = R(1) = 1$, T εκφυλισμένος

($P(T = \infty) = 1$)

• Έστω $R(1) = 0$, αφού $R\left(\frac{1}{m}\right) = [R(1)]^{\frac{1}{m}} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, λόγω του ότι είναι δεξιά συνεχής

$\rightarrow P(T=0) = 1$ εκφυλισμένη.

Επομένως, $0 \leq R(1) \leq 1$.

Μπορούμε να γράψουμε $R(1) = e^{-a}$, για $0 \leq a < \infty$

Από (*), $R\left(\frac{1}{m}\right) = [R(1)]^{\frac{1}{m}} = e^{-\frac{a}{m}}$

$$R\left(\frac{n}{m}\right) = [R(1)]^{\frac{n}{m}} = e^{-a \cdot \frac{n}{m}}$$

$$R(y) = e^{-ay}, \quad \forall y \text{ θετικό ρητό}$$

Αφού R δεξιά συνεχής, $R(y) = e^{-ay}, \quad \forall y \geq 0$

• Εάν οπν $P(t) = p a_1 e^{-a_1 t} + (1-p) a_2 e^{-a_2 t}$ μήνη 2 εκθετικών
Τότε $R(t) = p e^{-a_1 t} + (1-p) e^{-a_2 t}, \quad t \geq 0$

* ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

$$P(t) = \frac{a^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad a > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\rightarrow n=1$: εκθετική

• Μοντέλο που τη χρησιμοποιούμε

Έστω $X(t) = \# \text{ shock στο χρόνο } t$, $X(t)$ ανέλιξη Poisson.

$$P(X(\delta t) = 1) = a \delta t + o(\delta t)$$

$$P(X(\delta t) \geq 1) = o(\delta t)$$

$$P(X(\delta t) = 0) = 1 - a \delta t + o(\delta t)$$

$$P(X(t) = n) = e^{-at} \cdot \frac{(at)^n}{n!}$$

Έστω η μονάδα ξεκινά τη λειτουργία σε χρόνο t και αποσπώνται μόλις εμφανιστούν n shocks

$$R(t) = P(T > t) = P(X(t) < n) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-at} \cdot \frac{(at)^k}{k!} = e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!}$$

$$F(t) = -R'(t) = a e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} - e^{-at} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k \cdot k \cdot t^{k-1}}{k!}$$

$$= a e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} - a e^{-at} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(at)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= a e^{-at} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(at)^k}{k!} - a e^{-at} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(at)^k}{k!}$$

$$= a e^{-at} \cdot \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot e^{-at}$$

$T_1 \sim \text{Exp}(a), \dots, T_n \sim \text{Exp}(a)$ ανεξάρτητες $\oplus$

$\sum T_i \sim \Gamma(n, a) \equiv \text{Erlang}(n)$

[Αποδείξτε με ποσοδείκτες]

$\oplus$ Χρόνος ανάμεσα στα shocks

► Γενίκευση της Erlang είναι η Γάμμα, $\Gamma(a, a)$

$$\text{οππ } f(t) = \frac{a^a}{\Gamma(a)} \cdot t^{a-1} \cdot e^{-at}, \quad t \geq 0, a > 0, a \geq 0$$

Συνάρτηση Γάμμα

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx \quad \text{πρώτη συνάρτηση Γάμμα}$$

$$\Gamma(a, b) = \int_b^{\infty} x^{a-1} \cdot e^{-x} dx \quad \text{δευτήρη συνάρτηση Γάμμα.}$$

$$\Gamma(a, 0) = \Gamma(a)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$T \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda s} ds = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda s} ds \quad \begin{array}{l} \lambda s = u \\ ds = \frac{1}{\lambda} du \end{array}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{\lambda t}^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} \cdot \frac{-e^{-u}}{\lambda} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\lambda t}^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du \Rightarrow$$

$$R(t) = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}$$

► Βαθμίδα αποτυχίας

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda^\alpha \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}}{\frac{\Gamma(\alpha, \lambda t)}{\Gamma(\alpha)}} = \frac{\lambda^\alpha \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)}$$

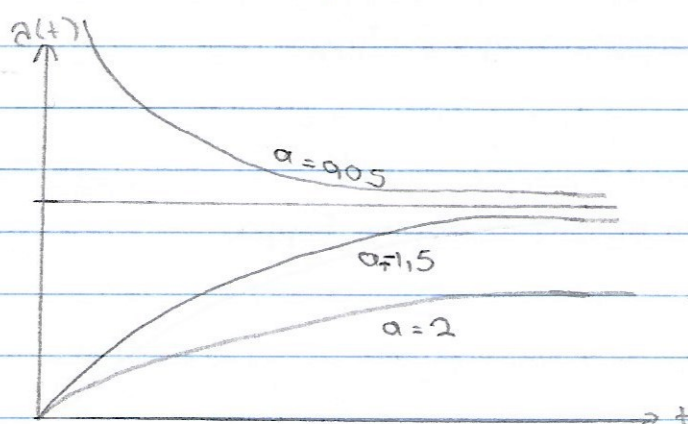
Αναπαράσταση

$$\lambda(t) = \frac{t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda t}}{\int_t^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} dx} = \frac{1}{\int_t^{\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda(x-t)} dx} \xrightarrow{x-t=y} \frac{1}{\int_0^{\infty} \left(1+\frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda u} du} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda$$

↳ αν $\alpha > 1$: $\lambda(t)$ αύξουσα, δηλαδή $T \in \text{IFR}$.

$\alpha < 1$: $\lambda(t)$ φθίνουσα, δηλαδή $T \in \text{DFR}$

$\alpha = 1$: $\lambda(t)$ σταθερά



* για $a = n \tau \pm$ (Erlang)

$$a(t) = \frac{a^n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-a t}}{(n-1)!} = \frac{a^n \cdot t^{n-1}}{(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a t)^k}{k!}} \Rightarrow a^{-1}(t) \text{ ποσώνυμο του } t$$

το οποίο έχει ορνητικές δυνάμεις
 $\hookrightarrow t^0, t^{-1}, \dots, t^{-(n-1)}$

$a^{-1}(t)$ decreasing function του t

$a(t)$ increasing $\rightarrow$ T Erlang IFB.

► $T \sim \Gamma(a, a)$

- $E(T^k) = \frac{(a+k-1)k}{a^k}$
- $MTTF = E(T) = \frac{a}{a}$
- $V(T) = \frac{a}{a^2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_n \\ \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2n} \end{array} \right.$$

Άσκηση

Εάν T_1, T_2 ανεξάρτητες και ίσונτες $t \sim \exp(a)$ με μέσο 1000
 να ορεθεί η μέση τιμή του $\min(T_1, T_2)$

$$a = \frac{1}{1000}$$

Έστω $Y = \min(T_1, T_2)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min(T_1, T_2) \leq y) = 1 - P(T_1 > y, T_2 > y) = 1 - P(T_1 > y)P(T_2 > y)$$

$$= 1 - [1 - F_{T_1}(y)]^2, \text{ όπου } F_{T_1}(y) = 1 - e^{-\frac{y}{1000}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{y}{500}}$$

$$Y \sim \exp\left(\frac{1}{500}\right) \text{ και } E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{500}} = 500$$

Άσκηση

Βρείτε την $R(t)$, $a(t)$

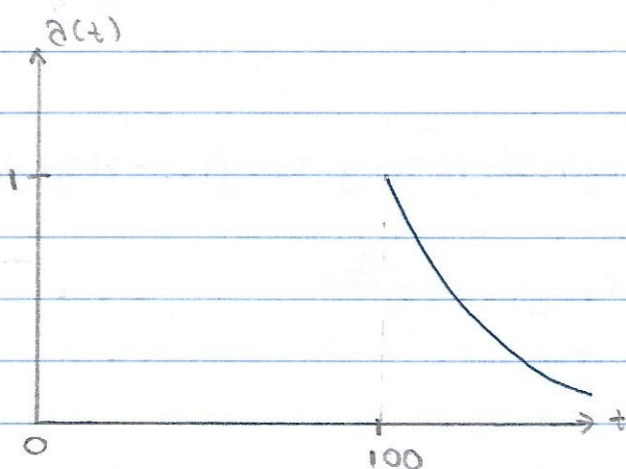
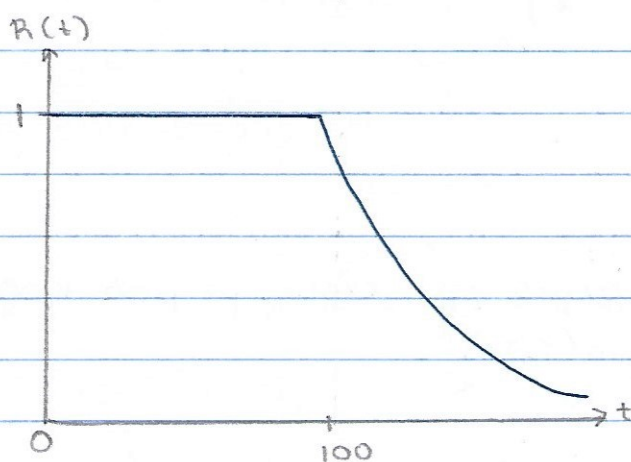
αν ο χρόνος είναι T

$$P(t) = \begin{cases} \frac{100}{t^2}, & t \geq 100 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{100}{s^2} ds = -\frac{100}{s} \Big|_t^{\infty} = \frac{100}{t}, \quad t \geq 100, \quad R(t) = 1, \quad t < 100$$

$$a(t) = 0, \quad t < 100$$

$$a(t) = \frac{P(t)}{R(t)} = \frac{\frac{100}{t^2}}{\frac{100}{t}} = \frac{1}{t}, \quad t \geq 100$$



61312020

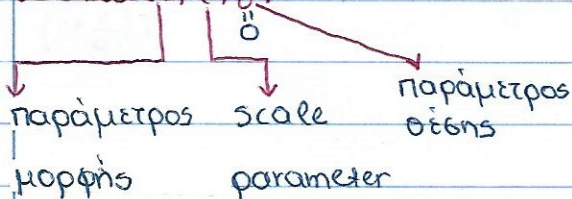
Weibul Distribution

1939

χρόνος ζωής

αποτυχίες που οφείλονται σε κόπωση

$Weibul(a, \lambda, \gamma)$



$W(a, \lambda)$

$$F(t) = P[T \leq t] = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda t)^a}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} a\lambda(\lambda t)^{a-1} e^{-(\lambda t)^a}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$R(t) = e^{-(\lambda t)^a}, \quad t \geq 0$$

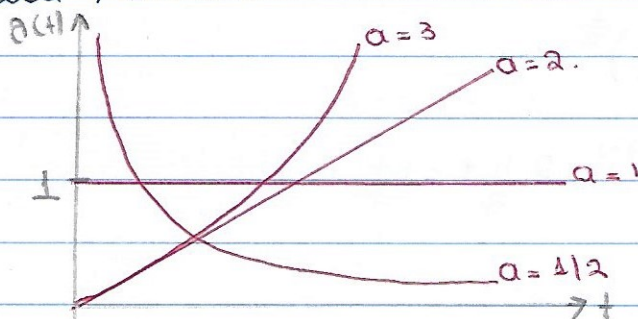
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = a\lambda(\lambda t)^{a-1}$$

▶ Αν $a = 1$: $\lambda(t) = \lambda$ σταθερή

▶ Αν $a > 1$: $\lambda(t)$ αύξουσα, $T \in \text{IFR}$

▶ Αν $0 < a < 1$: $\lambda(t)$ φθίνουσα, $T \in \text{DFR}$.

$a = 1$, $\lambda(t) = a\lambda(\lambda t)^{a-1}$



- $E(g(T))$

- $E(T^k) = \int_0^{\infty} g'(t) R(t) dt = \int_0^{\infty} k t^{k-1} e^{-(at)^a} dt \xrightarrow{(at)^a = x}$

$$t^a = \frac{x}{a^a} \Rightarrow t = \frac{x^{1/a}}{a}$$

$$\text{Άρα, } dt = \frac{1}{a} x^{\frac{1}{a}-1} dx$$

$$= \int_0^{\infty} k \cdot \frac{x^{\frac{k-1}{a}}}{a^{k-1}} \cdot e^{-x} \cdot \frac{1}{a} \cdot x^{\frac{1}{a}-1} dx = \frac{k}{a^k} \int_0^{\infty} x^{\frac{k}{a}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{k}{a} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{a^k} \Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right)$$

- $MTTF = E(T) = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)$

- $E(T^2) = \frac{1}{a^2} \Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right)$

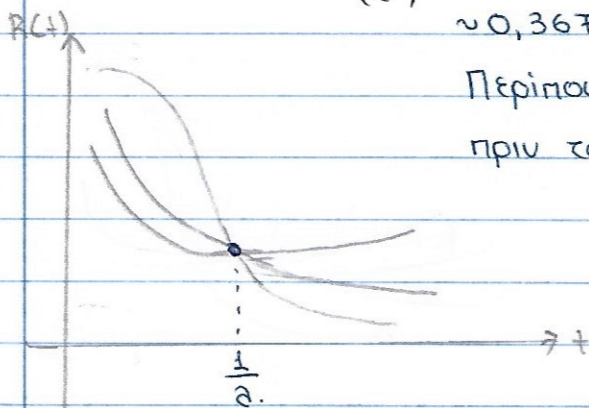
- $V(T) = E(T^2) - E^2(T) = \dots$

► $R\left(\frac{1}{a}\right)$ πιθανότητα του να ξεπεράσω τον μέσο χρόνο

$$R(t) = e^{-(at)^a} \Rightarrow R\left(\frac{1}{a}\right) = e^{-1} \text{ ανεξάρτητο του } a.$$

$$\sim 0,3679$$

Περίπου 37% των αποσχιών θα έχουν συμβεί πριν το $t = \frac{1}{a}$



- $Weibul(a, \lambda), a=2, \lambda = \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Rayleigh(k)

$$\lambda(t) = a \lambda (at)^{a-1} = 2 \left[\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 t^{2-1} = 2 \frac{k}{2} t = kt$$

(δένον)

$$\bullet F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \kappa t^2}$$

$$\bullet f(t) = \kappa t e^{-\frac{1}{2} \kappa t^2}$$

$$\bullet E(T) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}}$$

$$\bullet R_T(x)(t) = P(T_1 + t + x | T_1 + t) = \frac{P(T_1 + t + x)}{P(T_1 + t)} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \kappa (t+x)^2}}{e^{-\frac{1}{2} \kappa t^2}} = e^{-\frac{\kappa}{2} (t^2 + 2tx + x^2)} \quad , t \geq 0$$

$$\bullet E(T(x)) = \frac{1}{R(x)} \int_x^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2} \kappa x^2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \kappa t^2} dt \stackrel{\sqrt{\kappa} t = y}{=} \frac{1}{R(x)} \int_{\sqrt{\kappa} \cdot x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy =$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{R(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \int_{\sqrt{\kappa} \cdot x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \cdot \frac{1}{R(x)} \cdot [1 - \Phi(x\sqrt{\kappa})]$$

Παράδειγμα

Έστω μια συσκευή με χρόνο ζωής $W(a, 2)$, $a = \frac{1}{3}$, $2 = \frac{1}{16000}$ 62 hours⁻¹

Βρείτε MTTF και τη διάμεσο του χρόνου ζωής

Ποια περίοδο περιγράφει;

$$MTTF = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 16.000 \Gamma(4) = 16.000 \cdot 3!$$

$$tm \text{ διάμεσος} \Rightarrow R(tm) = 0,5$$

$$e^{-(2+tm)^a} = 0,5 \Rightarrow -(2+tm)^a = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow (2+tm)^a = \ln 2 \Rightarrow tm = \frac{(\ln 2)^{\frac{1}{a}}}{2}$$

Αφού $a < 1$ και έχω DFR, έχω βρεφική περίοδο (παράδειγμα μπουιέρας)