ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ

Γενικά.

Δίνουμε τους ακόλουθους γενικούς ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.1. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_i : X \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $f_i(x) \neq f_i(y)$. Με $(X, \mathcal{F})$ συμβολίζουμε την ελάχιστη τοπολογία πάνω στον X που κάνει όλες τις συναρτήσεις f_i συνεχείς.*

Το ακόλουθο λήμμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη διανυσματικών χώρων.

ΛΗΜΜΑ 0.2. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $g, f_1, f_2, ..., f_n$ γραμμικές συναρτήσεις από τον X στο $\mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $\bigcap_{i=1}^n Kerf_i \subseteq Kerg$.

(2) *Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι σαφές ότι (2) $\Rightarrow$ (1). Για να δείξουμε το αντίστροφο θεωρούμε την συνάρτηση $\pi : X \to \mathbb{R}^n$ με

$$\pi(x) = \big(f_1(x), ..., f_n(x)\big).$$

Είναι προφανές ότι η π είναι γραμμική συνάρτηση. Συνεπώς το σύνολο $\pi(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $F : \pi(X) \to \mathbb{R}$, με

$$F\big(\pi(x)\big) = g(x).$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι αν $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ τότε $g(x_1) = g(x_2)$. Συνεπώς η F είναι καλά ορισμένη. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$g(x) = F\big(\pi(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$$

για κάθε $x \in X$. $\square$

Το επόμενο θεώρημα είναι το βασικό εργαλείο για την κατασκευή τοπικά κυρτών, τοπολογικών διανυσματικών χώρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.3. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subseteq X^\sharp$ τέτοιο ώστε το Γ να διαχωρίζει τα σημεία του X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(1) *Για κάθε $x \in X$, $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ θέτουμε*

$$W(x, A, \varepsilon) = \big\{y \in X \ : \ |f(y) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall f \in A\big\}.$$

Τότε τα σύνολα $W(x, A, \varepsilon)$ αποτελούν μια βάση περιοχών της τοπολογίας (X, Γ).

(2) *Ο (X, Γ) είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

(3) *Ο* (X, Γ) *είναι τοπικά κυρτός και Hausdorff.*
(4) *Έχουμε ότι* $(X, \Gamma)^* = \langle \Gamma \rangle$.

Αποδειξη. Τα (1), (2) και (3) αφήνονται σαν άσκηση. Για το (4) παρατηρούμε καταρχάς ότι $(X, \Gamma)^* \supseteq \langle \Gamma \rangle$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $g \in (X, \Gamma)^*$. Αφού το g είναι συνεχές, θα υπάρχει V ανοιχτή περιοχή του 0, τέτοια ώστε το $g(V)$ να είναι φραγμένο. Άρα θα υπάρχει και βασική ανοιχτή περιοχή W του 0 τέτοια ώστε το $g(W)$ να είναι φραγμένο. Από το (1), υπάρχουν $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq \Gamma$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε $W = W(0, A, \varepsilon)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αφού το $g(W)$ είναι φραγμένο υποσύλο του $\mathbb{R}$, θα ισχύει ότι $\cap_{i=1}^{n} Ker f_i \subseteq Ker g$. Από το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε ότι το g είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του A και άρα $g \in \langle \Gamma \rangle$. □

Η ασθενής τοπολογία ενός χώρου Banach.

Σε ότι ακολουθεί με X συμβολίζουμε ένα χώρο Banach.

Ορισμος 0.4. *Η ασθενής τοπολογία ενός χώρου Banach* X *είναι η ελάχιστη τοπολογία πάνω στον* X *που κάνει τα στοιχεία του* X^* *συνεχή. Με βάσει τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου η ασθενής τοπολογία είναι η* (X, X^*).

Εν γένει, για ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο, ο τοπολογικός δυϊκός μπορεί να είναι πολύ μικρός (πιθανώς και τετριμένος) και να μην διαχωρίζει τα σημεία του χώρου. Παρόλαυτά για χώρους Banach έχουμε το ακόλουθο.

Ασκηση 0.5. Έστω X χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.

Συνεπώς από το Θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι κάθε χώρος Banach εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία γίνεται ένας τοπικά κυρτός, Hausdorff, τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Η ασθενής τοπολογία όμως παρουσιάζει σημαντικές παθογένειες.

Προταση 0.6. *Έστω* X *απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε ο* X *με την ασθενή τοπολογία δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμος.*

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ήταν. Τότε ο X θα είχε αριθμήσιμη βάση ασθενών περιοχών του 0, έστω η $(W_n)_n$. Από τον χαρακτηρισμό των βασικών περιοχών της ασθενής τοπολογίας, υπάρχουν $A_n \subseteq X^*$ πεπερασμένα και $(\varepsilon_n)_n$ με $\varepsilon_n > 0$ για κάθε n, τέτοια ώστε $W_n = W(0, A_n, \varepsilon_n)$. Έστω $g \in X^*$ τυχαίο. Αφού το g είναι (εξ' ορισμού) συνεχές για την ασθενή τοπολογία, υπάρχει βασική ασθενώς ανοιχτή περιοχή V του 0, τέτοια ώστε το $g(V)$ να είναι φραγμένο. Από την υπόθεση μας λοιπόν, θα υπαρχει και $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $g(W_k)$ να είναι φραγμένο. Έστω $A_k = \{f_1, ..., f_l\}$ να είναι το πεπερασμένο υποσύνολο του X^* που αντιστοιχεί στο W_k. Αφού το $g(W_k)$ είναι φραγμένο, εύκολα καταλήγουμε στο ότι $\cap_{i=1}^{l} Kerf_i \subseteq Kerg$. Συνεπώς το g είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του A_k. Θέτουμε $A = \cup_n A_n$. Από την παραπάνω συζήτηση, έχουμε ότι $X^* \subseteq \langle A \rangle$. Επιπλέον, από το (4) του Θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου, καταλήγουμε ότι $X^* = \langle A \rangle$. Αλλά το σύνολο A είναι αριθμήσιμο, πράγμα που σημαίνει ότι ο X^* έχει μια αριθμήσιμη Hamel βάση. Άτοπο γιατί ο X είναι απειροδιάστατος. □

Είναι σαφές ότι η ασθενής τοπολογία περιέχει λιγότερα ανοιχτά (άρα και κλειστά) σύνολα από την νορμ τοπολογία του X. Στην περίπτωση των απειροδιάστατων χώρων Banach η ασθενής τοπολογία περιέχει αυστηρώς λιγότερα ανοιχτά. Η επόμενη όμως άσκηση δείχνει πως αρκετά κλειστά υποσύνολα του X παραμένουν και ασθενώς κλειστά.

Άσκηση 0.7. Δείξτε ότι για κάθε χώρο Banach X, κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο C του X είναι και ασθενώς κλειστό.

Από την άλλη έχουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 0.8. Θα δείξουμε ότι για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X ισχύει ότι

$$\overline{S_X}^w = \overline{B(0,1)}$$

όπου με $\overline{S_X}^w$ συμβολίζουμε την κλειστότητα της σφαίρας του X στην ασθενή τοπολογία (όπως συνήθως $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ και $\overline{B(0,1)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$). Πράγματι, αφού κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X είναι και ασθενώς κλειστό έχουμε άμεσα ότι

$$\overline{S_X}^w \subseteq \overline{B(0,1)}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $x \in X$ με $\|x\| < 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε βασική ασθενής περιοχή W του x ισχύει ότι $W \cap S_X \neq \varnothing$. Έστω λοιπόν $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $W = W(x, A, \varepsilon)$.

Άσκηση 0.9. Δείξτε ότι $Y = \bigcap_{i=1}^{n} Kerf_i \neq \varnothing$. Ποιά είναι η διάσταση του Y;

Επιλέγουμε $y \in Y$ με $y \neq 0$ (από την άσκηση τέτοιο y υπάρχει). Η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $h(t) = \|x + ty\|$ είναι συνεχής (γιατί;) και $h(0) = \|x\| < 1$ ενώ $\lim_{t \to \infty} h(t) = +\infty$. Συνεπώς υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(t_0) = \|x + t_0 y\| = 1$. Τότε $x + t_0 y \in S_X$. Υπενθυμίζουμε ότι $y \in \cap_{i=1}^{n} Kerf_i$ και άρα $f_i(y) = 0$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Συνεπώς $x + t_0 y \in W(x, A, \varepsilon)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν εφοδιάσουμε τον X με την ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία της σφαίρας του X^* συνεχή, τότε η τοπολογία αυτή είναι η ίδια με την ασθενή τοπολογία. Όμως αν D είναι ένα νορμ πυκνό υποσύνολο του X^* με $\langle D \rangle \neq X^*$, τότε η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του D συνεχή είναι *αυστηρά* μικρότερη από την ασθενή τοπολογία (αυτό είναι πόρισμα του Θεωρήματος της πρώτης παραγράφου). Παρόλαυτά για τα φραγμένα υποσύνολα του X, οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.10. *Έστω X χώρος Banach και D ένα νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*. Τότε για κάθε B φραγμένο υποσύνολο του X, οι σχετικές ασθενής και (X, D) τοπολογίες πάνω στο B ταυτίζονται.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι σαφές ότι η (X, D) τοπολογία πάνω στο B είναι μικρότερη από τη σχετική ασθενή τοπολογία πάνω στο B. Για να δείξουμε λοιπόν ότι αυτές ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε W βασικό ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο του B υπάρχει W' ανοιχτό για την (X, D) τοπολογία του X τέτοιο ώστε $(W' \cap B) \subseteq (W \cap B)$.

Έστω λοιπόν $x \in B$, $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την περιοχή

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap B = \{y \in B : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, ..., n\}.$$

Θέτουμε $c = \sup\{\|x\| : x \in B\} < +\infty$. Αφού το D είναι νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*, επιλέγουμε $g_1, ..., g_n \in D$ τέτοια ώστε

$$\|f_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{3c}$$

για κάθε $i = 1, ..., n$. Θέτουμε $A' = \{g_1, ..., g_n\} \subseteq D$ και

$$W' = W\Big(x, A', \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cap B = \Big\{y \in B : |g_i(y) - g_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad i = 1, ..., n\Big\}.$$

Τότε η W' είναι μια σχετική (X, D)-ανοιχτή περιοχή του B. Επιπλέον αν $y \in W'$ τότε για κάθε $i = 1, ..., n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_i(y) - f_i(x)| &= |f_i(y) - g_i(y) + g_i(y) - g_i(x) + g_i(x) - f_i(x)| \\ &\leq |f_i(y) - g_i(y)| + |g_i(y) - g_i(x)| + |g_i(x) - f_i(x)| \\ &\leq \|f_i - g_i\|\|y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|g_i - f_i\|\|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c}c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $y \in W$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θα περάσουμε τώρα στη μελέτη της ασθενής σύγκλισης ακολουθιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.11. *Έστω $(x_n)_n$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα $x \in X$ αν για κάθε ασθενώς ανοιχτή περιοχή W του x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n \in W$ για κάθε $n \geq n_0$. Την ασθενή σύγκλιση θα τη συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Η επόμενη πρόταση δείνει πολύ χρήσιμους χαρακτηρισμούς της ασθενής σύγκλισης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.12. *Έστω X χώρος Banach, $(x_n)_n$ ακολουθία στον X, $x \in X$ και D νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(2) *Για κάθε* $x^* \in X^*$, *έχουμε* $x^*(x_n) \to x^*(x)$.
(3) *Για κάθε* $x^* \in B_{X^*}(0,1)$, *έχουμε* $x^*(x_n) \to x^*(x)$.
(4) *Η* $(x_n)_n$ *είναι φραγμένη και* $x^*(x_n) \to x^*(x)$ *για κάθε* $x^* \in D$.

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των (1), (2) και (3) είναι απλή και αφήνεται σαν άσκηση. Για την συνεπαγωγή (1) $\Rightarrow$ (4) αρκεί να δείξουμε μόνο ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Για κάθε n, θέτουμε $\hat{x}_n \in X^{**}$ με

$$\hat{x}_n(x^*) = x^*(x_n).$$

Από το θεώρημα Hanh-Banach έχουμε ότι $\|\hat{x}_n\| = \|x_n\|$. Από την (2) έχουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$

$$\sup |\hat{x}_n(x^*)| < \infty.$$

Συνεπώς από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, έχουμε ότι

$$\sup \|\hat{x}_n\| = \sup \|x_n\| < \infty,$$

δηλαδή η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη. Η αντίστροφη συνεπαγωγή (4) $\Rightarrow$ (1), προκύπτει από το γεγονός ότι το σύνολο $B = \{x\} \cup \{x_n\}_n$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Συνεπώς, στο B η ασθενής τοπολογία καθορίζεται από το νορμ πυκνό υποσύνολο D (οι λεπτομέριες και τα ακριβή επιχειρήματα αφήνονται σαν άσκηση). □

Άσκηση 0.13. Έστω $1 < p < \infty$ και $(e_n)_n$ η κανονική βάση του $\ell_p(\mathbb{N})$. Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$. Τι συμβαίνει όταν $p = 1$;

Άσκηση 0.14. Υποθέστε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ και $x_n^* \to x^*$. Δείξτε ότι $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$. Βρείτε παράδειγμα στον $\ell_2(\mathbb{N})$ όπου $x_n \xrightarrow{w} 0$, $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ αλλά $x_n^*(x_n) \nrightarrow 0$.

Άσκηση 0.15. Δείξτε ότι αν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος).

Διαχωρίσιμοι χώροι και ασθενής τοπολογία.

Όπως έχουμε δει, η ασθενής τοπολογία δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμη. Παρολαυτά για χώρους Banach που έχουν διαχωρίσιμο δυϊκό έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 0.16. *Έστω X χώρος Banach τέτοιος ώστε ο X^* να είναι διαχωρίσιμος. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D = (x_n^*)_n$ της μπάλας του X^* (δηλαδή $\|x^*\| \leq 1$ για κάθε $x^* \in D$). Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n}.$$

Άσκηση 0.17. Δείξτε ότι η ρ είναι μια μετρική πάνω στη $\overline{B_X}$.

Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X εφοδιασμένη με την μετρική ρ είναι ένας μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι η ασθενής τοπολογία πάνω στην $\overline{B_X}$ ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγει η μετρική ρ. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1. Έστω W βασική ασθενώς ανοιχτή σχετική περιοχή της $\overline{B_X}$. Τότε υπάρχουν $x \in \overline{B_X}$, $A = \{y_1^*, ..., y_k^*\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap \overline{B_X} = \{y \in \overline{B_X} : |y_i^*(y) - y_i^*(x)| < \varepsilon \;\; i = 1, ..., k\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|y_i^*\| \leq 1$ για κάθε $i = 1, ..., k$. Πράγματι θέτουμε $c = \max \|y_i^*\|$ και θεωρούμε τα σύνολο $A' = \{\frac{y_1^*}{c}, ..., \frac{y_k^*}{c}\}$. Τότε $\left\|\frac{y_i^*}{c}\right\| \leq 1$ και

$$W'\Big(x, A', \frac{\varepsilon}{c}\Big) = W(x, A, \varepsilon).$$

Αφού το σύνολο D είναι πυκνό στη μπάλα του X^*, επιλέγουμε στοιχεία $x_{n_1}^*, ..., x_{n_k}^* \in D$ τέτοια ώστε $\|y_i^* - x_{n_i}^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $i = 1, ..., k$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε

$$V = \{y \in \overline{B_X} : \rho(y, x) < r\}.$$

Τότε $V \subseteq W$. Πράγματι, αν $\rho(y, x) < r$ τότε για κάθε $i = 1, ..., k$ έχουμε

$$\frac{|x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x)|}{2^{n_i}} < r$$

και άρα

$$\begin{aligned} |y_i^*(y) - y_i^*(x)| &= |y_i^*(y) - x_{n_i}^*(y) + x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x) + x_{n_i}^*(x) - y_i^*(x)| \\ &\leq 2\|y_i^* - x_{n_i}^*\| + |x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2^{n_i} r < \varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, ..., k$.

Βήμα 2. Έστω $x \in \overline{B_X}$. Για δεδομένο $r > 0$, θεωρούμε το σύνολο $V = \{y \in \overline{B_X} : \rho(y, x) < r\}$. Αρκεί να βρούμε ασθενώς ανοιχτή περιοχή W του x τέτοια ώστε $W \cap \overline{B_X} \subseteq V$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon < \frac{r}{2}$ και $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$. Για αυτά τα ε, k θέτουμε $A = \{x_i^*\}_{i=1}^k \subseteq D$ και ορίζουμε

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap \overline{B_X} = \{y \in \overline{B_X} : |x_i^*(y) - x_i^*(x)| < \varepsilon \;\; i = 1, ..., k\}.$$

Τότε $W \subseteq V$. Πράγματι αν $y \in W$ τότε

$$\begin{aligned}\rho(y,x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}|x_i^*(y)-x_i^*(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}|x_i^*(y)-x_i^*(x)| + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}|x_i^*(y)-x_i^*(x)| \\ &< \varepsilon + 2\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i} < r\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $y \in V$.

Με την ολοκλήρωση και του δεύτερου βήματος η απόδειξη τελείωσε. □

Η ασθενής* τοπολογία.

Όπως έχουμε δει, κάθε χώρο Banach X μπορούμε να τον εμφυτεύσουμε στον δεύτερο δυϊκό του, μέσω της κανονικής εμφύτευσης. Συνεπώς, στον X^* έχουμε μία ακόμα πολύ ενδιαφέρουσα τοπολογία, αυτή που επάγει ο X πάνω στον X^* (για να είμαστε ακριβείς, μιλάμε για την τοπολογία που επάγει ο $\hat{X}$ στον X^*, όπου $\hat{X}$ η εικόνα του X μέσω της κανονικής εμφύτευσης). Ας δώσουμε τον ακριβή ορισμό.

Ορισμος 0.18. *Η ασθενής* τοπολογία ενός δυϊκού χώρου Banach X^* είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του X συνεχή.*

Η επόμενη άσκηση είναι αρκετά απλή.

Ασκηση 0.19. Δείξτε ότι ο X διαχωρίζει τα σημεία του X^*.

Με βάση λοιπόν το θεώρημα της πρώτης παραγράφου, έχουμε ότι ο X^* με την ασθενή* τοπολογία είναι ένας τοπικά κυρτός, Hausdorff, τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Η ασθενής* τοπολογία του X^* είναι αυστηρά μικρότερη της ασθενής τοπολογίας όταν ο δεύτερος δυϊκός X^{**} του X είναι μεγαλύτερος από τον $\hat{X}$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, κάθε $x^{**} \in X^{**} \setminus \hat{X}$ *δεν είναι συνεχές για την ασθενή* τοπολογία*, ενώ είναι συνεχές για την ασθενή τοπολογία και κατά μείζονα λόγο για την νορμ. Επιπλέον, είναι εύκολο να δει κάνείς ότι δεν είναι όλα τα κλειστά, κυρτά υποσύνολα του X^* και ασθενώς* κλειστά.

Η ασθενής* σύγκλιση ακολουθιών ορίζεται ακριβώς όπως και στη περίπτωση της ασθενής τοπολογίας. Αν $(x_n^*)_n$ είναι μια ακολουθία που συγκλίνει ασθενώς* σε ένα $x^* \in X^*$ τότε την ασθενώς* σύγκλιση της $(x_n^*)_n$ στο x^* τη συμβολίζουμε με $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Κατ' αντιστοιχία με την ασθενή τοπολογία έχουμε και την ακόλουθη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Προταση 0.20. *Έχουμε ότι $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_n^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Ασκηση 0.21. Δείξτε ότι η ασθενής σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή* σύγκλιση. Επιπλέον δείξτε ότι αν $x_n^* \xrightarrow{w*} x^*$ τότε η ακολουθία $(x_n^*)_n$ είναι φραγμένη και $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεώρημα του ομοιόμορφου φράγματος).

Η ασθενής* τοπολογία δεν είναι και αυτή μετρικοποιήσιμη (γιατί;). Εν τούτοις έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο είναι και το δυϊκό ανάλογο του Θεωρήματος 0.16.

Θεωρημα 0.22. *Αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε η $\overline{B_{X^*}}$ εφοδιασμένη με την ασθενή* τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.*

Αποδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 0.16 και αφήνεται σαν άσκηση.

(Υπόδειξη: αν $D = (x_n)_n$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του X, ορίστε

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{2^n}$$

και αφού αποδείξετε ότι είναι μετρική, δείξτε ότι παράγει την ασθενή* τοπολογία). □

Η μεγάλη χρησιμότητα των ασθενών τοπολογιών βρίσκεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεωρημα 0.23 (L. Alaouglou). *Έστω X χώρος Banach. Τότε η $\overline{B_{X^*}}$ εφοδιασμένη με την ασθενή* τοπολογία είναι συμπαγής χώρος.*

Μία απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος για την ειδική (πλην όμως εξαιρετικά σημαντική) περίπτωση των διαχωρίσιμων αυτοπαθών χώρων θα δώσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Αυτοπαθείς χώροι.

Υπενθυμίζουμε και πάλι ότι κάθε χώρος Banach X εμφυτεύεται ισομετρικά στον δεύτερο δυϊκό του μέσω της κανονικής εμφύτευσης.

Ορισμος 0.24. *Ένας χώρος Banach X καλείται αυτοπαθής αν $X^{**} = \hat{X}$.*

Παρατηρηση 0.25. Στην ελληνική βιβλιογραφία είναι συνήθης και ο όρος ανακλαστικός. Ο αγγλικός όρος είναι reflexive.

Πρέπει να τονίσουμε ότι *απαιτούμε στον ορισμό της αυτοπάθειας ο X^{**} να ταυτίζεται με τον X μέσω της κανονικής εμφύτευσης*. Υπάρχουν παραδείγματα μη αυτοπαθών χώρων Banach οι οποίοι είναι ισομετρικά ισομορφικοί με τον δεύτερο δυϊκό τους.

Τυπικά παραδείγματα απειροδιάστατων αυτοπαθών χώρων Banach είναι οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$ για $1 < p < \infty$. Οι χώροι $c_0(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N})$ και $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι.

Πρόταση 0.26. *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε από γνωστή πρόταση και ο X θα είναι. Αντίστροφα αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X^{**} θα είναι, αφού είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X. Άρα και ο X^*. $\square$

Βασικός σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το παρακάτω εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 0.27. *Έστω X ένας αυτοπαθής και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε η $\overline{B_X}$ με την ασθενή τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 0.26 έχουμε ότι και ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Επιλέγουμε $D = (x_m^*)_m$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Από το Θεώρημα 0.16, έχουμε ότι η $\overline{B_X}$ εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι μετρικός χώρος. Για να δείξουμε λοιπόν ότι είναι και συμπαγής, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθιακά συμπαγής. Δηλαδή για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στη μοναδιαία μπάλα του X, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ και υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε η ακολουθία $\big(x^*(x_{n_k})\big)_k$ να είναι Cauchy για κάθε $x^* \in D$. Έστω λοιπόν $D = (x_m^*)_m$. Για $m = 1$, η ακολουθία $\big(x_1^*(x_n)\big)_n$ είναι φραγμένη (υπενθυμίζουμε ότι η $\|x_n\| \leq 1$ για κάθε n). Άρα υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο τέτοιο ώστε η ακολουθία $\big(x_1^*(x_n)\big)_{n\in M_1}$ να είναι Cauchy. Για $m = 2$, η ακολουθία $\big(x_2^*(x_n)\big)_{n\in M_1}$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο τέτοιο ώστε η ακολουθία $\big(x_2^*(x_n)\big)_{n\in M_2}$ να είναι Cauchy. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία $(M_m)_m$ απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $\big(x_m^*(x_n)\big)_{n\in M_m}$ να είναι Cauchy για κάθε m. Η τελική ακολουθία επιλέγεται ως εξής. Θέτουμε $n_1 = \min M_1$. Επιλέγουμε $n_2 \in M_2$ με $n_1 < n_2$ (αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί το M_2 είναι άπειρο). Εν γένει, αν τα $n_1 < ... < n_{m-1}$ έχουν επιλεγεί, επιλέγουμε $n_m \in M_m$ τέτοιο ώστε $n_1 < ... < n_{m-1} < n_m$. Θέτουμε $L = (n_m)_m$. Η υπακολουθία $(x_n)_{n\in L}$ της $(x_n)_n$ είναι η ζητούμενη.

Βήμα 2. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, θα συμβολίζουμε με $(y_n)_n$ την υπακολουθία της $(x_n)_n$ του βήματος 1. Σε αυτό το βήμα θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\big(x^*(y_n)\big)_n$ είναι Cauchy για κάθε $x^* \in X^*$. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε γιατί το σύνολο D είναι πυκνό υποσύνολο του X^*. Πράγματι έστω $x^* \in X^*$ τυχαίο και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $y^* \in D$ τέτοιο ώστε $\|x^* - y^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επιπλέον, αφού $y^* \in D$, η ακολουθία $\left(y^*(y_n)\right)_n$ είναι Cauchy. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|y^*(y_n) - y^*(y_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αλλά τότε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |x^*(y_n) - x^*(y_m)| &\leq |x^*(y_n) - y^*(y_n)| + |y^*(y_n) - y^*(y_m)| + \\ &\quad + |y^*(y_m) - x^*(y_m)| \\ &\leq 2\|x^* - y^*\| + |y^*(y_n) - y^*(y_m)| < \varepsilon \end{aligned}$$

όπως επιθυμούσαμε.

Έχοντας ολοκληρώσει και το βήμα 2, ορίζουμε $f : X^* \to \mathbb{R}$ με

$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} x^*(y_n).$$

Από το βήμα 2, έχουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη.

Βήμα 3. Θα δείξουμε ότι $f \in X^{**}$ και $\|f\| \leq 1$. Είναι σαφές ότι η f είναι γραμμική. Το ότι η f είναι και φραγμένη έπεται άμεσα από το θεώρημα του ομοιόμορφου φράγματος. Πράγματι παρατηρήστε ότι $\hat{y}_n(x^*) \to f(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$ (ισοδύναμα $\hat{y}_n \xrightarrow{w*} f$). Άρα $\|f\| \leq \liminf \|\hat{y}_n\| = \liminf \|y_n\| \leq 1$.

Βήμα 4. Υπάρχει $x \in \overline{B_X}$ τέτοιο ώστε $y_n \xrightarrow{w} x$. Από το βήμα 3 υπάρχει υπάρχει $f \in X^{**}$ με $\|f\| \leq 1$, τέτοιο ώστε $x^*(y_n) \to f(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Από την αυτοπάθεια του X, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$, τέτοιο ώστε $\hat{x} = f$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x^*) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και $\|x\| = \|f\| \leq 1$. Συνεπώς $x \in \overline{B_X}$ και $x^*(y_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Από τις ιδιότητες της ασθενής σύγκλισης ακολουθιών, καταλήγουμε ότι $y_n \xrightarrow{w} x$, όπως επιθυμούσαμε.

Από τα βήματα 1, 2, 3 και 4 η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$