ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ 3/2/2022

Θέμα 1^{ον} Λύστε την εξίσωση $\cos z = i$ ως προς $z \in \mathbb{C}$.

Απάντηση Επειδή $2\cos z = e^{iz} + e^{-iz}$, η εξίσωση $\cos z = i$ γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2i \;\Leftrightarrow\; (e^{iz})^2 - 2ie^{iz} + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} = i \pm \sqrt{-2} = i(1 \pm \sqrt{2}).$$

Η εξίσωση $e^{iz} = i(1+\sqrt{2})$ δίνει τις λύσεις

$$iz = \log[i(1+\sqrt{2})] + 2k\pi i \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{i}\log(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Η εξίσωση $e^{iz} = i(1-\sqrt{2})$ δίνει τις λύσεις

$$iz = \log[-i(\sqrt{2}-1] + 2k\pi i \;\Leftrightarrow\; z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ όπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Θέμα 2^{ον} Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \left[\frac{1}{z^2}\cos\left(iz + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(z^3 + \frac{\pi}{6}\right)\right]dz$$

όπου γ είναι η καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο με παραμετρική εξίσωση

$$z(t) = 3\cos t + 5i\sin t,\; 0 \le t \le 2\pi.$$

Απάντηση Θέτοντας $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\cos\left(iz + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(z^3 + \dfrac{\pi}{6}\right)$, παρατηρούμε ότι $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ με πόλο τάξης 2 στο $z = 0$. Άρα, από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(f,0)\delta_\gamma(0).$$

Υπολογίζουμε το $Res(f,0)$. Έχουμε

$$Res(f,0) = \left(\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right]\right)\Bigg|_{z=0} = \left(\frac{d}{dz}\left[\cos\left(iz + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(z^3 + \frac{\pi}{6}\right)\right]\right)\Bigg|_{z=0} = -i\sin(\pi/6)\cos(\pi/6) = -i\sqrt{3}/4.$$

Η καμπύλη γ είναι έλλειψη με το σημείο 0 στο εσωτερικό της, όθεν $\delta_\gamma(0) = 1$.

Συνεπώς

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(-i\sqrt{3}/4)\cdot 1 = \pi\sqrt{3}/2.$$

Θέμα 3^{ον} Για κλειστές ομαλές καμπύλες γ στο μιγαδικό επίπεδο, οι οποίες δεν διέρχονται από τα σημεία 0 και 1, ποιές είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{(e^{7z}-1)dz}{z^2(z-1)};$$

Απάντηση Η συνάρτηση $f(z) := \dfrac{e^{7z}-1}{z^2(z-1)}$ έχει πόλο τάξης 1 στο σημείο $z = 0$ και πόλο τάξης 1 στο σημείο $z = 1$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων,

$$\int_\gamma \frac{(e^{7z}-1)dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i\left[Res(f,0)\delta_\gamma(0) + Res(f,1)\delta_\gamma(1)\right].$$

Τώρα

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0}\left[z\,\frac{e^{7z}-1}{z^2(z-1)}\right]=-7 \quad \text{και} \quad Res(f,1)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\,\frac{e^{7z}-1}{z^2(z-1)}\right]=e^7-1.$$

Άρα

$$\int_\gamma \frac{(e^{7z}-1)dz}{z^2(z-1)}=2\pi i\Big[(-7)\delta_\gamma(0)+(e^7-1)\delta_\gamma(1)\Big].$$

Συνεπώς οι δυνατές τιμές του δοσμένου ολοκληρώματος είναι

$$2\pi i[7k+(e^7-1)\ell] \quad \text{όπου } k,\ell\in\mathbb{Z}.$$

Θέμα 4ον Αν $a\in\mathbb{C}$ με $|a|<3$ και ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $z^3+(1-i\sqrt{3})z^2+(1-i\sqrt{2})z+a$, αποδείξτε ότι $|\rho|<3$.

Υπόδειξη: *Για κατάλληλα σύνολα* Ω, *αν* $f,g\in\mathcal{O}(\overline{\Omega})$ *και* $|g|<|f|$ *στα σημεία του* $\partial\Omega$, *τότε οι συναρτήσεις* f *και* $f+g$ *έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο* Ω. *(Θεώρημα του Rouché)*

Απάντηση Θέτοντας $f(z)=z^3$ και $g(z)=(1-i\sqrt{3})z^2+(1-i\sqrt{2})z+a$, έχουμε: Για $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=3$,

$$|g(z)|=\left|(1-i\sqrt{3})z^2+(1-i\sqrt{2})z+a\right|\le\left|1-i\sqrt{3}\right||z|^2+\left|1-i\sqrt{2}\right||z|+|a|=2\cdot 3^2+\sqrt{3}\cdot 3+|a|<27=3^3=|f(z)|.$$

Έπεται, από το *θεώρημα του Rouché*, ότι οι συναρτήσεις f και $f+g$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στον κύκλο $C(0,3)$, δηλαδή το πολυώνυμο $f(z)+g(z)=z^3+(1-i\sqrt{3})z^2+(1-i\sqrt{2})z+a$ έχει τρείς ρίζες μέσα στον κύκλο $C(0,3)$. Συνεπώς όλες οι ρίζες του εν λόγω πολυωνύμου ευρίσκονται μέσα στον κύκλο $C(0,3)$, όθεν $|\rho|<3$.

Θέμα 5ον Αποδείξτε ότι αν a_n είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3z^n}{e^{ia_n}+z^{3n}} \tag{1}$$

συγκλίνει για $z\in\mathbb{C}$ με $|z|<1$ και ορίζει (γι' αυτά τα z) ολόμορφη συνάρτηση.

Απάντηση Έστω $0<r<1$. Για $|z|\le r$,

$$\left|\frac{n^3z^n}{e^{ia_n}+z^{3n}}\right|\le\frac{n^3|z|^n}{\left|e^{ia_n}\right|-|z|^{3n}}=\frac{n^3r^n}{1-r^{3n}}\le\frac{1}{1-r}n^3r^n, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Για να φθάσουμε στην ανωτέρω σχέση χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\left|e^{ia_n}+z^{3n}\right|\ge\left|e^{ia_n}\right|-|z|^{3n}$, το ότι $\left|e^{ia_n}\right|=1$ (αφού $a_n\in\mathbb{R}$) και ότι $r^{3n}\le r$.

Έπεται από την (2) και το γεγονός ότι η σειρά $\sum n^3r^n$ συγκλίνει, εφαρμόζοντας το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass, ότι η σειρά (1) συκλίνει ομοιόμορφα για z με $|z|\le r$.

Συνεπώς, αφού το $r<1$ ήταν τυχόν, η σειρά (1) συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου $\Delta(0,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, οπότε το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass.

Θέμα 6ον Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία μιγαδικών αριθμών $c_2, c_3, c_4, \ldots$, τέτοια ώστε

$$\frac{z}{\pi^{iz}-1} = \frac{1}{i\log\pi} - \frac{z}{2} + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots$$

για $z \in \mathbb{C}$ με $0 < |z| < 2$. Πόσο είναι το $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$;

Απάντηση Η συνάρτηση $\pi^{iz} - 1 = e^{iz\log\pi} - 1$ μηδενίζεται όταν $iz\log\pi = 2k\pi i$, δηλαδή στα σημεία

$$z = \frac{2k\pi}{\log\pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα η συνάρτηση $f(z) := \dfrac{z}{\pi^{iz}-1}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο σημείο $z = 0$, και πόλους τάξης 1 στα σημεία

$$z = \frac{2k\pi}{\log\pi},\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Επίσης

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\pi^{iz}-1} = \lim_{z\to 0} \frac{(z)'}{(\pi^{iz}-1)'} = \frac{1}{i\log\pi}.$$

Επειδή οι πλησιέστεροι στο 0 πόλοι της f είναι οι $\pm 2\pi/\log\pi$, έπεται ότι η συνάρτηση

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{όταν } 0 < |z| < (2\pi/\log\pi) \\ 1/(i\log\pi) & \text{όταν } z = 0 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(0, 2\pi/\log\pi)$. Άρα η $g(z)$ αναλύεται σε δυναμοσειρά

$$g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \cdots \tag{1}$$

με $c_0 = g(0) = 1/(i\log\pi)$ και με ακτίνα σύγκλισης $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{2\pi}{\log\pi} > 2$. Έτσι η (1) ισχύει για $z \in \mathbb{C}$ με $0 < |z| < 2$. Επίσης $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \dfrac{\log\pi}{2\pi}$.

Μένει να υπολογίσουμε τον συντελεστή c_1. Παρατηρώντας ότι

$$c_1 = Res\left(\frac{1}{z^2}\frac{z}{\pi^{iz}-1}, 0\right) = Res\left(\frac{1}{z(\pi^{iz}-1)}, 0\right),$$

παραγωγίζουμε την (1) και βρίσκουμε ότι

$$g'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots.$$

Άρα

$$c_1 = g'(0) = \lim_{z\to 0} g'(z) = \lim_{z\to 0} f'(z) = -\frac{1}{2}.$$

Η τελευταία ισότητα έπεται ως εξής: Για z κοντά στο 0 και $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{z}{\pi^{iz}-1} = \frac{z}{e^{iz\log\pi}-1} = \frac{1}{i\log\pi + \dfrac{(i\log\pi)^2}{2} z + \dfrac{(i\log\pi)^3}{6} z^2 + \cdots} \Rightarrow$$

$$f'(z) = -\frac{1}{\left[i\log\pi + \dfrac{(i\log\pi)^2}{2} z + \dfrac{(i\log\pi)^3}{6} z^2 + \cdots\right]^2} \left[\frac{(i\log\pi)^2}{2} + \frac{(i\log\pi)^3}{3} z + \cdots\right],$$

οπότε $\lim_{z\to 0} f'(z) = -\dfrac{1}{2}$.

Θέμα 7ον Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ έτσι ώστε

$$P_n(z) \to \frac{z(e^z-1)^5}{(\pi^z-1)^2(1-\cos z)^2}, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα για $z \in \mathbb{C}$ με $1 \le |z| \le 2$. Πόσο είναι το $\lim_{n\to\infty} P_n(0)$;

Υπόδειξη: *Κάθε* $f \in \mathcal{O}(\Delta(a,R))$ *αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το* a *και ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον* R.

Απάντηση Κατ' αρχάς η συνάρτηση

$$f(z) := \frac{z(e^z-1)^5}{(\pi^z-1)^2(1-\cos z)^2}$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο σημείο $z=0$ και

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\left(\frac{e^z-1}{z}\right)^5}{\left(\frac{\pi^z-1}{z}\right)^2\left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right)^2} = \frac{1^5}{(\log\pi)^2(1/2)^2} = \frac{4}{\log^2\pi}.$$

Επίσης η συνάρτηση $f(z)$ έχει πόλους στα σημεία z για τα οποία

$$\pi^z - 1 = 0 \text{ και } z \ne 0 \iff z = \frac{2k\pi i}{\log \pi} \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

ή

$$1-\cos z = 0 \text{ και } z \ne 0 \iff z = 2k\pi \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}-\{0\}.$$

Άρα οι πλησιέστεροι στο 0 πόλοι της f είναι οι $z = \pm\frac{2\pi i}{\log\pi}$ οι οποίοι έχουν απόλυτη τιμή $\frac{2\pi}{\log\pi} \ge 2$. Συνεπώς η συνάρτηση f αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{2\pi}{\log\pi}$. Δηλαδή

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ για } z \in \mathbb{C} \text{ με } 0 < |z| < \frac{2\pi}{\log\pi}.$$

Ιδιαιτέρως η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της ανωτέρω σειράς συγκλίνει στην συνάρτηση $f(z)$, ομοιόμορφα για $z \in \mathbb{C}$ με $1 \le |z| \le 2$, δηλαδή τα πολυώνυμα $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ έχουν την απαιτούμενη ιδιότητα.

Τώρα το

$$\lim_{n\to\infty} P_n(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = \frac{4}{\log^2\pi}.$$