ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ 17/2/21

Θέμα 1ο Σωστό ή λάθος; Αν $f(z) = \exp\left[\dfrac{(e^{\alpha z} - 1 - \alpha z)^2}{z\sin(z/\beta)[1-\cos(2z/\gamma)]}\right]$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσεράς $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(\alpha i)}{n!}(z - \beta\pi i)^n$ είναι ίση με $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2\pi^2}$.

Απάντηση. Η συνάρτηση $g(z) := \dfrac{(e^{\alpha z} - 1 - \alpha z)^2}{z\sin(z/\beta)[1-\cos(2z/\gamma)]}$ έχει **επουσιώδη** ανωμαλία στο σημείο $z = 0$ και **πόλους** στα σημεία $\pm\beta k\pi$ (τάξης ≥ 1), καθώς και στα σημεία $\pm\gamma k\pi$ (τάξης ≥ 2), για $k = 1,2,3,\ldots$. Συνεπώς η συνάρτηση $f(z) = e^{g(z)}$ έχει **επουσιώδη** ανωμαλία στο σημείο $z = 0$ και **ουσιώδη** ανωμαλία στα σημεία $\pm\beta k\pi$ και $\pm\gamma k\pi$ για $k = 1,2,3,\ldots$.

Αλλά η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(\alpha i)}{n!}(z - \alpha i)^n$ είναι ίση με την απόσταση του σημείου αi από την πλησιέστερη ανωμαλία της συνάρτησης $f(z)$ η οποία **δεν** είναι **επουσιώδης**, δηλαδή

$$R = \min\left\{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2\pi^2}, \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2\pi^2}\right\}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(\alpha i)}{n!}(z - \beta\pi i)^n$ είναι επίσης ο αριθμός R.

Θέμα 2ο Σωστό ή λάθος; Αν $f \in \mathcal{O}(\Delta(0,1,\alpha + \beta + \gamma))$ τότε

$$\int_{C(0,\alpha+\beta)} \frac{f(z)dz}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} = 2\pi i Res\left(\frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma}, \alpha - \beta i\right) + \int_{C(0,\alpha)} \frac{f(z)dz}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma}. \tag{1}$$

Απάντηση. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η (1). Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$1 < \alpha < |\alpha - \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \alpha + \beta < \alpha + \beta + \gamma.$$

Τώρα αν $\mathrm{K}(z)$ είναι το κύριο μέρος της μεμονωμένης ανωμαλίας $\alpha - \beta i$ της συνάρτησης $\dfrac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma}$ τότε η συνάρτηση $\dfrac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} - \mathrm{K}(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο σημείο $\alpha - \beta i$, και συνεπώς είναι ολόμορφη στον δακτύλιο $\Delta(0,1,\alpha + \beta + \gamma)$. Άρα, από το θεώρημα του Cauchy,

$$\int_{C(0,\alpha)} \left[\frac{f(z}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} - \mathrm{K}(z)\right]dz = \int_{C(0,\alpha+\beta)} \left[\frac{f(z}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} - \mathrm{K}(z)\right]dz. \tag{2}$$

Αλλά

$$\int_{C(0,\alpha)} \left[\frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} - \mathrm{K}(z)\right]dz = \int_{C(0,\alpha)} \frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} dz - \int_{C(0,\alpha)} \mathrm{K}(z)dz = \int_{C(0,\alpha)} \frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} dz \tag{3}$$

και

$$\int_{C(0,\alpha+\beta)} \left[\frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} - \mathrm{K}(z)\right]dz = \int_{C(0,\alpha+\beta)} \frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} dz - \int_{C(0,\alpha+\beta)} \mathrm{K}(z)dz$$

$$= \int_{C(0,\alpha+\beta)} \frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma} dz - 2\pi i Res\left(\frac{f(z)}{(z - \alpha + \beta i)^\gamma}, \alpha - \beta i\right). \tag{4}$$

Έτσι η (1) έπεται από τις (2), (3) και (4).

Θέμα 3º Σωστό ή λάθος; Υπάρχει ακολουθία ολομόρφων πολυωνύμων $P_n(z)$, $n=1,2,3,\ldots$, τέτοια ώστε $P_n(z)\to\dfrac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]}$, καθώς $n\to\infty$, ομοιόμορφα για $z\in\Delta(0,1,3)$.

Απάντηση. Θα αποδείξουμε ότι **δεν υπάρχει** τέτοια ακολουθία πολυωνύμων.

Κατ' αρχάς η συνάρτηση $\dfrac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]}$ είναι ολόμορφη εκτός από τα σημεία 0, $\beta k\pi$ και $\gamma k\pi/2$ (όπου k είναι ακέραιος διάφορος του μηδενός). Μάλιστα η εν λόγω συνάρτηση έχει πόλο τάξης 1 στο 0 και πόλους (τάξης ≥ 2) στα σημεία $\beta k\pi$ και $\gamma k\pi/2$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία $\beta k\pi$ και $\gamma k\pi/2$ ευρίσκονται **εκτός** του δίσκου $\Delta(0,3)$.

Έτσι αν υπήρχε τέτοια ακολουθία $P_n(z)$ τότε

$$\int_{C(0,2)} P_n(z)dz\to\int_{C(0,2)}\frac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]}dz. \tag{1}$$

Αλλά

$$\int_{C(0,2)} P_n(z)dz=0 \tag{2}$$

και

$$\int_{C(0,2)}\frac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]}dz=2\pi i Res\left(\frac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]},0\right)\neq 0. \tag{3}$$

Το ότι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στην (3) είναι διάφορο του μηδενός έπεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση $\dfrac{z(e^{\alpha z}-1)(e^{\beta z}-1)}{\sin^2(z/\beta)\sin^2[(2z/\gamma)]}$ έχει **πόλο τάξης 1** στο 0.

Αρα η (1) δεν μπορεί να ισχύει, όπως έπεται από τις (2) και (3).

Θέμα 4º Θεωρήστε το σύνολο $\mathrm{A}=\{3-2i,\,2-3i,\,5e^{i\gamma}\}$ και δώστε συγκεκριμένο παράδειγμα ολόμορφης συνάρτησης $f:\mathbb{C}-\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ η οποία να έχει

πόλο τάξης 2 στο σημείο $3-2i$ με $Res(f,3-2i)=\alpha$,

πόλο τάξης 3 στο σημείο $2-3i$ με $Res(f,2-3i)=\beta$ και $\int_{C(2-3i,1)}(z-2+3i)f(z)dz=\gamma$,

το $\lim\limits_{z\to 5e^{\gamma i}} f(z)=\infty$,

και τέτοια ώστε η συνάρτηση $f(\alpha/z)$ να έχει ουσιώδη ανωμαλία στο σημείο $z=0$.

Απάντηση. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η εξής:

$$f(z)=\frac{\alpha}{z-3+2i}+\frac{1}{(z-3+2i)^2}+\frac{\beta}{z-2+3i}+\frac{1}{2\pi i}\frac{\gamma}{(z-2+3i)^2}+\frac{1}{(z-2+3i)^3}+\frac{1}{z-5e^{\gamma i}}+e^z.$$

Θέμα 5º Αν $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}-\{0\})$, $\delta=\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$ και

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\alpha}{z^4}+\frac{\beta}{z}\sin\left(\frac{1-i}{\delta z}\right) \text{ για } z\in\mathbb{C}-\{0\},$$

υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $Res\left(z^2 f(z),0\right)$.

Απάντηση.

$$Res\left(z^2 f(z),0\right)=-\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}\frac{1}{3!}\left(\frac{1-i}{\delta}\right)^3=-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{9\delta^3}-\frac{\beta}{9\delta^3}i.$$

Θέμα 6° Στο μάθημα αποδείξαμε ότι αν $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, όπου $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, τότε υπάρχει μια ακολουθία $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2,\ldots$, τέτοια ώστε

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1 \quad \text{και} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \quad \text{για } z \in \Omega.$$

Διατυπώστε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες στην λωρίδα

$$\Lambda = \left\{ z \in \mathbb{C} : [-\pi/(2\gamma)] < \operatorname{Im} z < [\pi/(2\gamma)] \right\}.$$

Απάντηση. Αν $f \in \mathcal{O}(\Lambda)$ τότε υπάρχει μια ακολουθία $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0,1,2,\ldots$, τέτοια ώστε

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1 \quad \text{και} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{e^{\gamma z}-1}{e^{\gamma z}+1}\right)^n \quad \text{για } z \in \Lambda.$$