5) Αν $z = x+iy$, έστω:

α) $f(z) = \frac{(1+i)x^3-(1-i)y^3}{x^2+y^2}$, $z\neq 0$, $f(0)=0$.

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ικανοποιούνται εκεί, αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Αντιφάσκει το αποτέλεσμα αυτό με το θεώρημα 2.15;

β) $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ικανοποιούνται στο 0 αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

6) Έστω $f(z)=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ $(z=x+iy\neq 0)$, $f(0)=0$.

α) Αποδείξτε ότι, $\lim \frac{f(z)-f(0)}{z}=0$ καθώς $z\to 0$ κατά μήκος κάθε ευθείας L της μορφής $L=\{(a+ib)t : t\in\mathbb{R}\}$. Εν τούτοις η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Αποδείξτε το θεωρώντας $z\to 0$ κατά μήκος της καμπύλης $z(t)=t+i\sqrt{t}$, $t\in\cancel{\mathbb{R}}$. ?
$t>0$.

7) Έστω $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}: t\le 0\}$. Ορίζουμε $r:\mathbb{C}_\pi\to\mathbb{C}$ με τις συνθήκες: (α) $(r(z))^2=z$ και (β) $\mathrm{Re}(r(z))>0$.
Αποδείξτε ότι η r είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$ και ακολούθως με τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου ότι $r'(z)=\frac{1}{2r(z)}$, $z\in\mathbb{C}_\pi$. [Υπόδ. Παρατηρήστε ότι, $r(z)=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$ (παρατηρ. 1.17.1). Κατόπιν χρησιμοποιήστε το γεγονός, που θα αποδειχθεί αργότερα, ότι η συνάρτηση $\arg(z)$, $z\in\mathbb{C}_\pi$, είναι συνεχής.]

8) Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο D. Αν κάποια από τις $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ ή $|f|$ είναι σταθερή, τότε η f είναι σταθερή. [Υπόδ. Έστω $f=u+iv$. Αν η $|f|$ σταθερή τότε $u^2+v^2=c$. Αν $c=0$ τότε $f=0$. Υποθέτοντας ότι $c>0$, διαφορίστε ως προς x και ως προς y την εξίσωση $u^2+v^2=c$.]

9) Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στον τόπο D και ότι