σε κάθε σημείο z του D είτε $f(z)=0$ ή $f'(z)=0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδ. Διαφορίστε την f^2.]

10) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση της μορφής $f(z)=u(x)+iv(y)$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

11) Σε ποια υποσύνολα του $\mathbb{C}$ είναι αρμονικές οι συναρτήσεις

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\left(\frac{(x+iy)^2-1}{(x+iy)^3+1}\right),\quad u(x,y)=\operatorname{Im}\left(\frac{(x+iy)^3+2(x+iy)-3i}{x+iy+1}\right)$$

$$u(x,y)=\frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1},\quad u(x,y)=\operatorname{Im}\left(x+iy+\frac{1}{(x+iy)^2}\right)$$

12) Έστω ότι η συνάρτηση $u=u(x,y)$ είναι αρμονική στο ανοικτό σύνολο $D\subseteq\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η $f=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι ολόμορφη στο D.

13) Έστω u αρμονική στο $\mathbb{R}^2$ ώστε u παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή.
[Υπόδ. Έστω v η αρμονική συζυγής της u. Τότε η $f=u+iv$ είναι ακέραια συνάρτηση, δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η $h=e^{-f}$ είναι φραγμένη ακέραια συνάρτηση. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα Liouville που θα αποδείξουμε αργότερα. Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα Liouville ισχυρίζεται ότι κάθε φραγμένη και ακέραια συνάρτηση είναι σταθερή.]

<u>Παρατήρηση</u>. Όσον αφορά τις παραπάνω ασκήσεις, όπου χρειάζεται, θα δεχθούμε ότι κάθε αρμονική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό κυρτό (ή αστερόμορφο) τόπο έχει αρμονική συζυγή.