Λύση της άσκ. 8: Θέτουμε $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$.

Ας υποθέσουμε ότι η u είναι σταθερή στον τόπο D. Τότε

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z), \quad z \in D$$

Από τις εξισώσεις ... C-R έπεται ότι

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z), \quad z \in D$$

και επειδή η u είναι σταθερή συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ στον D. Άρα $f' = 0$ στον D και επειδή D είναι τόπος η f είναι σταθερή.

Ανάλογα συμπεραίνουμε ότι αν η v σταθερή στον D τότε και η f σταθερή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $|f|$ σταθερή, ισοδύναμα η $|f|^2 = u^2 + v^2$ είναι σταθερή στον τόπο D. Αν $|f|^2 = 0$ στον D τότε προφανώς $f(z) = 0 \ \forall z \in D$. Έτσι υποθέτουμε ότι $|f|^2 = u^2 + v^2 = c > 0$. Διαφορίζοντας ως προς x και ως προς y την τελευταία ισότητα καταλήγουμε στο σύστημα εξισώσεων,

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2mm] u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις C-R συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{cases} u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2mm] v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι (ομογενές) γραμμικό με αγνώστους τις $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η $-u^2 - v^2 = -c < 0$. Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ επί του D. Από όπου έπεται ότι $f' = 0$ επί του D και επειδή D είναι τόπος έχουμε ότι f σταθερή επί του D.