Λύσεις των Θεμάτων της 24-6-21

2ο κλιμάκιο

Θέμα 1ο Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$.

α) Αν $0<r<R$ και $\gamma(t)=\alpha+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)dz$.

β) Βρείτε μια παράγουσα της f στον δίσκο $\Delta(\alpha,R)$.

Λύση α) Η f είναι, ως δυναμοσειρά, ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(\alpha,r)$, ο οποίος είναι ανοικτό και κυρτό σύνολο. Επομένως από το Θεώρημα Cauchy η f έχει παράγουσα στον $\Delta(\alpha,R)$ και επειδή η γ είναι προφανώς κλειστή καμπύλη έπεται το συμπέρασμα.

Μια άλλη απόδειξη έπεται από το γεγονός ότι η σύγκλιση μιας δυναμοσειράς είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου σύγκλισης αυτής (δηλ. του $\Delta(\alpha,R)$) και ένα τέτοιο σύνολο είναι το ίχνος $[\gamma]$ της γ. Κατά συνέπεια

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n\Big)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-\alpha)^n dz .$$

Όμως η συνάρτηση $F_n(z)=\frac{(z-\alpha)^{n+1}}{n+1}$ είναι μια παράγουσα της $(z-\alpha)^n$ στο $\mathbb{C}$ και έτσι $\int_\gamma (z-\alpha)^n dz = F_n(\gamma(2\pi))-F_n(\gamma(0)) = 0$. Άρα $\int_\gamma f(z)dz=0$.

β) Μια παράγουσα της f στον $\Delta(\alpha,R)$ βρίσκεται εύκολα με "τυπική" ολοκλήρωση κατά όρους της δοσμένης δυναμοσειράς. Έτσι έχουμε $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-\alpha)^{n+1}$, $|z-\alpha|<R$. Πράγματι η ακτίνα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς ισούται με R, εφ' όσον

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1\cdot \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Παραγωγίζοντας την F βρίσκουμε $F'(z)=f(z)$, $z\in\Delta(\alpha,R)$ (εφαρμόζουμε εδώ το Θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών) και έτσι έχουμε το συμπέρασμα.
