$$= i\int_0^{2\pi}(a+\varrho e^{it})dt = i\int_0^{2\pi} a\,dt + i\varrho \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{it}dt}_{0} = 2\pi i a$$

Έστω $n\geq 2$. Τότε έχουμε

$I_n(a)= \underbrace{\int_0^{2\pi}\left(\frac{a+\varrho e^{it}}{\varrho e^{it}}\right)^n i\varrho e^{it}dt}_{\varphi(t)}$. Τότε $\varphi(t)=\frac{i\varrho e^{it}}{\varrho^n}\left(\frac{a+\varrho e^{it}}{e^{it}}\right)^n =$

$=\frac{i}{\varrho^{n-1}}\cdot e^{it}\left(\frac{a}{e^{it}}+\varrho\right)^n$. Θέτουμε $c=\frac{i}{\varrho^{n-1}}$ και $g(t)=\left(\frac{a}{e^{it}}+\varrho\right)^n$ και

αναπτύσσουμε την $g(t)$ με την βοήθεια του διωνύμου Newton.

$$g(t)=\frac{a^n}{e^{int}}+\binom{n}{1}\frac{a^{n-1}}{e^{i(n-1)t}}\cdot\varrho+\binom{n}{2}\frac{a^{n-2}}{e^{i(n-2)t}}\varrho^2+\dots+\binom{n}{n-2}\frac{a^2}{e^{2it}}\cdot\varrho^{n-2}+\binom{n}{n-1}\frac{a}{e^{it}}\cdot\varrho^{n-1}+$$

$+\varrho^n$.

Όλοι οι όροι αυτού του αναπτύγματος, όταν πολλαπλασιασθούν με τον παράγοντα e^{it}, εκτός του προτελευταίου όρου $z_n=\binom{n}{n-1}\frac{a}{e^{it}}\cdot\varrho^{n-1}=n\frac{a}{e^{it}}\varrho^{n-1}$, έχουν ως παράγοντα κάποιο e^{-ikt} με $1\leq k\leq n-1$ (και ο τελευταίος το e^{it}.) Συνεπώς κατά την ολοκλήρωση στο $[0,2\pi]$ δίνουν τιμή $=0$. Ο όρος z_n πολλαπλασιαζόμενος με $c.e^{it}$ δίνει $z_n.c.e^{it}=n\frac{a}{e^{it}}\varrho^{n-1}\cdot\frac{i}{\varrho^{n-1}}\cdot e^{it}=nai$.

Άρα κατά την ολοκλήρωση στο $[0,2\pi]$ μας δίνει την τιμή $2\pi i n a$. Έτσι (ξανα)βρίσκουμε $I_n(a)=2\pi i n a$.

Θέμα 3º Αποδείξτε ότι:

α) Αν $|z-1|<1$, τότε $1/z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

β) Χρησιμοποιώντας το (α), βρείτε το ανάπτυγμα της $f(z)=1/z^2$ σε δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta(1,1)$.

Λύση α) Θέτουμε $w=1-z$. Άρα, με χρήση της γεωμετρικής σειράς έχουμε,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n=\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\frac{1}{1-w}=\frac{1}{1-(1-z)}=\frac{1}{z},$$