εφ' όσον $|w| = |z-1| < 1$.

β) Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη του τύπου $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ και με χρήση του θεωρήματος διαφόρισης δυναμοσειρών έχουμε,

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n(z-1)^{n-1}, \quad |z-1|<1.$$

Και αυτό είναι το ανάπτυγμα της $1/z^2$ στον δίσκο $\Delta(1,1)$.
Πρέπει να είναι σαφές ότι η ακτίνα σύγκλισης και των δύο δυναμοσειρών ισούται με $R=1$.

Θέμα 4ο α) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια μη σταθερή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
β) Έστω a, b, c, d οι διαδοχικές κορυφές ενός παραλληλογράμμου του επιπέδου. Θεωρούμε την κλειστή πολυγωνική γραμμή $\gamma = [a,c]+[c,b]+[b,d]+[d,a]$. Βρείτε διαισθητικά τις τιμές (και σημειώστε τις στο σχήμα που θα κατασκευάσετε) του δείκτη στροφής δ_γ σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

Λύση (α) Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το $f(\mathbb{C})$ δεν είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Τότε υπάρχει ανοικτός δίσκος $\Delta(a,r) \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $\Delta(a,r) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$.
Επομένως, $|f(z)-a| \geq r > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (1).
Από την (1) έπεται ότι η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-a}, \quad z \in \mathbb{C}$$

είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, δηλαδή ακέραια. Επί πλέον η (1) μας δίνει το φράγμα