Θέμα 2ο α) Έστω ότι η συνάρτηση u είναι αρμονική στον τόπο $D \subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι ολόμορφη στον D.

β) Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ και $0 < \rho < +\infty$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I_n(\alpha) = \int_{C(\alpha,\rho)} \frac{z^n}{(z-\alpha)^n}\, dz, \quad n \geq 1.$$

Λύση α) Η u ως αρμονική είναι C^∞-διαφορίσιμη στον D υπό την πραγματική έννοια (άρα και οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}$ αυτής έχουν την ίδια ιδιότητα) και βέβαια ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον D: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (1).

Θέτουμε $U = \frac{\partial u}{\partial x}$ και $V = -\frac{\partial u}{\partial y}$ και τότε $f = U + iV$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι U και V ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy και Riemann στον D. Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y}$$

(αφού η u είναι αρμονική στον D έπεται από την (1) ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) και

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-V) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

(οι μεικτές παράγωγοι της u είναι ίσες αφού η u είναι C^∞-διαφορίσιμη).

Έτσι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ικανοποιούνται και η f είναι ολόμορφη στον D.

β) Σημειώνουμε κατ' αρχήν ότι με τον συμβολισμό $C(\alpha,\rho)$ εννοούμε την κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Θεωρούμε τυχόντα θετικό ακέραιο n και θέτουμε $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$ (n f είναι προφανώς ακέραια συνάρτηση).