Αν $\alpha=0$ τότε $I_n(0)=\int_{C(0,\rho)} \frac{z^n}{(z-0)^n}dz = \int_{C(0,\rho)} 1\,dz = \int_{C(0,\rho)} dz=0$,

εφ' όσον (η σταθερά 1 έχει παράγουσα την z και) η καμπύλη $C(\alpha,\rho)$ είναι κλειστή. (Εναλλακτικά, με ένα απ' ευθείας υπολογισμό έχουμε $\int_{C(0,\rho)} dz = \int_0^{2\pi} \rho i e^{it}dt = \rho i \int_0^{2\pi} e^{it}dt = \rho i \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{2\pi} = \rho i \cdot 0 = 0$.)

Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Εφαρμόζουμε τότε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους για την $n-1$ παράγωγο της ακέραιας συνάρτησης f και την καμπύλη $C(\alpha,\rho)$.
Έτσι έχουμε

(1) $f^{(n-1)}(\alpha)\cdot \delta_{C(\alpha,\rho)}(\alpha) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C(\alpha,\rho)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C(\alpha,\rho)} \frac{z^n}{(z-\alpha)^n}dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot I_n(\alpha)$

Προφανώς $\delta_{C(\alpha,\rho)}(\alpha)=1$, αφού $\alpha \in \Delta(\alpha,\rho)$. Επίσης έχουμε

$f^{(k)}(z) = n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k}$, $1\leq k \leq n$. Άρα $f^{(n-1)}(z) = n(n-1)\cdots 2\cdot z =$
$= n!z \Rightarrow f^{(n-1)}(\alpha) = n!\alpha$ (2)
Έπεται από τις (1) και (2) ότι
$n!\alpha = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot I_n(\alpha) \Rightarrow I_n(\alpha) = 2\pi i n\alpha$.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε, $I_n(\alpha)=2\pi i n \alpha$, $n\geq 1$, $\alpha\in\mathbb{C}$.
Μια <u>δεύτερη απόδειξη</u> προκύπτει και από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων. Αν θέσουμε $h(z)=\frac{z^n}{(z-\alpha)^n}$ τότε η h έχει πόλο τάξης n στο α ($\alpha\neq 0$) και τότε
$I_n(\alpha) = \int_{C(\alpha,\rho)} h(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(h,\alpha)\cdot\delta_{C(\alpha,\rho)}(\alpha) = 2\pi i\operatorname{Res}(h,\alpha)\cdot 1 = 2\pi i \operatorname{Res}(h,\alpha)$,

$\operatorname{Res}(h,\alpha) = \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}$, όπου $f(z)=z^n$, αφού $h(z)=\frac{f(z)}{(z-\alpha)^n}$ και $f(\alpha)\neq 0$.

Συνεπώς $\operatorname{Res}(h,\alpha) = \frac{n!\alpha}{(n-1)!} = n\alpha$. Άρα $I_n(\alpha) = 2\pi i n\alpha$.

Μια τρίτη στοιχειώδης απόδειξη (με χρήση μόνο του ορισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος) έχει ως εξής:
Για $n=1$ έχουμε $I_1(\alpha) = \int_{C(\alpha,\rho)} \frac{z}{z-\alpha}dz = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\alpha+\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\right) i\rho e^{it}dt =$