Λύσεις των Θεμάτων της 24-6-81

1ο κλιμάκιο

Θέμα 1ο. Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z\in\mathbb{C}$.

α) Αν $a\neq 0$ ώστε $f(z)=f(z+a)$ $\forall z\in\mathbb{C}$, αναπτύξτε την f σε δυναμοσειρά κέντρου a και βρείτε την ακτίνα σύγκλισής της.

β) Αναπτύξτε τις συναρτήσεις $\cos z$ και $\sin z$ σε δυναμοσειρές με κέντρα $a_k=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ και $a=\frac{\pi}{2}$ και βρείτε τις ακτίνες σύγκλισής τους.

(Υπόδειξη για το (β): Αν $a=\pi/2$ τότε $\cos z=-\sin(z-\pi/2)$ και $\sin z=\cos(z-\pi/2)$.)

Λύση α) Η f είναι ακέραια και έτσι η ακτίνα σύγκλισης της δοσμένης δυναμοσειράς είναι $R=+\infty$.

Παρατηρούμε ότι για $\forall z\in\mathbb{C}$ έχουμε

$$f(z)=f((z-a)+a)=f(z-a)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

Επομένως το ανάπτυγμα της f με κέντρο $z=a$ (που είναι μια περίοδος της f) έχει τους ίδιους συντελεστές με το ανάπτυγμα κέντρου $z=0$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι και στην περίπτωση αυτή $R=+\infty$.

β) Γνωρίζουμε από την Θεωρία ότι:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{και} \quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Επειδή οι αριθμοί a_k, $k\in\mathbb{Z}$ είναι περίοδοι και για τις δύο συναρτήσεις, $\cos z$ και $\sin z$, από τον ισχυρισμό (α) έπεται ότι $\forall k\in\mathbb{Z}$ και $\forall z\in\mathbb{C}$ ισχύει

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a_k)^{2n}}{(2n)!} \quad \text{και} \quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a_k)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Για το κέντρο $a=\pi/2$, έχουμε, με χρήση της υπόδειξης, ότι

$$\cos z=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C} \text{ και}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-a)^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C}$$