ότι η ρητή συνάρτηση, $R(\cos t, \sin t) = \dfrac{1}{a-\cos t}$, ορίζεται $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, εφ' όσον $a > 1$ και $|\cos t| \leq 1$.
Κατά συνέπεια

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \qquad (1)$$

όπου $f(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}, \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$ και $z_1, \ldots, z_n$ οι

πόλοι της f εντός του ανοικτού δίσκου $\Delta(0,1)$.
Παρατηρούμε ότι, $f(z) = \dfrac{1}{iz} \cdot \dfrac{1}{a - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \dfrac{2i}{z^2 - 2az + 1} = 2i\,h(z)$

Συνεπώς οι πόλοι της f εντός του $\Delta(0,1)$ είναι η ρίζα ρ_2 του τριωνύμου $z^2 - 2az + 1$ και έτσι

$$Res(f, \rho_2) = 2i\, Res(h, \rho_2) = \frac{2i}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Επομένως από την (1) βρίσκουμε

$$I = 2\pi i \cdot Res(f, \rho_2) = 2\pi i \cdot \frac{2i}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Παρατηρούμε ότι $\int_\gamma h(z)\,dz = \dfrac{1}{2i} I$.

Θέμα 3º Έστω $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ και $r > 2$.

Αποδείξτε ότι η f έχει παράγουσα στον τόπο
$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.
(Υπόδειξη: Αρκεί να αποδείξετε ότι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ $\forall$ κλειστή καμπύλη $\gamma : [a,b] \to D$.)

Λύση Παρατηρούμε ότι $f(z) = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z+2}$. Έτσι αν $\gamma : [a,b] \to D$ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z+1} - \int_\gamma \frac{dz}{z+2} = 2\pi i\left(\delta_\gamma(-1) - \delta_\gamma(-2)\right) \qquad (1)$$

Τα σημεία -1 και -2 ανήκουν στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,2)}$ ο οποίος (ως κυρτό) είναι συνεκτικό σύνολο και περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, εφ' όσον $[\gamma] \subseteq D = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta(0,r)}$ και $r > 2$.