Συνεπώς ο δίσκος $\overline{\Delta(0,2)}$ περιέχεται σε κάποια (μοναδική) συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$, ως εκ τούτου έχουμε $\delta_\gamma(-1)=\delta_\gamma(-2)$. Έτσι από τον τύπο (1) συμπεραίνουμε ότι $\int_\gamma f(z)dz=0$ και άρα η f έχει (με χρήση της υπόδειξης) παράγουσα στον D.

<u>Εναλλακτικά</u>, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της f στους απλούς πόλους -1 και -2 αυτής:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}\underbrace{\left(\frac{1}{z+2}\right)}_{g_1} \Rightarrow \operatorname{Res}(f,-1)=g_1(-1)=\frac{1}{-1+2}=1$$

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\underbrace{\left(\frac{1}{z+1}\right)}_{g_2} \Rightarrow \operatorname{Res}(f,-2)=g_2(-2)=\frac{1}{-2+1}=-1.$$

Από το θεώρημα ολοκλ. υπολοίπων συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,-1)\cdot\delta_\gamma(-1)+\operatorname{Res}(f,-2)\cdot\delta_\gamma(-2)\right]=$$

$$=2\pi i\left[1\cdot\delta_\gamma(-1)+(-1)\cdot\delta_\gamma(-2)\right]=2\pi i\left(\delta_\gamma(-1)-\delta_\gamma(-2)\right)=0.$$

<u>Μια τρίτη απόδειξη</u> του αποτελέσματος έχει σε αδρές γραμμές ως ακολούθως:

$$f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Επειδή $z\in D \iff |z|>r\geq 2$ έπεται ότι αν $z\in D$ τότε $1/|z|<1/r\leq 1/2<1$ και $2/|z|<1$. Συνεπώς από το ανάπτυγμα της γεωμ. σειράς, βρίσκουμε ότι αν $|z|>2$ τότε

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} \quad \text{και} \quad \frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}.$$

Άρα για $|z|>2$ ισχύει

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-2^n)}{z^{n+1}} \qquad (2)$$