Έτσι το ο τύπος (2) είναι το ανάπτυγμα Laurent της f στον δακτύλιο $\Delta(0,2,+\infty)=\{z\in\mathbb{C}: |z|>2\}\supseteq D$.
Μία σειρά Laurent, ως γνωστόν, συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δακτυλίου επί του οποίου ορίζεται.
Άρα αν $\gamma:[a,b]\to D$ είναι κλειστή καμπύλη τότε

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-2^n)\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-2^n)\int_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}}$$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{1}{z^{n+1}}$, για $n\geq 1$ έχει παράγουσα στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\{0\}\supseteq D$ και η γ είναι κλειστή καμπύλη έπεται, $\int_\gamma \frac{dz}{z^{n+1}}=0$ $\forall\, n\geq 1$ και συνεπώς $\int_\gamma f(z)dz=0$

<u>Σημείωση</u>. Πρέπει να είναι σαφές ότι το αποτέλεσμα που περιγράφεται στο Θέμα 3 ισχύει και για $r=2$.

<u>Θέμα 4°</u>. Έστω $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z\neq 0$. Αποδείξτε ότι:
α) Η συνάρτηση f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z=0$.
β) Αν η g είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(0,r)$ $(r>0)$ και δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε και η συνάρτηση $h=g\cdot f$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z=0$.

<u>Λύση</u> (α) Θέτουμε $z_k=\frac{1}{2k\pi i}$ και $w_k=\frac{1}{(2k+1)\pi i}$, $k\geq 1$.
Οι ακολουθίες (z_k) και (w_k) είναι προφανώς μηδενικές και παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} e^{2k\pi i} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{k\to\infty} w_k = \lim_{k\to\infty} e^{(2k+1)\pi i} =$$

$$= e^{\pi i}\cdot\lim_{k\to\infty} e^{2k\pi i} = e^{\pi i}\cdot 1 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1+i0=-1.$$

Έπεται από αυτούς τους υπολογισμούς ότι το όριο $\lim_{z\to 0} f(z)$ <u>δεν</u> υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ και έτσι η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z=0$.
Εναλλακτικά μπορούμε να αποδείξουμε το αποτέλεσμα με τον ακόλουθο τρόπο. Θέτουμε $w=\frac{1}{z}$, για $z\neq 0$ και τότε