ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Απαντήσεις στα θέματα της εξέτασης της 14/9/2022

Θέμα 1^{ον} Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}+2i)(2+3i)^n}{(\sqrt{n}+3i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}z^n .$$

Εν συνεχεία βρείτε για ποιους μιγαδικούς αριθμούς ζ με $|\zeta|=R$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}+2i)(2+3i)^n}{(\sqrt{n}+3i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}\zeta^n$$

αποκλίνει.

Απάντηση Οι συντελεστές της εν λόγω δυναμοσειράς είναι $c_n=a_nb_n$ όπου

$$a_n=\frac{\sqrt{n}+2i}{\sqrt{n}+3i} \text{ και } b_n=\frac{(2+3i)^n}{(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1 \text{ και } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}-i2\sqrt{3}}{2+3i}, \text{ όθεν } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}-i2\sqrt{3}}{2+3i}\right|=\sqrt{\frac{14}{13}}.$$

Άρα η ζητούμενη ακτίνα σύγκλισης $R=\sqrt{14/13}$.
Αν τώρα ζ είναι μιγαδικός αριθμός με $|\zeta|=\sqrt{14/13}$ τότε

$$\left|\frac{(\sqrt{n}+2i)(2+3i)^n}{(\sqrt{n}+3i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}\zeta^n\right|=\left|\frac{\sqrt{n}+2i}{\sqrt{n}+3i}\right|\to 1, \text{ καθώς } n\to\infty .$$

Ιδιαιτέρως η ακολουθία

$$\frac{(\sqrt{n}+2i)(2+3i)^n}{(\sqrt{n}+3i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}\zeta^n$$

δεν είναι μηδενική (γι' αυτό το ζ), και συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n}+2i)(2+3i)^n}{(\sqrt{n}+3i)(\sqrt{2}-i2\sqrt{3})^n}\zeta^n$$

δεν συγκλίνει.

Θέμα 2^{ον} Αποδείξτε ότι $4\left|\sin^2(z)\right|=e^{2y}+e^{-2y}-2\cos(2x)$, όπου $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. $\left|w^2\right|=w\cdot\overline{w}$ και $\overline{(e^w)}=e^{\overline{w}}$.

Απάντηση Υπολογίζουμε:

$$4\left|\sin^2(z)\right|=(2\sin z)\cdot(2\overline{\sin z})=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i}\right)\cdot\left(\frac{e^{-i\overline{z}}-e^{i\overline{z}}}{-i}\right)$$

$$=(e^{ix-y}-e^{-ix+y})\cdot(e^{-ix-y}-e^{ix+y})=e^{-2y}+e^{2y}-e^{2ix}-e^{-2ix}=e^{2y}+e^{-2y}-2\cos(2x),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους τύπους:

$$2i\sin z=e^{iz}-e^{-iz} \text{ και } 2\cos(2x)=e^{2ix}+e^{-2ix} .$$

Θέμα 3^{ov} Έστω $a \in \mathbb{C}$ με $|a| < 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|e^{i\theta} - a\right|^2} = \frac{2\pi}{1-|a|^2}.$$

Υπόδειξη. $|w|^2 = w \cdot \overline{w}$ και $d\theta = d(e^{i\theta})/ie^{i\theta}$.

Απάντηση Υπολογίζουμε:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|e^{i\theta} - a\right|^2} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(e^{i\theta} - a)(e^{-i\theta} - \overline{a})} = \frac{1}{i}\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{(e^{i\theta} - a)(1 - \overline{a}e^{i\theta})} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(1-\overline{a}z)} = \frac{1}{i}\frac{2\pi i}{1-\overline{a}a} = \frac{2\pi}{1-|a|^2},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Cauchy $\int_{|z|=1} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$ για την συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-\overline{a}z}$, η οποία είναι ολόμορφη στο σύνολο $\mathbb{C} - \{1/\overline{a}\}$. Επίσης λάβαμε υπ' όψιν ότι $|1/\overline{a}| = 1/|a| > 1$.

Θέμα 4^{ov} Έστω $a \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι για μια συνάρτηση $f(\zeta)$, συνεχή σε περιοχή του a,

$$\int_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \to 2\pi i f(a) \text{ καθώς το } \varepsilon \to 0^+.$$

Απάντηση Έχουμε:

$$\left|\int_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - 2\pi i f(a)\right| = \left|\int_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \int_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(a)}{\zeta - a} d\zeta\right| = \left|\int_{C(a,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(a)}{\zeta - a} d\zeta\right|$$

$$\leq \sup\left\{\left|\frac{f(\zeta)-f(a)}{\zeta - a}\right| : |\zeta - a| = \varepsilon\right\} \times \left(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon\ C(a,\varepsilon)\right).$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sup\left\{|f(\zeta) - f(a)| : |\zeta - a| = \varepsilon\right\} \cdot 2\pi\varepsilon.$$

Αλλά από την συνέχεια της συνάρτησης $f(\zeta)$ στο σημείο a,

$$\sup\left\{|f(\zeta) - f(a)| : |\zeta - a| = \varepsilon\right\} \to 0, \text{ καθώς } \varepsilon \to 0^+,$$

και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

Θέμα 5^{ov} Θεωρήστε την ακολουθία $\lambda_n = n^2/(2n+3)$ και έναν μιγαδικό αριθμό $\mathrm{A} \neq 0$. Για $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, ορίστε την συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n^{\lambda_n}} \frac{1}{z^n}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Εν συνεχεία αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό a υπάρχει ακολουθία $z_n \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n = 1,2,3,\ldots$, έτσι ώστε

$$z_n \to 0 \text{ και } f(z_n) \to a.$$

Απάντηση Ισχυριζόμαστε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n^{n^2/(2n+3)}} w^n$$

(του w) είναι $R = \infty$. Πράγματι αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\sqrt[n]{n^{n^2/(2n+3)}} = n^{n/(2n+3)} \to +\infty, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\mathrm{A}^n}{n^{n^2/(2n+3)}}\right|} \to 0\,.$$

Αν επομένως θέσουμε $w = 1/z$, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Επίσης η συνάρτηση $f(z)$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο σημείο $z = 0$, αφού οι συντελεστές

$$\frac{\mathrm{A}^n}{n^{n^2/(2n+3)}} \neq 0 \text{ (για άπειρα το πλήθος } n\text{).}$$

Από το θεώρημα του Casorati, για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $f(\Delta(0,\varepsilon) - \{0\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, δηλαδή και για κάθε $\delta > 0$,

$$\Delta(a,\delta) \cap f(\Delta(0,\varepsilon) - \{0\}) \neq \varnothing\,,\ \forall a \in \mathbb{C}\,.$$

Ιδιαιτέρως

$$\Delta(a,1/n) \cap f(\Delta(0,1/n) - \{0\}) \neq \varnothing\,,\ n = 1,2,3,\ldots\,.$$

Αν επομένως, δοσμένου $a \in \mathbb{C}$, πάρουμε $w_n \in \Delta(a,1/n) \cap f(\Delta(0,1/n) - \{0\})$, τότε υπάρχουν

$$z_n \in \Delta(0,1/n) - \{0\} \text{ με } w_n = f(z_n) \in \Delta(a,1/n)\,,$$

και τότε $z_n \to 0$ και $f(z_n) \to a$ ($n \to \infty$).