Ασκήσεις (Κεφ. 3)

1) Αν η σειρά μιγαδικών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $|\arg(a_n)| \leq \theta < \pi/2$, για $n \geq 1$, αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$

2) Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $\operatorname{Re} a_n \geq 0$, για $n \geq 1$. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$;

3) Να υπολογισθεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ (β) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$ (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$ (δ) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$

(ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ (στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!}$ (ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+3} (z-i)^{2n+1}$ (η) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3-2i)^n}{n!}$

(θ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n)^{1/3}} (z-2i)^n$ ι) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} i^n (z-2)^n$

4) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών. Σε κάθε περίπτωση εντοπίστε, αν υπάρχουν, σημεία στον κύκλο σύγκλισης $|z-a|=R$, όπου η σειρά συγκλίνει και σημεία όπου αποκλίνει. 3.32 ρ.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\,(z-i)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (z+2i)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$

5) Αποδείξτε ότι αν $|z-1|<1$ τότε $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$. Χρησιμοποιείστε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε το αναπτυγμα της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2}$ σε δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta(1,1)$.

6) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το $a=0$ την συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς.

[Υπόδ. $f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-(-z)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}$.]