5) Έστω $D=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z>0\}$ και $f: D\to\mathbb{C}$: $f(z)=z^2$. Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1 επί του D και βρείτε την εικόνα $G=f(D)$. Ποιά είναι η αντίστροφη συνάρτηση $g=f^{-1}: G\to D$;

Λύση Έστω $z,w\in D$ ώστε $z^2=w^2$. Τότε $z=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\theta}$, $w=\sqrt{|w|}\cdot e^{i\omega}$ με $\theta,\omega\in(-\pi/2,\pi/2)$. Επειδή $z^2=w^2$ έπεται ότι $|z|^2=|w|^2$ και άρα $|z|=|w|$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι,
$|z|.e^{i2\theta}=|w|.e^{i2\omega} \Rightarrow e^{i2\theta}=e^{i2\omega} \Rightarrow 2i(\theta-\omega)=2k\pi i$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Άρα $\theta-\omega=k\pi$ και επειδή $|\theta-\omega|<\pi$, έπεται ότι $k=0$ και έτσι $\theta=\omega$. Άρα $z=w$ και η f είναι 1-1.

Έστω τώρα $z\in D$ τότε $z=|z|.e^{i\theta}$ με $\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$ άρα $z^2=|z|^2.e^{2i\theta}$ με $2\theta\in(-\pi,\pi)$ (και έτσι $\arg(z^2)=2\theta$). Έπεται ότι $w=f(z)\in\mathbb{C}_\pi=\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}: t\le 0\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $f(D)=\mathbb{C}_\pi$ και άρα η ζητούμενη εικόνα G είναι ο τόπος $\mathbb{C}_\pi$.

Πράγματι, έστω $w\in\mathbb{C}_\pi$. Επιλύουμε την εξίσωση $z^2=w$. Εφ' όσον $w\in\mathbb{C}_\pi$ τότε $w=|w|.e^{i\theta}$ με $\theta=\arg(w)\in(-\pi,\pi)$.

Έπεται ότι οι δύο τετραγωνικές ρίζες του w είναι οι
$z_0=\sqrt{|w|}.e^{i\theta/2}$ και $z_1=\sqrt{|w|}.e^{i\frac{2\pi+\theta}{2}}=\sqrt{|w|}.e^{i\pi}.e^{i\theta/2}=-\sqrt{|w|}.e^{i\theta/2}$.

Από αυτές μόνο η πρώτη ανήκει στον D, καθώς $\frac{\theta}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, και βέβαια αυτή η ρίζα συμπίπτει με την κύρια τιμή της τετραγωνικής ρίζας. Έτσι η αντίστροφη της f είναι
$w\in G=\mathbb{C}_\pi \xrightarrow{g} \sqrt{w}\in D$, δηλαδή ο κύριος κλάδος της τετραγωνικής ρίζας.