7) Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-4)^n$ να συγκλίνει για $z=-1$ και να αποκλίνει για $z=0$;

8) Αν $|a_n|\leq 1$, $n\geq 1$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα για κάθε $|z|<1$. Θέτουμε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ για $|z|<1$, αποδείξτε ότι

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \quad |z|<1.$$

9) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R\geq 0$. Αποδείξτε ότι:

α) Αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε $|a_n|\leq\delta$, για $n\geq 0$ (δηλαδή, αν η (a_n) είναι φραγμένη) τότε $R\geq 1$.

β) Αν υπάρχει $\delta>0$ και ένα άπειρο $M\subseteq \mathbb{N}$ ώστε $|a_n|\geq\delta$ για κάθε $n\in M$ (δηλαδή, αν η (a_n) δεν είναι μηδενική) τότε $R\leq 1$.

10) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει z_0 με $|z_0-a|=R$ ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-a)^n$ να συγκλίνει απόλυτα τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε z με $|z-a|=R$.

11) Έστω ότι η δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης:

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ (β) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$, όπου $k\in\mathbb{N}$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Αν $p\neq 0$ είναι μιγαδικό πολυώνυμο τι μπορείτε να πείτε για την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) a_n z^n$;

12) Δώστε ένα παράδειγμα δυναμοσειράς $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$, ώστε η συνάρτηση f να (ορίζεται και) να είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,R)}$.

[Υπόδ. Έστω $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.]