23) Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{y\to 0}\,[\log(\alpha+iy)-\log(\alpha-iy)]$$

όταν $\alpha>0$ και ακόμη όταν $\alpha<0$. (Όπου $\log$ συμβολίζει ως συνήθως τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου.)

24) Έστω $D\subseteq\mathbb{C}$ τόπος ώστε $0\notin D$. Μία συνάρτηση $f:D\to\mathbb{C}$ λέγεται <u>κλάδος</u> του λογαρίθμου αν είναι συνεχής και $e^{f(z)}=z$ για κάθε $z\in D$. Αποδείξτε ότι:

α) Αν f κλάδος του λογαρίθμου . τόπο D τότε είναι ολόμορφη συνάρτηση και $f'(z)=1/z$, $z\in D$.

β) Αν f,g είναι κλάδοι του λογαρίθμου στον τόπο D τότε υπάρχει ακέραιος k ώστε $g(z)-f(z)=2k\pi i$, για κάθε $z\in D$.

γ) Δεν υπάρχει κλάδος του λογαρίθμου στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

[<u>Υπόδ.</u> Για το (α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 2.11. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν $h(z)=f(z)-g(z)$ τότε $e^{h(z)}=1$ και άρα η συνάρτηση $h(z)$ παίρνει τιμές στο σύνολο $2\pi i\mathbb{Z}$. Για το (γ) παρατηρούμε ότι η ύπαρξη κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ θα σήμαινε ότι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου επεκτείνεται συνεχώς στον $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και αυτό δεν ισχύει. (Πρβλ. την Προτ. 3.40 και το Θεώρημα 3.41.)]

25) Αποδείξτε ότι:

(α) $\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$ (β) $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ και (γ) $\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-1}{z}=0$

26) Αποδείξτε ότι αν $0<|z|<1$ τότε:

(α) $\frac{|z|}{4}<|e^z-1|<\frac{7}{4}|z|$ (β) $|\cos z|<2$ και (γ) $|\sin z|<\frac{13}{10}|z|$

[<u>Υπόδ.</u> Για το (α) παρατηρούμε ότι $e=2{,}718\ldots<2+\frac{3}{4}$. Για τα (β) και (γ) χρησιμοποιείστε τις ανισότητες $2^n<(2n)!$ και $2^{2n}<(2n+1)!$.]