27) Αποδείξτε ότι, αν $z=x+iy$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y=-\cos^2 x+\cosh^2 y$

(β) $|\sin x|\leq |\sin z|$

(γ) $|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y=-\sin^2 x+\cosh^2 y$

(δ) $|\cos x|\leq |\cos z|$

(ε) $|\sin z|\leq \cosh y$ και $|\sin z|\geq|\sinh y|$

(στ) $|\cos z|\leq \cosh y$ και $|\cos z|\geq |\sinh y|$

28) Αποδείξτε ότι:

(α) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$ (β) $\cosh 2z=\cosh^2 z+\sinh^2 z$

(γ) $\sinh 2z=2\sinh z\cosh z$ ( ) $\sinh(i\pi/2-z)=i\cosh z$

28) Αποδείξτε ότι:

(α) $\cos(\pi/2-z)=\sin z$ (β) $\sin(\pi/2-z)=\cos z$

(γ) $\cos(\pi-z)=-\cos z$ (δ) $\sin(\pi-z)=\sin z$

(ε) $\tan(\pi+z)=\tan z$ (στ) $\cot(\pi/2-z)=\tan z$

29) Αποδείξτε ότι: (α) για $z=x+iy\neq \pi/2+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\tan z=\frac{\sin 2x+i\sinh 2y}{\cos 2x+\cosh 2y}$$

(β) Έχει η εξίσωση $\tan z=z$ πραγματική ρίζα; Τι μπορείτε να πείτε για την εξίσωση $z\tan z=1$;

Παρατήρηση. Σχετικά με την άσκηση 24, σημειώνουμε ότι: (α) το Θεωρ. 2.11 μας λέει ότι: Αν $\Omega, G\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτά σύνολα, $f:\Omega\to G$ συνεχής και $g: G\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $g'(w)\neq 0$ $\forall\, w\in G$ και $g(f(z))=z$ $\forall\, z\in\Omega$, τότε και η f είναι ολόμορφη και $f'(z)=\dfrac{1}{g'(f(z))}$, $\forall z\in\Omega$.
(β) Η Πρόταση 3.40 και το Θεωρ. 3.41 αναφέρονται στην συνέχεια του πρωτεύοντος ορίσματος και την ολομορφία του πρωτεύοντος κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $\mathbb{C}_\pi=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ αντίστοιχα.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα έχουν αποδειχθεί πλήρως στο μάθημα.