Λυμένες ασκήσεις.

1) Έστω $(z_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε $z_n \to z$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(k_n) \subseteq \{0,1\}$ ώστε

$$\arg z_n + 2k_n\pi \to \arg z$$

Λύση Έστω ότι $z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$. Επειδή η συνάρτηση $\arg|_{\mathbb{C}_\pi}$ είναι συνεχής (και άρα συνεχής) στο z έπεται ότι $\arg z_n \to \arg z$. Θέτουμε τότε $k_n = 0 \ \forall n \geq 1$.
Υποθέτουμε τώρα ότι $z \in \mathbb{R}$ με $z < 0$ τότε βέβαια $\arg z = \pi$.
Η (k_n) στην περίπτωση αυτή ορίζεται ως εξής

$$k_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } \operatorname{Im} z_n \geq 0 \\ 1, & \text{αν } \operatorname{Im} z_n < 0 \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι η υπόθεσή μας για την (z_n), δηλ. ότι $z_n \to z$ έχει ως συνέπεια ότι, $|\arg z_n| \to \pi$ (1)
Έπεται ότι,

$$|(\arg z_n + 2k_n\pi) - \pi| = \begin{cases} |\arg z_n - \pi| = \pi - \arg z_n, & \operatorname{Im} z_n \geq 0 \\ |\arg z_n + \pi| = \pi - |\arg z_n|, & \operatorname{Im} z_n < 0 \end{cases}$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι

$$|(\arg z_n + 2k_n\pi) - \pi| = \pi - |\arg z_n|, \quad \forall n \geq 1,$$

και έτσι από την (1) έχουμε το συμπέρασμα.

2) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$, θεωρούμε την συνάρτηση $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{\varphi} e^{i\lambda \arg z}$.
α) Αν $\lambda \in \mathbb{Z}$ τότε η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
β) Αν $\lambda \notin \mathbb{Z}$ τότε η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}_\pi$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο $z \in \mathbb{R}$ με $z < 0$.

Λύση α) Έστω τυχαίο [illegible] $z \neq 0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $(z_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z_n \to z$. Τότε, από την προηγούμενη άσκηση υπάρχει ακολουθία $(k_n) \subseteq \{0,1\}$ ώστε $\arg z_n + 2k_n\pi \to \arg z$.
Έτσι έχουμε $\varphi(z_n) = e^{i\lambda \arg z_n} = e^{i\lambda \arg z_n} \cdot e^{2ik_n\lambda\pi} = e^{i\lambda(\arg z_n + 2k_n\pi)} \longrightarrow e^{i\lambda \arg z} =$
(εφ' όσον η συνάρτηση $t \in \mathbb{R} \to e^{it}$ είναι συνεχής) $= \varphi(z)$.
Από τον χαρακτηρισμό της συνέχειας με ακολουθίες έπεται το συμπέρασμα.
Για μια απλούστερη απόδειξη του ισχυρισμού παρατηρούμε ότι: Αν $\lambda = 1$