4) Αν με $w^{1/2}$, $w\neq 0$, εννοούμε τον κύριο κλάδο της τετραγωνικής ρίζας, τότε:

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(z)=(z^2+1)^{1/2}$ και

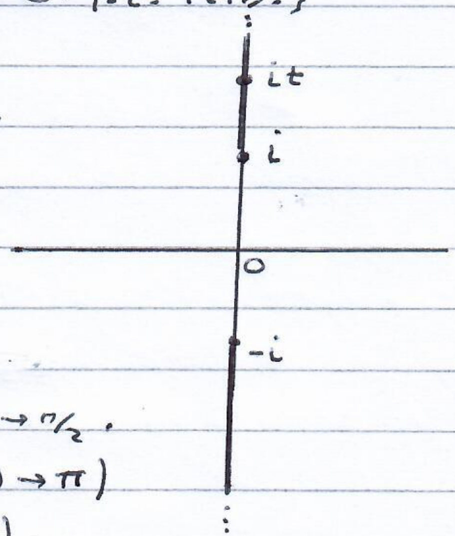
β) τον μεγαλύτερο τόπο D εντός του οποίου η f είναι ολόμορφη.

Λύση α) Αν $z^2+1\neq 0 \iff z\neq \pm i$, τότε θέτοντας $w=z^2+1$ έχουμε ότι η ποσότητα $w^{1/2}$ ορίζεται και $w^{1/2}=e^{\frac{1}{2}\log z}$, όπου $\log z$ είναι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου. Έτσι το πεδίο ορισμού Ω της f είναι το $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ και θέτοντας $g(z)=z^2+1$ και $h(z)=z^{1/2}$ τότε $f(z)=h(g(z))$, $z\in\Omega$.

β) Η συνάρτηση $h(z)=z^{1/2}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ (πρβλ. ασκ. 3), άρα θα πρέπει να εντοπίσουμε το σύνολο των σημείων $z\in\mathbb{C}$ ώστε $z^2+1\notin\{t\in\mathbb{R}: t\leq 0\}$. Έτσι οφείλουμε να επιλύσουμε $\forall\, t\leq 0$ την εξίσωση $z^2+1=t$ και να εξαιρέσουμε από το $\mathbb{C}$ τις λύσεις αυτών των εξισώσεων.

Θέτουμε $w=t-1$, όπου $w\in\mathbb{R}$ με $w\leq -1$ ($z^2+1=t$, και $t\leq 0 \iff z^2=t-1\leq -1$). Τότε $z^2=w \iff z_0=i\sqrt{|w|}$ και $z_1=-i\sqrt{|w|}$, όπου $|w|\geq 1$. Έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στον τόπο

$$D=\mathbb{C}\setminus\left(i[1,+\infty)\cup i(-\infty,-1]\right)=\mathbb{C}\setminus\{it: |t|\geq 1\}$$



Στα σημεία it με $|t|>1$ η συνάρτηση είναι μη συνεχής. Για να το ελέγξουμε στο σημείο π.χ. $z=it$, όπου $t>1$ θεωρούμε τις ακολουθίες $z_n=\frac{1}{n}+it$, και $w_n=-\frac{1}{n}+it$. Τότε $z_n\to it$, $w_n\to it$, $\arg z_n\to \pi/2$ και $\arg w_n\to\pi/2$. Έπεται ότι, ($z_n^2+1\to -t^2$ και $\arg(z_n^2+1)\to\pi$) και ($w_n^2+1\to -t^2$ και $\arg(w_n^2+1)\to -\pi$). Από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$f(z_n)=(z_n^2+1)^{1/2}\to it \quad \text{και} \quad f(w_n)=(w_n^2+1)^{1/2}\to -it.$$