18) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)^{n+1}$, όπου $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$ και αποδείξτε ότι $f(z)=\log(z/\alpha)$, για $z\in\Delta(\alpha,R)$.

19) Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους:

α) Κάθε πολυώνυμο $P(z)=\sum_{n=0}^{m}\alpha_n z^n$

β) Οι συναρτήσεις e^z, $\cos z$ και $\sin z$

γ) Η συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{\beta-z}$, $z\neq\beta$, όπου $\beta\in\mathbb{C}$.

[Υπόδ. Έστω $\alpha\in\mathbb{C}$. Για το (α) γράφουμε $z^n=[(z-\alpha)+\alpha]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}(z-\alpha)^k$ και άρα $P(z)=\sum_{n=0}^{m}b_n(z-\alpha)^n$ για κάποια $b_n\in\mathbb{C}$. Για την e^z παρατηρούμε ότι $e^z=e^{\alpha}\cdot e^{z-\alpha}$ και άρα $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\alpha}}{n!}(z-\alpha)^n$. Για την $\cos z$ γράφουμε την ταυτότητα $\cos z=\cos[(z-\alpha)+\alpha]=\cos\alpha\cdot\cos(z-\alpha)-\sin\alpha\cdot\sin(z-\alpha)$ και συνεχίζουμε όπως για την e^z. Για την συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{\beta-z}$ υποθέτουμε ότι $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{\beta\}$ και παρατηρούμε ότι αν $z\in\Delta(\alpha,|\beta-\alpha|)$ τότε $\left|\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right|<1$ και άρα $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^n=\frac{\beta-\alpha}{\beta-z}$.

20) Αποδείξτε ότι για κάθε $z\in\mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^z$.

[Υπόδ. Παρατηρούμε ότι αν $\varphi(n)=n\log\left(1+\frac{z}{n}\right)$ τότε $e^{\varphi(n)}=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ και ακόμη ότι

$$\varphi(n)=\frac{\log\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\longrightarrow z \text{ καθώς το } n\to\infty.]$$

21) Ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$; $z^{2/3}$, i^z, $(\sqrt{3})^z$, $z^{\sqrt{3}}$, $(-1)^z$, $(1-i)^{z^3}$, $(z^2+1)^{1/2}$, $(1+2i)^{f(z)}$, όπου $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

22) Έστω $f(z)=e^{2\pi i z}$, $z\in\mathbb{C}$ και $H=\{x+iy: y>0\}$ το άνω ημιεπίπεδο. Να βρεθεί η εικόνα $f(H)$ του H.

[Υπόδ. $f(H)=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<1\}$.]