ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ – 2/7/2020

Θέμα 1ον *Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση* $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ *τέτοια ώστε*

$$\frac{df(z)}{dz}=z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right) \text{ για } z\in\mathbb{C}-\{0\};$$

Απάντηση. Κατ' αρχάς, από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, έχουμε

$$\int_{|z|=1} z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right)dz = 2\pi i Res\left(z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right),0\right).$$

Αλλά από το ανάπτυγμα

$$\cos w = 1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\frac{w^6}{6!}+\cdots,\ w\in\mathbb{C},$$

παίρνουμε το ανάπτυγμα Laurent

$$z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right)=z\left[1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1+i}{z}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1+i}{z}\right)^4-\cdots\right], \text{ για } z\in\mathbb{C}-\{0\}.$$

Από τον συντελεστή του όρου $1/z$ στο ανωτέρω ανάπτυγμα, βρίσκουμε

$$Res\left(z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right),0\right)=-\frac{1}{2!}(1+i)^2=-i.$$

Συνεπώς

$$\int_{|z|=1} z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right)dz = 2\pi i(-i)=2\pi\neq 0.$$

Άρα δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f'(z)=z\cos\left(\frac{1+i}{z}\right) \text{ για } z\in\mathbb{C}-\{0\},$$

αφού για μια ολόμορφη συνάρτηση $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=1} f'(z)dz=0.$$

Θέμα 2ον *Θεωρήστε την συνάρτηση* $f:\mathbb{C}-\{i\}\to\mathbb{C}$ *με*

$$f(z)=\sin^2(iz\pi)\log(1+iz) \text{ για } z\in\mathbb{C}-\{i\}.$$

Σε ποιά σημεία του συνόλου $\mathbb{C}-\{i\}$ *έχει η συνάρτηση* f *μιγαδική παράγωγο;*

Απάντηση. Κατ' αρχάς η συνάρτηση $\log(1+iz)$ ορίζεται όταν $1+iz\neq 0 \iff z\neq i$, αλλά είναι ολόμορφη (ακριβώς) στο ανοικτό σύνολο

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 + iz \notin (-\infty, 0]\}.$$

Τώρα $1 + iz = -\alpha$, όπου $\alpha \geq 0$, αν και μόνο αν $iz = -\alpha - 1 \Leftrightarrow z = i + \alpha i$. Άρα $\Omega = \mathbb{C} - \{i + \alpha i : \alpha \geq 0\}$. Αλλά πάνω στην ημιευθεία $\{i + \alpha i : \alpha > 0\}$ (στα σημεία της οποίας η συνάρτηση $\log(1 + iz)$ δεν έχει μιγαδική παράγωγο) υπάρχουν ρίζες της συνάρτησης $\sin(iz\pi)$, συγκεκριμένα αυτές οι ρίζες είναι οι αριθμοί $\rho = ik$, $k = 2, 3, 4, \ldots$. Ισχυριζόμαστε ότι σε κάθε ένα απ' αυτά τα σημεία ρ, η συνάρτηση f έχει μιγαδική παράγωγο. Πράγματι, για κάθε ένα σημείο ρ,

$$\frac{f(z) - f(\rho)}{z - \rho} = \frac{\sin^2(iz\pi)}{z - \rho} \log(1 + iz).$$

Αλλά η συνάρτηση $\log(1 + iz) = \log|1 + iz| + i \arg(1 + iz)$ είναι φραγμένη όταν το z είναι «κοντά» στο σημείο ρ (αφού $-\pi < \arg \leq \pi$ και $\log|\cdot|$ είναι συνεχής) και

$$\lim_{z \to \rho} \frac{\sin^2(iz\pi)}{z - \rho} = \left(\frac{d}{dz} \left[\sin^2(iz\pi) \right] \right) \Bigg|_{z=\rho} = \left[2i\pi \sin(iz\pi) \cos(iz\pi) \right] \Big|_{z=\rho} = 0.$$

Συνεπώς

$$f'(\rho) = \lim_{z \to \rho} \frac{f(z) - f(\rho)}{z - \rho} = 0.$$

Το συμπέρασμα είναι ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} - \{i\} \to \mathbb{C}$ έχει μιγαδική παράγωγο στα σημεία του συνόλου $\Omega \cup \{ki : k = 2,3,4,\ldots\}$, και μόνο σ' αυτά.

Θέμα 3^{ον} *Αποδείξτε ότι αν* $\alpha \in \mathbb{R}$ *με* $0 < \alpha < 1$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$ *με* $|\mathrm{Im}\lambda| > |\mathrm{Re}\lambda|$ *τότε*

$$\left| \alpha^{\lambda^2} \right| > 1.$$

Με τις ίδιες υποθέσεις για τα α *και* λ, *είναι σωστό ότι* $\left| \left(\alpha^{\lambda} \right)^{\lambda} \right| > 1$;

Απάντηση. Γράφοντας $\lambda = x + iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε – από την υπόθεση – ότι $|y| > |x| \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 0$. Αλλά $\lambda^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ και $\alpha^{\lambda^2} = \exp[\lambda^2 (\log \alpha)]$. Συνεπώς

$$\left| \alpha^{\lambda^2} \right| = \exp[\mathrm{Re}(\lambda^2)(\log \alpha)] = e^{(x^2 - y^2)\log \alpha} > 1,$$

αφού $(x^2 - y^2)\log \alpha > 0$.

Για το τελευταίο ερώτημα ας πάρουμε $\alpha = 1/e$ (οπότε $\log \alpha = -1$) και ας θεωρήσουμε τους αριθμούς $\lambda = \beta i$ με $\beta > 0$ (οι οποίοι ικανοποιούν την υπόθεση $|\mathrm{Im}\lambda| > |\mathrm{Re}\lambda|$). Τότε

$$\left|\left(\alpha^{\lambda}\right)^{\lambda}\right| = \left|\left(\alpha^{\beta i}\right)^{\beta i}\right| = \left|\exp[\beta i \log(\alpha^{\beta i})]\right| = \left|\exp[\beta i \log(e^{-\beta i})]\right|.$$

Αν επομένως επιλέξουμε για $\beta = 3\pi/2$ τότε $e^{-\beta i} = i$, $\log(e^{-\beta i}) = i\pi/2$, και συνεπώς –με αυτήν την επιλογή των α και λ, δηλαδή με $\alpha = 1/e$ και $\lambda = 3\pi i/2$–

$$\left|\left(\alpha^{\lambda}\right)^{\lambda}\right| = \left|\exp[\beta i \log(e^{-\beta i})]\right| = e^{-\beta\pi/2} = e^{-3\pi^2/4} < 1.$$

Άρα – εν γένει – δεν είναι σωστό ότι $\left|\left(\alpha^{\lambda}\right)^{\lambda}\right| > 1$.

Θέμα 4ον *Αποδείξτε ότι αν* a_n *είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^z z^n}{e^{ia_n} + z^n}$$

συγκλίνει για $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| < 1$ *και ορίζει (γι' αυτά τα* z*) ολόμορφη συνάρτηση.*

Απάντηση. Έστω $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Αν $z \in \Delta$ τότε

$$\left|e^{ia_n} + z^n\right| \geq \left|e^{ia_n}\right| - \left|z^n\right| = 1 - |z|^n > 0.$$

Άρα οι συναρτήσεις

$$\frac{n^z z^n}{e^{ia_n} + z^n} = \frac{e^{z \log n} z^n}{e^{ia_n} + z^n}, \; n = 1,2,3,... ,$$

ορίζονται και είναι ολόμορφες για $z \in \Delta$. Ισχυριζόμαστε ότι η ανωτέρω σειρά (των συναρτήσεων του z) συγκλίνει ομοιόμορφα – ως προς το z – στα συμπαγή υποσύνολα του Δ. Για την απόδειξη αυτού ας θεωρήσουμε ένα r με $0 < r < 1$ και ας παρατηρήσουμε ότι όταν $|z| \leq r$,

$$\left|\frac{n^z z^n}{e^{ia_n} + z^n}\right| \leq \frac{\left|e^{z \log n} z^n\right|}{1 - r^n} \leq \frac{e^{|z| \log n} |z|^n}{1 - r} \leq \frac{n^r r^n}{1 - r} \leq \frac{n r^n}{1 - r}.$$

Αλλά, αφού $0 < r < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r^n}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \sum_{n=1}^{\infty} n r^n < +\infty,$$

και συνεπώς, από το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^z z^n}{e^{ia_n} + z^n} \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα για } z \text{ με } |z| \leq r.$$

Αυτό συνεπάγεται τον ανωτέρω ισχυρισμό και το αποδεικτέο έπεται από το θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass.

Θέμα 5ον *Θεωρήστε το πολυώνυμο* $p(z) = z^5 - iz^4 + (1+i)z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ *όπου* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *με* $|\alpha| < 5^2$, $|\beta| < 5^3$ *και* $|\gamma| < 5^4$, *και αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα*

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=5\}} z^2 \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

δεν εξαρτάται από τα α, β, γ, *υπολογίζοντάς το. Ποιά είναι η τιμή του ανωτέρω ολοκληρώματος όταν* $|\gamma| = 5^6$ *(εννοείται με* $|\alpha| < 5^2$ *και* $|\beta| < 5^3$*)*;

Απάντηση. 1η περίπτωση: $|\alpha| < 5^2$, $|\beta| < 5^3$ και $|\gamma| < 5^4$. Θα αποδείξουμε ότι τότε όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $p(z)$ ευρίσκονται μέσα στον κύκλο $\mathrm{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 5\}$. Πράγματι γράφοντας

$$p(z) = z^5 + g(z) \text{ όπου } g(z) = -iz^4 + (1+i)z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

παρατηρούμε ότι

$$|g(z)| = \left| -iz^4 + (1+i)z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma \right| \le |z|^4 + \sqrt{2}|z|^3 + |\alpha||z|^2 + |\beta||z| + |\gamma|,$$

και βρίσκουμε ότι $|g(z)| < 5^5 = |z^5|$ για $z \in \mathrm{K}$. Άρα, από το θεώρημα του Rouché, το πολυώνυμο $p(z) = z^5 + g(z)$ έχει 5 ρίζες μέσα στον κύκλο K – δηλαδή όσες και το πολυώνυμο z^5. Άρα το δοθέν ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i \sum_{1\le j\le 5} \rho_j^2$ όπου ρ_j, $j = 1,2,3,4,5$, είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $p(z)$. (Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα των υπολοίπων και ότι $Res\left(z^2 \frac{p'(z)}{p(z)}, \rho_j \right) = mult(p, \rho_j)\rho_j^2$.) Άλλα, από τις σχέσεις Vieta, $\sum_{1\le j\le 5} \rho_j^2 = [\sum_{1\le j\le 5} \rho_j]^2 - 2\sum_{1\le j<k\le 5} \rho_j \rho_k = i^2 - 2(1+i) = -3 - 2i$.

Άρα στην περίπτωση αυτή

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=5\}} z^2 \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 2\pi i(-3-2i) = 4\pi - 6\pi i.$$

2η περίπτωση: $|\alpha| < 5^2$, $|\beta| < 5^3$ και $|\gamma| = 5^6$. Τότε

$$\left| z^5 - iz^4 + (1+i)z^3 + \alpha z^2 + \beta z \right| < 5^6 = |-\gamma| \text{ για } z \text{ με } |z| \le 5.$$

Άρα $|z| \le 5 \Rightarrow p(z) \ne 0$, δηλαδή όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $p(z)$ ευρίσκονται έξω από τον κύκλο K, οπότε στην περίπτωση αυτή, από το θεώρημα του Cauchy,

$$\int_{\{z\in\mathbb{C}:|z|=5\}} z^2 \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 0.$$