Λύση της άσκησης 5.

Είναι σαφές ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z \neq 0$.

1η περίπτωση. $n=1$. Έτσι έχουμε να επιλύσουμε την $z=\bar{z}$.

Αν $z=a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, τότε $a+ib=a-ib \Leftrightarrow b=-b \Leftrightarrow b=0$.

Άρα οι λύσεις της $z=\bar{z}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

2η περίπτωση. $n \geq 2$. Έχουμε τότε να επιλύσουμε την $z^n=\bar{z}$ (με $z \neq 0$). Τότε έχουμε $z^n=\bar{z} \Leftrightarrow z^{n-1}=\frac{\bar{z}}{z} \Rightarrow |z|^{n-1}=\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=\frac{|\bar{z}|}{|z|}=1$. Άρα $|z|^{n-1}=1$ $(n \geq 2)$ και συνεπώς $|z|=1$. Έτσι ο z βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο.

Παρατηρούμε ότι $\{z^n=\bar{z}$ και $|z|=1\} \Leftrightarrow z^{n+1}=\bar{z}\cdot z=|z|^2=1$.

Επομένως καταλήγουμε στην ισοδύναμη εξίσωση

$$z^{n+1}=1$$

η οποία έχει ως λύσεις τις $\zeta_k=e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, $k=0,1,\dots,n$.

Λύση της άσκησης 6. Παρατηρούμε ότι το 0 δεν είναι λύση της $(z+1)^5+z^5=0$. Άρα η εξίσωση αυτή ισοδύναμη με την

$$\left(\frac{z+1}{z}\right)^5=-1.$$

Θέτουμε $w=\frac{z+1}{z}$ και έτσι έχουμε να επιλύσουμε την εξίσωση

$$w^5=-1.$$

Επειδή $\arg(-1)=\pi$ οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι οι

$$w_k=e^{i\frac{2k\pi+\pi}{5}}, \quad k=0,1,2,3,4 \qquad (1)$$

Έχουμε ότι $w=\frac{z+1}{z} \Leftrightarrow z=\frac{1}{w-1}$. Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι $z_k=\frac{1}{w_k-1}$, $k=0,1,2,3,4$.

Θέτουμε $\varphi_k=\frac{2k\pi+\pi}{5}$, $k=0,1,2,3,4$ και παρατηρούμε ότι

$$z_k=\frac{1}{w_k-1}=\frac{\overline{(w_k-1)}}{|w_k-1|^2}=\frac{\cos\varphi_k-1-i\sin\varphi_k}{(\cos\varphi_k-1)^2+\sin^2\varphi_k}=\frac{\cos\varphi_k-1-i\sin\varphi_k}{-2(\cos\varphi_k-1)}.$$ Άρα

$\operatorname{Re} z_k=-\frac{1}{2}$.