Ασκήσεις και παρατηρήσεις

Η δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2+bz+c=0$. $(a,b,c\in\mathbb{C})$

Υποθέτουμε ότι $a\neq 0$, τότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$4a^2z^2+4abz=-4ac.$$

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο προσθέτοντας στα δύο μέλη τον b^2 και έχουμε

$$(2az+b)^2=b^2-4ac \qquad (1)$$

Αν συμβολίσουμε με w την μία από τις δύο τετραγωνικές ρίζες του b^2-4ac (τότε η άλλη θα είναι η $-w$) η (1) έχει ως συνέπεια ότι

$$2az+b=\pm w.$$

Έτσι ευρίσκουμε τις λύσεις

$$z_1=\frac{-b+w}{2a} \quad \text{και} \quad z_2=\frac{-b-w}{2a} \qquad (2)$$

Παρατήρηση. Έστω $z\neq 0$ μιγαδικός και $\theta=\arg(z)$, δηλ. θ = το πρωτεύον όρισμα του z $(\theta\in(-\pi,\pi])$. Άρα $z=|z|\cdot e^{i\theta}$.
Αν n θετικός ακέραιος με $n\geq 2$, συμφωνούμε να συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{z}$ (ή $\sqrt{z}$ αν $n=2$) την n-οστή ρίζα $z_0=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\theta/n}$ του z (αν $z=0$ θέτουμε $\sqrt[n]{0}=0$). Έτσι ορίζεται μία μονότιμη απεικόνιση

$$z\in\mathbb{C}\mapsto\sqrt[n]{z}\in\mathbb{C}$$

η οποία επεκτείνει την αντίστοιχη απεικόνιση

$$x\in[0,+\infty)\mapsto\sqrt[n]{x}\in[0,+\infty).$$

Με την σύμβαση αυτή οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $az^2+bz+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ δίνονται από τον τύπο

$$z_k=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad k=1,2$$

Άσκηση. 1) Να υπολογισθούν οι ρίζες:

α) $\sqrt[n]{-1}$ β) $\sqrt[n]{\pm i}$ και

γ) $\sqrt[n]{2\pm i}$, $n\geq 2$

2) Να λυθεί η εξίσωση $3z^2-iz+5=0$.