Ασκήσεις (Κεφ. 1)

1) Εκφράστε τους μιγαδικούς αριθμούς στην μορφή $a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) $\sqrt{2}\,i(\pi+2i)$ β) $(i-1)(2-i)$ γ) $(i+1)(i-2)(i+3)$

δ) $\frac{1}{2+i}$ ε) $\frac{2i}{3-i}$ στ) $\frac{1+i}{i}$ και ζ) $\frac{i}{1+i}$

2) Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα των $z\in\mathbb{C}$ τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες:

α) $|z-i+2|=2$ β) $|z-i+2|>4$ γ) $1<|z-i+2|<2$

δ) $\operatorname{re} z>2$ ε) $1<\operatorname{Im} z<2$ ε) $1<\operatorname{Im}(z-i)<2$

3) Εκφράστε τους δοσμένους μιγαδικούς:

(Α) $1\pm i$, $-1\pm i$ και $1\pm i\sqrt{2}$ σε τριγωνομετρική μορφή

(Β) e^{3in}, $e^{2\pi i/3}$, $\pi e^{-i\pi/3}$ και $3e^{-5i\pi/4}$ στην συνήθη μορφή ($a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$).

4) Να λυθούν οι εξισώσεις: $z^5=1$, $z^{10}+4=0$, $z^4=i$, $z^2-(3+i)z+(2+2i)=0$ και $z^2-3z+1+i=0$.

5) Να λυθεί η εξίσωση $z^n=\bar{z}$ ($n\in\mathbb{N}$).

6) Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $(z+1)^5+z^5=0$ ευρίσκονται στην ευθεία $x=-\frac{1}{2}$.

7) Αποδείξτε ότι ο ρίζες της εξίσωσης $(1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}=0$ ($n\in\mathbb{N}$) δίνονται από τύπο

$$z_k = i\tan\frac{(2k+1)}{4n}\pi\ ,\quad k=0,1,2,\dots,2n-1\,.$$

[Υπόδειξη: Διαιρέστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $1-z$ και θέστε $w=\frac{1+z}{1-z}$.]

8) Αποδείξτε την ταυτότητα:

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}\ ,\ \theta\in\mathbb{R},\ \theta\neq 2m\pi\ (m\in\mathbb{Z}).$$