Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

Αθήνα 2022

Οι σημειώσεις αυτές είναι ένα εισαγωγικό μάθημα στην Μιγαδική Ανάλυση, όπως έχει διαμορφωθεί τα τελευταία χρόνια στο τμήμα μας. Στην διαμόρφωση του μαθήματος συνέβαλα σε κάποιον βαθμό και εγώ προσωπικά, καθώς το έχω διδάξει αρκετές φορές.

Ο συμβολισμός και η ορολογία είναι λίγο πολύ καθιερωμένοι. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους κκ. Κώστα Θανόπουλο και Γεώργιο Βασιλειάδη (ο δεύτερος υπήρξε και μαθητής μου κατά το παρελθόν) οι οποίοι κοπίασαν για να μεταφέρουν τις χειρόγραφες σημειώσεις μου στο Word.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 6

Σειρές Laurent και η Θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων σελ.

1. Οι μιγαδικοί αριθμοί

Αρχίζουμε την συζήτηση με τον ορισμό ενός συστήματος αριθμών, το οποίο περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς και επιτρέπει την λύση της εξίσωσης $x^2+1=0$. Αυτό το σύστημα είναι γνωστό ως οι μιγαδικοί αριθμοί.

Υπάρχει μια φυσιολογική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως ένα επίπεδο ανάλογα με την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών ως μια ευθεία.

Η ελευθερία την οποία διαθέτει το επίπεδο σε σχέση με την ευθεία προσδίδει στο αντικείμενο της Μιγαδικής Ανάλυσης έντονη γεωμετρική χροιά

1.1 Η Άλγεβρα των Μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 1.1

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$C = R\times R = \{(a,b) : a,b \in R\} \qquad \left(=R^2\right)$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις : (α) της πρόσθεσης , αν $z=(a,b)$ και $\omega=(c,d)$ είναι στοιχεία του C τότε ,

$$z+\omega \underset{o\rho}{=} (a+c, b+d)$$

και (β) του μιγαδικού πολλαπλασιασμού, το γινόμενο $z\cdot\omega$ των μιγαδικών $z=(a,b)$ και $\omega=(c,d)$ ορίζεται με τον τύπο,

$$z\cdot\omega \underset{o\rho}{=} (ac-bd, ad+bc).$$

Πρόταση 1.2 .

Το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών με τις πράξεις της πρόσθεσης και του μιγαδικού πολλαπλασιασμού που ορίστηκαν ως ανωτέρω (γράφουμε συνήθως $(C,+,\cdot)$) είναι ένα αλγεβρικό σώμα.

Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες

(Ι) Για την πρόσθεση

(α) $x+y=y+x, \quad x,y\in C$ (μεταθετική ιδιότητα)

(β) $x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x,y,z\in C$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(γ) το στοιχείο $0=(0,0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης , δηλαδή $0+x=x+0,$ $x\in C$

(δ) για κάθε $x \in C$ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $y \in C$ το οποίο συμβολίζουμε με $-x$ ώστε $x + y = 0$.

Οι παραπάνω ιδιότητες χαρακτηρίζουν το σύστημα $(C,+)$ ως μια <u>μεταθετική</u> (αβελιανή) ομάδα .

(ΙΙ) Για τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες, ακριβέστερα το $C \setminus \{0\}$ είναι μεταθετική ομάδα με μοναδιαίο (ουδέτερο) στοιχείο το $1 = (1,0)$.

(ΙΙΙ) Επίσης ισχύει ότι $x(y+z) = xy + xz$, για $x, y, z \in C$

Δηλαδή ο μιγαδικός πολλαπλασιασμός επιμερίζει την πρόσθεση.

Έστω $z = (a,b) \in C \setminus \{0\}$ τότε το αντίστροφο του z ως προς την πράξη του μιγαδικού πολλαπλασιασμού είναι το στοιχείο

$z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2} , \dfrac{-b}{a^2+b^2} \right)$, το οποίο συμβολίζεται με $\dfrac{1}{z}$. Το γεγονός ότι $z \cdot z^{-1} = 1\left(= (1,0)\right)$ ελέγχεται εύκολα εφαρμόζοντας τον ορισμό του μιγαδικού πολλαπλασιασμού.

<u>Παρατήρηση 1.3</u>

1) Η απεικόνιση $\varphi : R \to C$: $\varphi(a) = (a,0)$ ελέγχεται εύκολα ότι είναι ένας <u>μονομορφισμός</u> σωμάτων . Δηλαδή είναι $1-1$ και διατηρεί τις αλγεβρικές πράξεις του αθροίσματος και του γινομένου ($\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ και $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ για κάθε $a, b \in R$). Επομένως μπορούμε να <u>ταυτίσουμε</u> τον πραγματικό a με τον μιγαδικό $(a,0)$.

2) Παρατηρούμε ότι αν $z = a \in R$ και $\omega = (c,d)$ τότε

$$a \cdot (c,d) = (a,0) \cdot (c,d) \quad (= (ac, ad)).$$

Αυτό σημαίνει ότι ο γνωστός μας βαθμωτός πολλαπλασιασμός (το R^2 με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι διανυσματικός χώρος επί του R διάστασης 2, δηλαδή $\dim_R C = 2$) είναι ειδική περίπτωση του μιγαδικού πολλαπλασιασμού. Το $C = R^2$ είναι και C διανυσματικός χώρος επί του C και σ'αυτή την περίπτωση η διάστασή του είναι $\dim_C C = 1$.

Αφήνουμε ως άσκηση να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε στοιχείο του $z \in C$ με $z \neq 0$ παράγει τον C.

Έτσι το C με τις πράξεις που ορίστηκαν πρίν δεν είναι τίποτα άλλο από τον διανυσματικό χώρο R^2 (ο οποίος γεωμετρικά ταυτίζεται με τα σημεία ενός επιπέδου) με την γνωστή μας (διανυσματική) πρόσθεση και την καινούρια πράξη του μιγαδικού πολλαπλασιασμού.

Η φύση του μιγαδικού πολλαπλασιασμού θα εξηγηθεί λίγο αργότερα γεωμετρικά.

<u>Ορισμός 1.4</u>

Θέτουμε $i=(0,1)$ και καλούμε αυτό το μιγαδικό <u>φανταστική μονάδα</u>.

Ο μιγαδικός $i=(0,1)$ έχει την ιδιότητα

$$i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$$

Παρατηρούμε ότι, λαμβάνοντας υπόψιν την ταύτιση $a=(a,0)$ και τον συμβολισμό $i=(0,1)$ έχουμε $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)\cdot(1,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+ib$.

Άρα κάθε μιγαδικός (a,b) γράφεται στην συνήθη μορφή $a+ib$.

Επίσης ο μιγαδικός πολλαπλασιασμός λαμβάνει την μορφή

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

η οποία εξηγεί καλύτερα και τον ορισμό του.

Σημειώνουμε ακόμη ότι από τα παραπάνω έπεται αμέσως ότι η εξίσωση $z^2+1=0$ επιλύεται στο C και οι ρίζες της είναι $\pm i$.

<u>Παρατήρηση 1.5</u>

Γνωρίζουμε ότι το σώμα $(R,+,\cdot)$ των πραγματικών αριθμών έχει μια ολική διάταξη, την γνωστή μας διάταξη, η οποία είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή του δηλαδή,

(α) $x\le y\Rightarrow x+z\le y+z \quad \forall\ z\in \mathrm{R}$ και

(β) $x\le y$ και $z\ge 0\Rightarrow xz\le yz$.

Στο σώμα των $(C,+,\cdot)$ δεν υπάρχει μια ολική διάταξη με τις ανάλογες ιδιότητες.
Πράγματι, ας υποθέσουμε- προς απαγωγή σε άτοπο - ότι υπάρχει μια τέτοια διάταξη. Τότε για κάθε $z\in C$ θα έχουμε $z\ge 0$ ή $z\le 0$. Αν $z\ge 0$ τότε $z^2=z\cdot z\ge 0$ (από την (β)). Αν $z\le 0$ τότε $z+(-z)\le 0+(-z)$ ή $0\le -z$ (από την (α)). Επομένως $(-z)(-z)\ge 0$ ή $z^2\ge 0$.
Άρα (γ) $z^2\ge 0$ για κάθε $z\in C$.

Αλλά αφού $1=1\cdot 1\ge 0$ θα έχουμε $1\ge 0$ και επειδή $1\ne 0$, θα ισχύει $1\rangle 0$. Αν τώρα $z\in C$ τότε από την (γ) έπεται ότι $z^2+1\ge 0+1=1\rangle 0$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $z^2+1=0$ <u>δεν</u> επιλύεται στο C άτοπο.

Στο εξής θα γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στην μορφή $a+ib$ και πάντοτε θα εννοούμε (αν δεν δίδονται περαιτέρω εξηγήσεις) ότι a και b είναι πραγματικοί αριθμοί.

Όταν κάνουμε πράξεις με μιγαδικούς της μορφής $a+ib$ μπορούμε να τις διαχειριζόμαστε όπως τις αντίστοιχες με τους πραγματικούς αριθμούς, αντικαθιστώντας το i^2 με το -1 οποτεδήποτε χρειάζεται. Έτσι έχουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για τις πράξεις μιγαδικών.

Πρόσθεση :

$$\left(a+ib\right)+\left(c+id\right)=a+ib+c+id=\left(a+c\right)+i\left(b+d\right)$$

Μιγαδικός πολλαπλασιασμός :

$$\left(a+ib\right)\left(c+id\right)=ac+iad+ibc+i^2bd=\left(ac-bd\right)+i\left(ad+bc\right)$$

Αφαίρεση :

$$\left(a+ib\right)-\left(c+id\right)=a+ib-c-id=\left(a-c\right)+i\left(b-d\right)$$

Διαίρεση : Αν $c+id\neq 0$ (ισοδύναμα , $c^2+d^2\rangle 0$),

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-id}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-icd+idc-i^2d^2}=$$
$$\frac{ac+bd+i\left(bc-ad\right)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Οι δυνάμεις μιγαδικών αριθμών με ακέραιους εκθέτες ορίζονται με τον ίδιο τρόπο που ορίζονται οι δυνάμεις για πραγματικούς αριθμούς. Έτσι ορίζουμε:

$z^1=z$, $z\in C$

και με επαγωγή

$z^n=z^{n-1}\cdot z,\ z\in C,\ n\geq 2$

$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n},\ z\in C,\ \ z\neq 0,\ n\geq 1$

$z^0=1,\ z\in C\ ,\ z\neq 0\,.$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων τις οποίες γνωρίζουμε για πραγματικούς αριθμούς ισχύουν και για μιγαδικούς αριθμούς:

$$z^n\cdot z^m=z^{n+m}\,,\ \left(z^n\right)^m=z^{nm}\,,\ \left(z\omega\right)^n=z^n\cdot\omega^n\,,\ n,m\in Z$$

(όπου z και ω δεν μπορεί να είναι ίσοι με 0 αν οι εκθέτες τους είναι αρνητικοί). Η έκφραση 0^0, όπως στην περίπτωση των πραγματικών , δεν έχει νόημα για τους μιγαδικούς.

Πολυώνυμα και ρητές συναρτήσεις (δηλαδή πηλίκα πολυωνύμων) ορίζονται όπως και στην περίπτωση του R (πρβλ. και το παράδειγμα 1.41 (3)).

Αν $n\in N$, μπορούμε με επαγωγή να αποδείξουμε ότι ο διωνυμικός τύπος του Newton ισχύει και για μιγαδικούς αριθμούς z και ω

$$\left(z+\omega\right)^n=\sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}z^{n-\kappa}\omega^{\kappa}$$

όπου $\binom{n}{0}=1$ και $\binom{\nu}{\kappa}=\dfrac{n(n-1)...(n-\kappa+1)}{\kappa!}$, $1\le\kappa\le n$.

Παραδείγματα 1.5

1) $$i^{4n}=\left(i^4\right)^n=1^n=1\,,\quad i^{4n+1}=i^{4n}\cdot i=i$$

$$i^{4n+2}=i^{4n}\cdot i^2=-1\,,\quad i^{4n+3}=i^{4n}\cdot i^3=i^3=-i$$

2) $$\left(1+i\right)^{20}=-2^{10}$$

Πράγματι $\left(1+i\right)^{20}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{10}=\left(1+i^2+2i\right)^{10}=\left(2i\right)^{10}=2^{10}\cdot i^{10}=$

$=2^{10}\cdot\left(i^2\right)^5=2^{10}\cdot\left(-1\right)=-2^{10}=-1024$.

3) Οι ακόλουθες εκφράσεις είναι μιγαδικό πολυώνυμο και μιγαδική ρητή συνάρτηση αντίστοιχα:

$$\left(3+i\right)z^5-2z^3+iz-\left(5+2i\right)\quad \text{και}\quad \frac{3z^2+1+i}{z^4+3z^2+2}\,.$$

1.2 Μιγαδικοί συζυγείς και απόλυτη τιμή

Έστω $z=a+ib$ ένας μιγαδικός αριθμός ($a,b\in R$). Τον αριθμό a τον λέμε το πραγματικό μέρος του z και θα τον συμβολίζουμε με $\mathrm{Re}\,z$, δηλαδή $\mathrm{Re}\,z=a$.

Και τον αριθμό b τον λέμε το φανταστικό μέρος του z και θα τον συμβολίζουμε με $\mathrm{I}mz$ δηλαδή $Imz=b$.

Ο μιγαδικός αριθμός $a-bi$ ονομάζεται συζυγής του z και συμβολίζεται με $\overline{z}$, δηλαδή $\overline{z}=a-bi$.

Για παράδειγμα αν $z=2-3i$, τότε $\mathrm{Re}\,z=2$, $\mathrm{Im}\,z=-3$ και $\overline{z}=2+3i$

Από τον ορισμό του συζυγούς ενός μιγαδικού έπεται εύκολα ότι

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2} \quad \text{και} \quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ,$$

και με επαγωγή

$$\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+...+\overline{z_n}$$

και

$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot ...\cdot z_n}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot ...\cdot\overline{z_n}\ .$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ ,\quad z_2\neq 0\quad .$$

Οι παραπάνω ιδιότητες μας λένε ότι ο συζυγής του αθροίσματος , διαφοράς , γινομένου ή πηλίκου είναι ίσος , αντίστοιχα , με το άθροισμα , διαφορά , γινόμενο ή πηλίκο των συζυγών τους.

Ακόμη εύκολα αποδεικνύονται οι ιδιότητες

$$\overline{\left(\overline{z}\right)}=z$$

Και

$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2}\ ,\quad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2i}\ .$$

Παράδειγμα 1.6

Αν $z_0\in C$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0=0$, όπου όλοι οι συντελεστές $a_0,a_1,...,a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί , τότε ο $\overline{z_0}$ είναι επίσης ρίζα του $P(z)$.

Απόδειξη Από τις ιδιότητες της πράξης $z\in C\to\overline{z}\in C$ που αναφέραμε προηγουμένως και την υπόθεση $P(z_0)=0$, έπεται ότι $P\left(\overline{z_0}\right)=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0$.

Η απόλυτη τιμή του μιγαδικού $z=a+ib$ συμβολίζεται με $|z|$ και είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έπεται ότι:

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \qquad (1)$$

$$|z| = |\overline{z}| \qquad (2)$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 . \qquad (3)$$

Από όπου έπεται ότι $\quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \qquad \text{και} \qquad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \qquad (4)$$

$$|a| = |(a,0)|, \ \ a \in R . \qquad (5)$$

Και κατά συνέπεια η απόλυτη τιμή (ή το μήκος στο R) διατηρείται από την εμφύτευση $a \in R \rightarrow (a,0) \in C$ του σώματος R στο σώμα C (πρβλ. παρατήρηση 1.3 (1)).

Επίσης ισχύει η ακόλουθη <u>βασική</u> ιδιότητα της απόλυτης τιμής

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| . \qquad (6)$$

Για να αποδείξουμε την (6) , παρατηρούμε ότι

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = (z_1 \cdot z_2) \cdot \left(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\right)$$

$$= \left(z_1 \overline{z_1}\right)\left(z_2 \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

από όπου έπεται η (6). Με επαγωγή , έχουμε

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \qquad (6\,\alpha)$$

Η (6α) μας λέει ότι η απόλυτη τιμή του γινομένου μιγαδικών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους .

Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για το πηλίκο μιγαδικών

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ \ z_2 \neq 0 . \qquad (7)$$

Η (7) έπεται ανάλογα με την (6).

Από την (6) έπεται προφανώς η ακόλουθη χρήσιμη ιδιότητα του C

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \ \text{ είτε } \ z_2 = 0 . \qquad (8)$$

Η ιδιότητα (6) μαζί με την <u>τριγωνική ανισότητα</u> είναι οι <u>θεμελιώδεις</u> ιδιότητες της απόλυτης τιμής.

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \qquad \text{(τριγωνική ανισότητα).} \qquad (9)$$

Για να αποδείξουμε την (9) , χρησιμοποιούμε τις (2), (3) και (4)

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

$$=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{\left(z_1\overline{z_2}\right)}+|z_2|^2 = |z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)+|z_2|^2$$

$\le |z_1|^2+2\left|z_1\overline{z_2}\right|+|z_2|^2 = |z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2 = \left(|z_1|+|z_2|\right)^2$ από όπου έπεται η τριγωνική ανισότητα . Με επαγωγή μπορούμε να γενικεύσουμε την (9)

$$|z_1+z_2+...+z_n| \le |z_1|+|z_2|+...+|z_n|. \qquad (9α)$$

Δηλαδή , η απόλυτη τιμή του αθροίσματος πεπερασμένου πλήθους μιγαδικών αριθμών είναι μικρότερη είτε ίση με το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

Αντικαθιστώντας στην (9) όπου z_2 με $-z_2$ βρίσκουμε

$$|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|. \qquad (10)$$

Επίσης ισχύει η ανισότητα

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2|. \qquad (11)$$

Η (11) αποδεικνύεται όπως η τριγωνική ανισότητα.

$$|z_1-z_2|^2 = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} = (z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right) = |z_1|^2-2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)+|z_2|^2$$

$\ge |z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2 = \left(|z_1|-|z_2|\right)^2$ από όπου έπεται η (11) (με το πρόσημο (--) δεξιά, για το πρόσημο (+) αντικαθιστούμε το z_2 με το $-z_2$).

Η ταυτότητα του Lagrange και η συνακόλουθη ανισότητα Cauchy- Schwarz ισχύουν και για μιγαδικούς αριθμούς.

<u>Ταυτότητα Lagrange</u> 1.7

Έστω a_j, b_j, $(j=1,2,...n)$ μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει ότι

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\right)-\left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|^2 = \sum_{1\le j\langle k\le n}\left|a_j\overline{b_k}-a_k\overline{b_j}\right|^2.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{a_jb_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}|a_jb_j|^2 + \sum_{1\le j\langle k\le n}\left(a_jb_j\overline{a_kb_k}+a_kb_k\overline{a_jb_j}\right)$$

επίσης έχουμε , $\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}a_j\overline{a_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\overline{b_j}\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|a_jb_j\right|^2+\sum_{1\le j\langle k\le n}\left(a_jb_k\overline{a_jb_k}+a_kb_j\overline{a_kb_j}\right)$$

Η ταυτότητα του Lagrange προκύπτει αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες και κάνοντας χρήση της (3).

<u>Η ανισότητα Cauchy – Schwarz 1.8</u>

Έστω Έστω a_j, b_j, $(j=1,2,...n)$ μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει ότι

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\right).$$

<u>Απόδειξη</u>. Είναι προφανής συνέπεια της ταυτότητας Lagrange.

<u>Παρατήρηση 1.9</u>

Από τα μαθήματα του Απειροστικού λογισμού ΙΙΙ γνωρίζουμε ότι , με τον όρο «Ευκλείδειος χώρος διάστασης n» εννοούμε τον διανυσματικό χώρο R^n εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια νόρμα $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$. Επειδή η απόλυτη τιμή στο $C = R^2$ συμπίπτει προφανώς με την Ευκλείδεια νόρμα , έπεται ότι το σώμα των μιγαδικών C με την απόλυτη τιμή ταυτίζεται με τον Ευκλείδειο χώρο R^2 με την περαιτέρω δομή του μιγαδικού πολλαπλασιασμού

Η τριγωνική ανισότητα της Ευκλείδειας νόρμας στον R^n έπεται με χρήση της ανισότητας Cauchy – Schwarz_η οποία όπως διαπιστώσαμε αποδεικνύεται εύκολα με την βοήθεια της ταυτότητας Lagrange (Βέβαια η ανισότητα Cauchy – Schwarz αποδεικνύεται και με άλλους τρόπους, πρβλ. [M]$_1$ σελ. 2,3). Έτσι η τριγωνική ανισότητα στο C μπορεί να αποδειχθεί και με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω $z_1 = a + ib$ και $z_2 = c + id$, $a,b,c,d \in R$. Τότε

$$|z_1 + z_2|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 .$$

Επίσης $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

Έπεται ότι $(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - 2(ac+bd)$.

Αλλά από την ταυτότητα Lagrange για $n = 2$ (ή και με απευθείας απλή απόδειξη) ισχύει

ότι $$(ad-bc)^2 + (ac+bd)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$ και έτσι

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ge ac + bd ,$$

από όπου έπεται η (9), δηλαδή $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

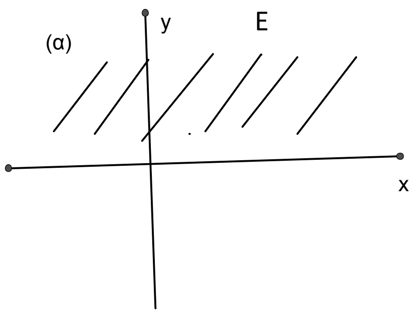
Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η (6) (δηλαδή η $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$) είναι απλή συνέπεια της ταυτότητας Lagrange (Άσκηση.)

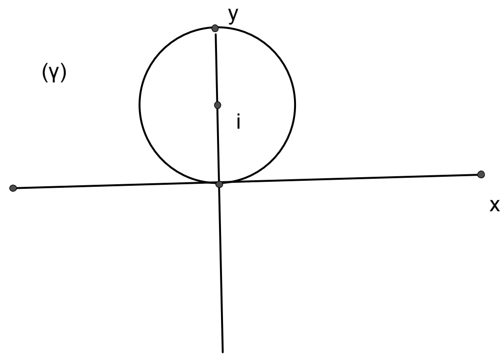
<u>Παραδείγματα 1.10</u>

1) (α) Το σύνολο των σημείων Ε που περιγράφεται από την ανισότητα $\operatorname{Im} z \rangle 0$ είναι το άνω ημιεπίπεδο.

   (β) Το σύνολο $\left\{ z \in C : z = \overline{z} \right\}$ είναι η πραγματική ευθεία.

   (γ) Το σύνολο $\left\{ z : |z - i| < 1 \right\}$ είναι ο δίσκος με κέντρο i και ακτίνα 1.





2) Αν $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων $K = \left\{ \; z \in C : |z| = \lambda \, |z-1| \; \right\}$ είναι είτε κύκλος ή ευθεία.

   Έστω $z = x + iy$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $|z| = \lambda |z-1|$ είναι ισοδύναμη με την

   εξίσωση $$x^2 + y^2 = \lambda^2 \left[\left(x-1 \right)^2 + y^2 \right]$$

   η οποία με την σειρά της ισοδυναμεί με την

   $$\left(\lambda^2 - 1 \right)\left(x^2 + y^2 \right) - 2\lambda^2 x + \lambda^2 = 0 . \qquad (1)$$

   Αν $\lambda = 1$, τότε η (1) μας δίνει την εξίσωση της ευθείας $x = \dfrac{1}{2}$.

   Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 1$, τότε η (1) γράφεται

   $$x^2 + y^2 - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - 1} x + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} = 0 ,$$

   η ακόμη $\left(x - \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \dfrac{\lambda^4}{\left(\lambda^2 - 1 \right)^2} - \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \dfrac{\lambda^2}{\left(\lambda^2 - 1 \right)^2}$. (2)

   Είναι σαφές ότι η (2) είναι εξίσωση κύκλου κέντρου $\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1}, 0 \right)$ και ακτίνας

   $\dfrac{|\lambda|}{\left| \lambda^2 - 1 \right|}$.

(3) Αποδείξτε ότι (α) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2} \, |z|$

και (β) $\max\left(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \right) \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\left(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \right)$.

Έστω $z = x + iy$, τότε $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ και $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Για την απόδειξη της (α) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι
$|z|^2 = x^2 + y^2 \le \left(|x|+|y|\right)^2 \le 2\left(x^2+y^2\right)$.

Για την ανισότητα (β) υποθέτουμε , όπως μπορούμε , ότι $|x| \le |y|$ και παρατηρούμε ότι $\left[\max\left(|x|,|y|\right)\right]^2 = y^2 \le x^2 + y^2 \le 2y^2 = \left[\sqrt{2}\cdot\max\left(|x|,|y|\right)\right]^2$.

(4) Πότε ισχύει ισότητα στην τριγωνική ανισότητα

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \, ;$$

Από την (πρώτη) μέθοδο απόδειξης της τριγωνικής ανισότητας έπεται ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) = \left|z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = |z_1|\cdot|z_2|$.

Άρα $\mathrm{Im}\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right) = 0$ και $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1|\cdot|z_2|$, απ' όπου έπεται ότι

$z_1 = \dfrac{|z_1|\cdot|z_2|}{\overline{z_2}} = \dfrac{|z_1|\cdot|z_2|\cdot z_2}{|z_2|^2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\cdot z_2$ (υποθέτοντας ότι $z_2 \ne 0$).

Το συμπέρασμα είναι ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε είτε $z_1 = \lambda z_2$ ή $z_2 = \lambda z_1$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία z_1 και z_2 του μιγαδικού επιπέδου βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία από το 0. (Ισοδύναμα , τα διανύσματα $\overrightarrow{Oz_1}$ και $\overrightarrow{Oz_2}$ είναι συγγραμμικά και ομόρροπα). Πρόκειται για την περίπτωση $n = 2$ του ακόλουθου γενικότερου αποτελέσματος , το οποίο αποδεικνύεται επαγωγικά , και αφήνεται ως άσκηση. Αν $z_1,\ldots,z_n \in C$ και $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$ τότε οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1,\ldots,z_n \in C$ ευρίσκονται στην ίδια ημιευθεία από το 0.

5) Αποδείξτε την ταυτότητα $1 + z + \ldots + z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$, $z \ne 1$, $n \ge 2$

Παρατηρούμε ότι
$\left(1 + z + \ldots + z^{n-1}\right)(1-z) = \left(1 + z + \ldots + z^{n-1}\right) - \left(z + \ldots + z^n\right) = 1 - z^n$ από όπου έπεται η ζητούμενη ταυτότητα. Η ταυτότητα αυτή σχετίζεται με τον υπολογισμό του αθροίσματος των n - πρώτων όρων <u>γεωμετρικής προόδου</u>.

Αν θέσουμε στην παραπάνω ταυτότητα όπου z το $\dfrac{z}{w}$ παίρνουμε την ταυτότητα

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}\cdot w + \ldots + z\cdot w^{n-2} + w^{n-1}, \quad \left(z \ne w\right).$$

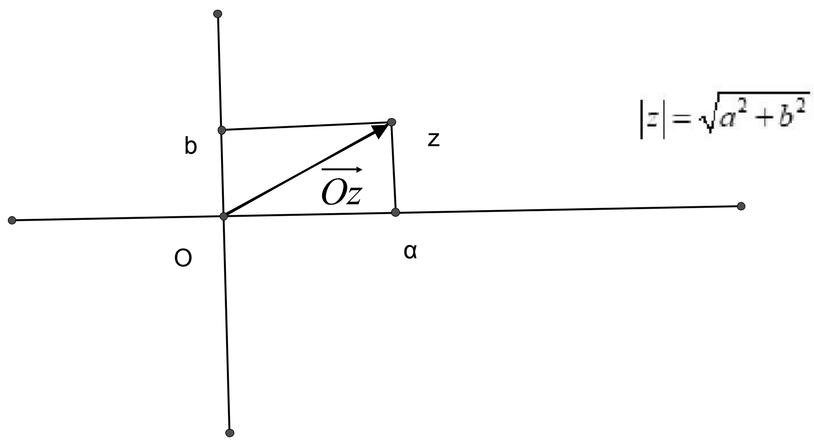
Ακόμη αν n περιττός και θέσουμε στην προηγούμενη ταυτότητα όπου w το $-w$ παίρνουμε ότι $\dfrac{z^n + w^n}{z + w} = z^{n-1} - z^{n-2}\cdot w + \ldots - z\cdot w^{n-2} + w^{n-1} \qquad \left(z + w \ne 0\right)$.

1.3 Η Γεωμετρική Αναπαράσταση των Μιγαδικών αριθμών

Το γεγονός ότι οι μιγαδικοί αριθμοί ορίσθηκαν ως διατεταγμένα ζεύγη , συνδέεται στενά με την γεωμετρική αναπαράσταση του σώματος των μιγαδικών , η οποία ανακαλύφθηκε από τον Wallis, και αναπτύχθηκε αργότερα από τους Argand και Gauss. Σε κάθε μιγαδικό αριθμό $a+ib$ αντιστοιχούμε το σημείο (a,b) του καρτεσιανού επιπέδου (xy - επίπεδου) . Οι πραγματικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε σημεία του άξονα των x (πραγματικός άξονας) και οι φανταστικοί αριθμοί σε σημεία του άξονα των y (φανταστικός άξονας). Το $C = R\times R$, ονομάζεται το <u>μιγαδικό επίπεδο</u> ή z επίπεδο.

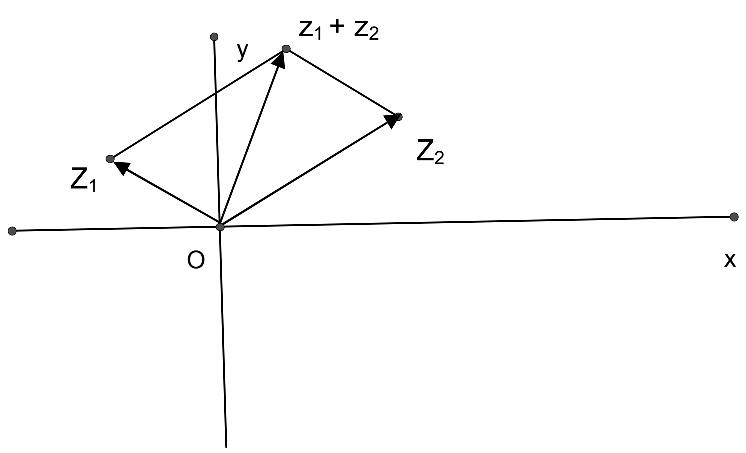
Είναι επίσης χρήσιμο να θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $z=a+ib$ ως το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ή <u>διάνυσμα</u> από το $\mathrm{O}=(0,0)$ μέχρι το σημείο (a,b), δηλ. το διάνυσμα $\overrightarrow{Oz}$ (Σχήμα 1).

Σχήμα 1



Η πρόσθεση των μιγαδικών είναι απλά η γνωστή μας διανυσματική πρόσθεση όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

Σχήμα 2.

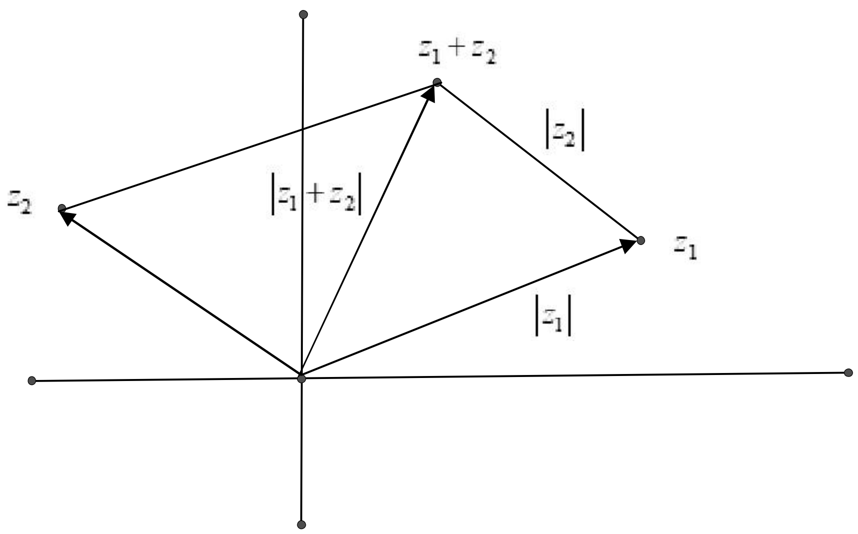


Αν $z=a+ib$, τότε $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος z (Σχήμα 1).

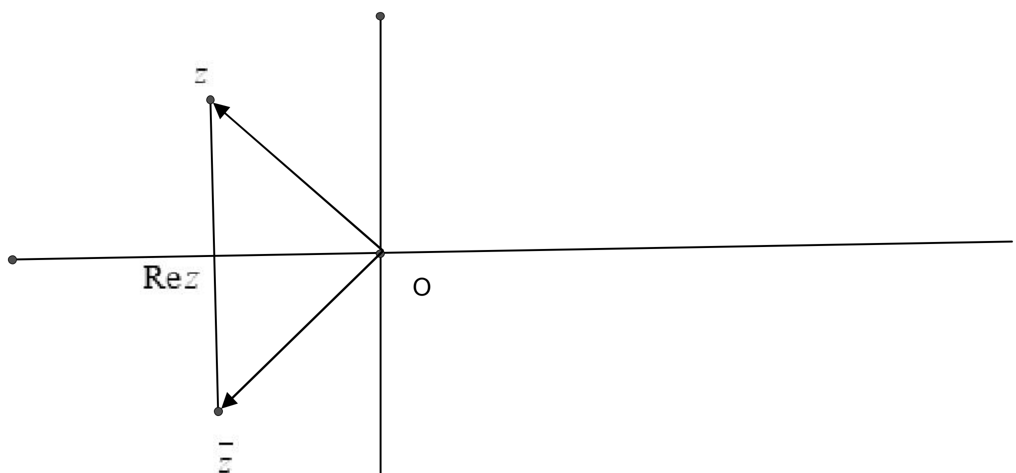
Αν $z_1 = a + ib$ και $z_2 = c + id$ τότε $\left|z_1 - z_2\right| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων z_1 και z_2.

Επομένως μπορούμε να σκεφθούμε την ποσότητα $\left|z_2\right|$ ως την απόσταση μεταξύ των $z_1 + z_2$ και z_1 και έτσι να έχουμε μια γεωμετρική απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας:

$$\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|.$$



Γεωμετρικά η απεικόνιση $z \in C \to \bar{z} \in C$ είναι η <u>συμμετρία</u> ως προς τον πραγματικό άξονα.



Για να δώσουμε μια γεωμετρική ερμηνεία του μιγαδικού πολλαπλασιασμού, εισάγουμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) (Σχήμα 3).

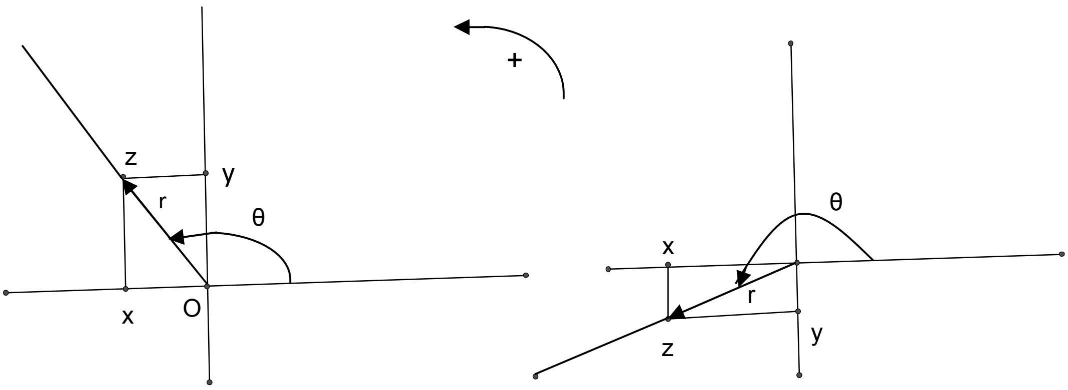
Έστω $z = x + iy \neq 0$. Θέτουμε $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και συμβολίζουμε με θ την αντιωρολογιακά προσανατολισμένη γωνία εκπεφρασμένη σε ακτίνια με πρώτη πλευρά τον θετικό πραγματικό ημιάξονα και δεύτερη πλευρά την ημιευθεία OZ (σχήμα 3).

Σημειώνουμε εδώ ότι το μιγαδικό επίπεδο θεωρείται θετικά προσανατολισμένο (συνήθως) με την αντιωρολογιακή φορά περιστροφής . Τα συστήματα συντεταγμένων συνδέονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \qquad (1)$$

και συνεπώς $\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

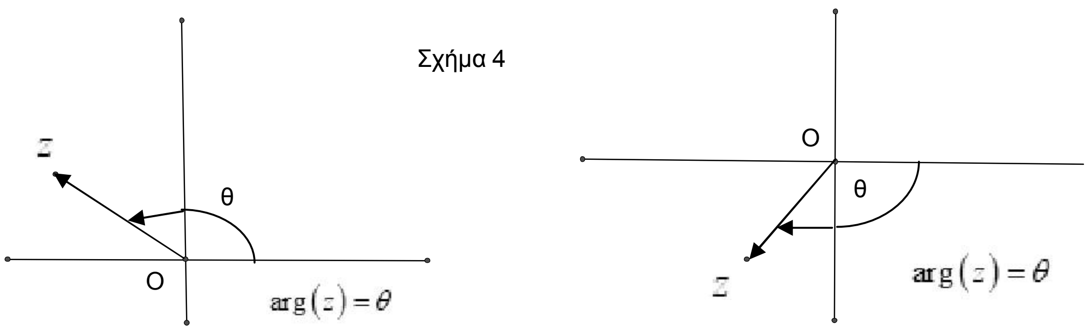
Σχήμα 3



Κάθε τιμή του θ η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις ονομάζεται ένα όρισμα του μιγαδικού z . Από την περιοδικότητα του ημιτόνου και του συνημιτόνου, αν θ είναι ένα όρισμα του z τότε και η γωνία $\theta + 2\kappa\pi$ είναι όρισμα του z για κάθε $\kappa \in Z$. Πρέπει να είναι σαφές ότι κάθε ημιανοικτό διάστημα του R μήκους 2π (π.χ. $(\alpha, \alpha + 2\pi]$ ή $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, $\alpha \in R$) περιέχει ακριβώς ένα όρισμα του z . Η μοναδική τιμή του θ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ ονομάζεται το <u>κύριο</u> ή <u>πρωτεύον</u> όρισμα του z και συμβολίζεται με $\theta = \arg(z)$. Το κύριο όρισμα του $z \neq 0$, ορίζεται <u>γεωμετρικά</u> ως η κυρτή προσανατολισμένη γωνία θ με πρώτη πλευρά τον θετικό πραγματικό ημιάξονα και δεύτερη πλευρά την ημιευθεία Oz , αν $z \notin R$

Στην περίπτωση που $z \in R$, $\arg(z) = 0$ αν $z > 0$ και $\arg(z) = \pi$ αν $z < 0$ (Σχήμα 4).

Σχήμα 4



Με τα r και θ ορισμένα όπως παραπάνω (δηλαδή στην (1)) συμπεραίνουμε ότι

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta). \qquad (2)$$

Η (2) ονομάζεται <u>τριγωνομετρική ή πολική μορφή</u> του μιγαδικού $z \neq 0$. Η έκφραση $\cos\theta + i\sin\theta$ είναι πολύ σημαντική για τη Μιγαδική Ανάλυση και θα συσχετισθεί αργότερα στο κεφάλαιο 3 με τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Έστω $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, ($|z_1| > 0$, $|z_2| > 0$) δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή. Τότε, χρησιμοποιώντας τις γνωστές από την τριγωνομετρία τριγωνομετρικές ταυτότητες για το ημίτονο και συνημίτονο αθροίσματος τόξων (οι οποίες θα αποδειχθούν και αναλυτικά) έχουμε

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\right]$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]. \qquad (3)$$

Επομένως η (3) μας λέει ότι το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών έχει ως απόλυτη τιμή το γινόμενο των απολύτων τιμών τους και ως όρισμα το άθροισμα των ορισμάτων τους. Δηλαδή

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (\operatorname{mod} 2\pi). \qquad (4)$$

Η ερμηνεία της (4) είναι ότι οι δύο πλευρές της μπορούν να συμφωνήσουν με την πρόσθεση κατάλληλου ακέραιου πολλαπλάσιου του 2π σε μια από αυτές.
Από την (3) έπεται ότι

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

Ισοδύναμα
$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta), \quad \theta \in R. \qquad (5)$$

Έτσι το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ γράφεται

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right].$$

Έπεται ότι το πηλίκο δύο μιγαδικών έχει απόλυτη τιμή το πηλίκο των απολύτων τιμών τους και ως όρισμα την διαφορά των ορισμάτων τους .

Δηλαδή
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$z_1 z_2 \ldots z_n = |z_1 z_2 \ldots z_n| \cdot \left[\cos(\theta_1 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \ldots + \theta_n)\right].$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι , αν $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $(|z| > 0)$ τότε

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n \in N. \qquad (6)$$

Επειδή από την (5) έπεται ότι αν $z = \cos\theta + i\sin\theta$

τότε $z^{-1} = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{-1} = \cos\left(-\theta\right) + i\sin\left(-\theta\right)$,

συμπεραίνουμε ότι $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^{n}$, $n \in N$. (7)

Από τις (6) και (7) έπεται προφανώς η ακόλουθη

Ταυτότητα του De Moivre 1.11

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^{n} = \cos n\theta + i\sin n\theta \ , \ n \in Z \quad (\theta \in R).$$

Γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου μιγαδικών αριθμών 1.12

Από τον τύπο (3) προκύπτει η γεωμετρική σημασία του γινομένου: Όταν πολλαπλασιάσουμε τον μιγαδικό $z \neq 0$ με τον μιγαδικό $w = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, $\left(r > 0\right)$, το μεν μήκος του z πολλαπλασιάζεται με r ($\left|zw\right| = r\left|z\right|$) ο δε αριθμός z στρέφεται κατά γωνία θ. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε (όπως μπορούμε) το όρισμα θ του w στο διάστημα $\left[0, 2\pi\right)$ τότε ο z στρέφεται αντιωρολογιακά κατά γωνία θ.

Το σύμβολο $e^{i\theta}$ 1.13 Αν $\theta \in R$ τον μιγαδικό αριθμό $\cos\theta + i\sin\theta$ τον συμβολίζουμε με $e^{i\theta}$, δηλαδή θέτουμε

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in R.$$

(Παρατηρούμε ότι $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, $\theta \in R$)

Ο συμβολισμός αυτός ανήκει στον Euler και θα αιτιολογηθεί στο κεφάλαιο 3.

Αν $z \neq 0$ είναι μιγαδικός τότε η τριγωνομετρική μορφή του γράφεται $z = \left|z\right| \cdot e^{i\theta}$,όπου θ ένα όρισμα του z και αν $\theta_1, \theta_2 \in R$ τότε

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i\left(\theta_1 + \theta_2\right)}$$

Τελικά η ταυτότητα του De Moivre γράφεται

$$\left(e^{i\theta}\right)^{n} = e^{in\theta}, \ n \in Z, \ \theta \in R$$

(Παρατηρήστε την συνάφεια με τις ιδιότητες του εκθετικού συμβολισμού.)

Τέλος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι από την περιοδικότητα του ημιτόνου και συνημιτόνου

$e^{i\theta} = 1$ αν και μόνο αν $\theta = 2\kappa\pi$ για κάποιον $\kappa \in Z$.

Από αυτό έπεται ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \left|z_1\right| e^{i\theta_1}$ και $z_2 = \left|z_2\right| e^{i\theta_2}$ ($\left|z_1\right| > 0$, $\left|z_2\right| > 0$) είναι ίσοι αν και μόνο αν

$\left|z_1\right| = \left|z_2\right|$ και $\theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi$ για κάποιο $\kappa \in Z$.

<u>Παραδείγματα 1.14</u>

1) Έστω $$z=\frac{(1-i)^8}{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}.$$

Γράψτε τον z σε τριγωνομετρική μορφή και βρείτε το κύριο όρισμά του .

Παρατηρούμε ότι

$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$ και $\sqrt{3}+i=2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$.

Επομένως $(1-i)^8=16\left[\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\right]$ και $\left(\sqrt{3}+i\right)^5=32\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$.

Άρα $z=\dfrac{16\left[\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\right]}{32\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right]}=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\right]$.

Επειδή $17=2\cdot 6+5$, έπεται ότι $\arg(z)=-\dfrac{5\pi}{6}$.

2) Αποδείξτε , χρησιμοποιώντας την ταυτότητα De Moivre ότι
$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$ και $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$.

Πράγματι $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=$

$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta i\sin\theta+3\cos\theta i^2\sin^2\theta+i^3\sin^3\theta$

$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$.

Άρα εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, έχουμε τις ζητούμενες ταυτότητες.

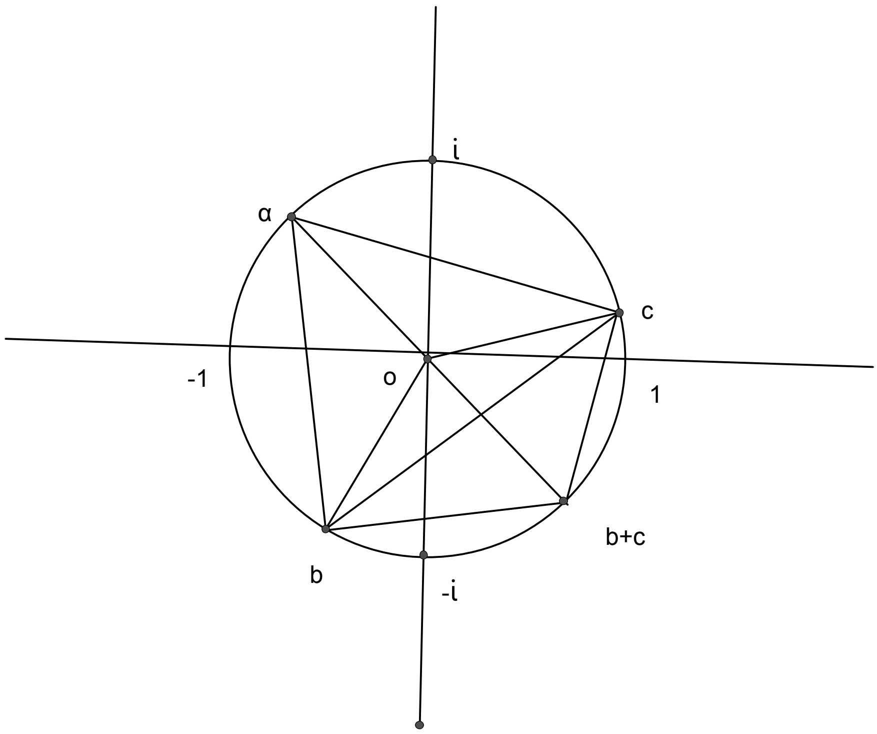
3) Έστω a,b,c σημεία του μοναδιαίου κύκλου $\{z\in C:|z|=1\}$ του μιγαδικού επιπέδου. Αποδείξτε ότι τα a,b,c είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου αν και μόνο αν $a+b+c=0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το abc είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Τότε το τετράπλευρο με κορυφές $O,b,b+c,c$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες πλευρές μήκους ίσο με 1. Επομένως είναι ρόμβος και η ημιευθεία $\mathrm{O}b+c$, διχοτομεί την γωνία $b\hat{O}c$ (που είναι ίση με $\dfrac{2\pi}{3}$ ακτίνια).

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $|b+c|=1$ και ότι τα διανύσματα a και $b+c$ είναι αντίρροπα (συγγραμμικά με αντίθετη φορά) και κατά συνέπεια $a+(b+c)=0$.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι (για τα σημεία α,b,c του μοναδιαίου κύκλου ισχύει) $\alpha+b+c=0$. Επειδή $b+c=-\alpha$, έπεται ότι $|b+c|^2=1$ ή $(b+c)\left(\overline{b+c}\right)=1$, ή

$|b|^2+|c|^2+2\operatorname{Re}(b\bar{c})=1$ άρα $2\operatorname{Re}(b\bar{c})=-1$, από όπου έπεται ότι
$|b-c|^2=(b-c)\left(\overline{b-c}\right)=2-2\operatorname{Re}(b\bar{c})=3$. Ανάλογοι υπολογισμοί δίνουν $|a-b|^2=3$ και $|a-c|^2=3$ και έτσι το τρίγωνο abc είναι ισόπλευρο.



4) Αν $z_1, z_2, ..., z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, υπάρχει $S \subseteq \{1,2,...,n\}$, έτσι ώστε

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Το μιγαδικό επίπεδο είναι η ένωση των τεσσάρων κλειστών τεταρτημόριων $\Delta_\kappa, \kappa=1,2,3,4$ που φράσσονται από τις ευθείες $y=\pm x$ (με τον όρο κλειστό τεταρτημόριο Δ_κ εννοούμε το εσωτερικό της ορθής γωνίας Δ_κ μαζί με τις πλευρές της). Επομένως για κάποιο από αυτά έστω Δ ισχύει ότι

$$\sum_{z_k\in\Delta}|z_k| \geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Με κατάλληλη στροφή (δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τους μιγαδικούς του Δ με $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, για κατάλληλο θ) μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Δ είναι το τεταρτημόριο του δεξιού ημιεπιπέδου , το οποίο ορίζεται από την $|y|\leq x$. Για $z\in\Delta$ ισχύει ότι $\operatorname{Re} z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$ (Γιατί;).

Αν $S=\{k\leq n : z_k\in\Delta\}$ τότε έχουμε $\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \sum_{k\in S}\operatorname{Re} z_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in S}|z_k| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

Σημειώνουμε ότι η σταθερά $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $\frac{1}{\pi}$, και αυτή είναι η βέλτιστη σταθερά για την παραπάνω ανισότητα (Πρβλ. $[Ru]$, Λήμμα 6.3 σελ. 126 και σελ. 434). Βέβαια αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ πραγματικοί αριθμοί, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι η σταθερά $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ μπορεί να αντικατασταθεί από τη σταθερά $\frac{1}{2}$. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

1.4 Ρίζες των μιγαδικών αριθμών

Έστω $w \neq 0$ μιγαδικός αριθμός και n θετικός ακέραιος. Κάθε αριθμός $z \in C$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$z^n = w \qquad (1)$$

ονομάζεται n-οστή ρίζα του w. Θα αποδείξουμε ότι η (1) έχει ακριβώς n- διαφορετικές ρίζες. Έστω $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ οι τριγωνομετρικές μορφές των w και z αντίστοιχα. Από την ταυτότητα του De Moivre έπεται ότι

$$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta). \qquad (2)$$

Επομένως , αν $\sqrt[n]{|w|}$ συμβολίζει τη θετική n-οστή ρίζα του $|w|$, εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη (πρβλ. την 1.13) η (2) συμπεραίνει ότι

$$|z| = \sqrt[n]{|w|} \text{ και } \varphi = \frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}, \text{ για κάποιο } \kappa \in \mathrm{Z}.$$

Αν κ είναι τυχών ακέραιος τότε διαιρώντας τον κ με τον n ευρίσκουμε ότι $\kappa = nm + l$, όπου $l = 0,1,2,\dots,n-1$. Έτσι από την περιοδικότητα του ημιτόνου και συνημιτόνου έπεται ότι οι κ και l δίνουν την ίδια ρίζα. Κατά συνέπεια οι ρίζες του w είναι

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{|w|}e^{i\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}}, \quad \kappa = 0,1,\dots,n-1.$$

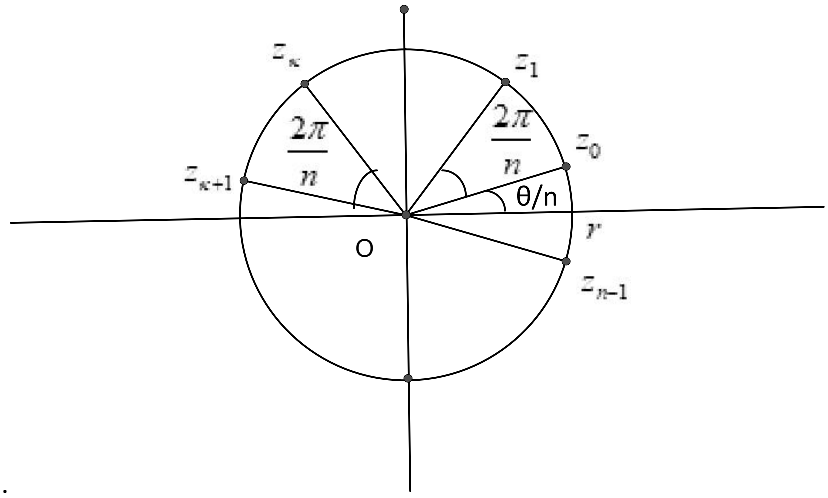
Επίσης οι αριθμοί $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους .

Πράγματι αν $z_\kappa = z_l$ με $\kappa, l \in \{0,1,\dots,n-1\}$ τότε

$$\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} - \frac{\theta + 2l\pi}{n} = 2m\pi \text{ για κάποιο } m \in Z.$$

Συνεπώς $\kappa - l = mn$. Επειδή $|\kappa - l| \leq n-1$, έπεται ότι $m = 0$ και άρα $\kappa = l$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι $n-$ οστές ρίζες του μιγαδικού $w = |w| \cdot e^{i\theta}$ ($|w| > 0$), είναι οι κορυφές κανονικού πολυγώνου (προφανώς με n- κορυφές) εγγεγραμμένου στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας $r = \sqrt[n]{|w|}$



.

$$z_\kappa = re^{i\frac{\theta+2\kappa\pi}{n}}$$

k=0,1,…,n-1

<u>Οι νιοστές ρίζες της μονάδας 1.15</u>

Έστω $n \geq 2$ θετικός ακέραιος . Επειδή $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, οι $n-$ οστες ρίζες του 1 δίνονται από τον τύπο

$$j_\kappa = \cos\frac{2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{n} = e^{i\frac{2\kappa\pi}{n}}, \qquad \kappa = 0,1,\ldots,n-1.$$

Θέτουμε $\qquad \omega = j_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

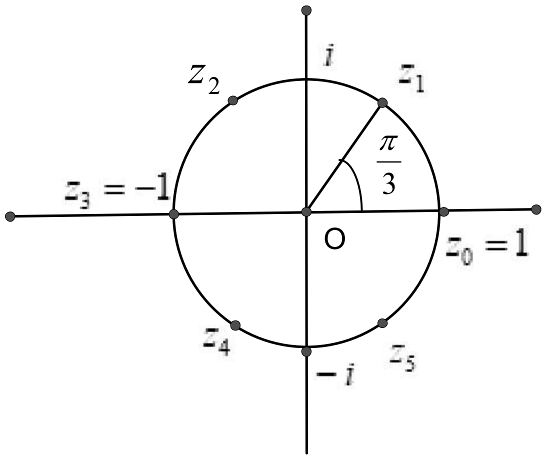
και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα De Moivre ευρίσκουμε ότι οι $n-$ οστές ρίζες της μονάδας είναι οι $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. Επειδή $\omega^n = 1$ και $\omega \neq 1$ έπεται ότι (πρβλ. την ταυτότητα του παραδ. 1.10 (5))

$$1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0 .$$

Δηλαδή το άθροισμα των n - οστών ριζών της μονάδας ισούται με 0.

Από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι οι n -οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές κανονικού n - γώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο με μια κορυφή στο σημείο

$z=1$. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζουμε την περίπτωση $n=6$



.

$$z^6=1$$

Οι έκτες ρίζες της μονάδας είναι $z_\kappa=e^{i\frac{2\kappa\pi}{6}}$, $\kappa=0,1,2,3,4,5$, ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$z_0=1$, $\quad z_1=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_2=\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=-1$$

$$z_4=\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-z_1$$

$$z_5=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-z_2.$$

Παρατηρούμε ότι οι τρίτες ρίζες της μονάδας ($n=3$) είναι οι z_0, z_2 και z_4 και οι τέταρτες ρίζες της μονάδας είναι οι $z'_0=1$, $z'_1=i$, $z'_2=-1$ και $z'_3=-i$. (Γιατί;)

<u>Παραδείγματα 1. 16</u>

1) Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες του $w=-3+4i$.

Παρατηρούμε ότι $|w|=5$ και έτσι ο w γράφεται

$$w=5(\cos\theta+i\sin\theta),$$

όπου $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ και $\sin\theta=\frac{4}{5}$. Επομένως οι ρίζες είναι

$$z_\kappa = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{2}\right), \quad \text{όπου } \kappa=0,1.$$

$$z_\kappa = e^{i\kappa\pi}\sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right), \quad \kappa=0,1.$$

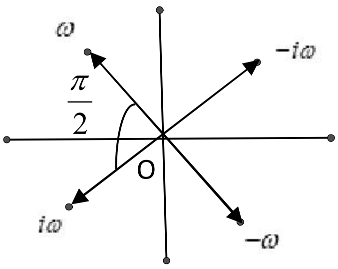
Επειδή θ είναι μια γωνία στο δεύτερο τεταρτημόριο του $xy-$επιπέδου , $\frac{\theta}{2}$ είναι μια γωνία στο πρώτο τεταρτημόριο , άρα

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ και } \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Επομένως $w = z_0 = 1+2i$, $z_1 = -(1+2i)$.

2) Έστω $\omega \neq 0$ μιγαδικός αριθμός . Να ευρεθούν όλες οι διαφορετικές τιμές της ακολουθίας $z_n = i^n\omega$, $n \geq 0$.

Επειδή $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού $\omega \neq 0$ με τον i στρέφει αντιωρολογιακά το διάνυσμα ω κατά $\frac{\pi}{2}$ ακτίνια . Έπεται ότι η (z_n) παίρνει τιμές πάνω στις κορυφές ενός τετραγώνου, οι οποίες είναι οι ακόλουθες ,



$$z_0 = \omega,\ z_1 = i\omega,\ z_2 = i^2\omega = -\omega \quad \text{και} \quad z_3 = i^3\omega = -i\omega.$$

Αν $n \geq 0$ ακέραιος τότε $n = 4\kappa + \lambda$, όπου $\lambda = 0,1,2,3$ και $\kappa \geq 0$. Έτσι έχουμε $z_{4\kappa} = z_0$, $z_{4\kappa+1} = z_1$, $z_{4\kappa+2} = z_2$ και $z_{4\kappa+3} = z_3$.

Παρατηρήστε ότι οι z_0, z_1, z_2, z_3 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^4 = \omega^4$. (Γιατί;)

3) Αποδείξτε ότι όλες οι $n-$οστές ρίζες της μονάδας ($n \geq 2$) εκτός της ρίζας $z_0 = 1$ ικανοποιούν την « κυκλοτομική» εξίσωση

$$z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1 = 0.$$

Το συμπέρασμα έπεται από την ταυτότητα

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1\right) = 0 \ .$$

4) Θεωρούμε τις $n-1$ διαγωνίους ενός κανονικού $n-$γώνου ($n \geq 2$) εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο , οι οποίες άγονται από μια κορυφή του προς τις υπόλοιπες κορυφές του. Αποδείξτε ότι το γινόμενο των μηκών τους ισούται με n.

Είναι σαφές ότι μπορούμε να υποθέσουμε , κάνοντας κατάλληλη στροφή του πολυγώνου , ότι οι κορυφές του συμπίπτουν με τις $n-$ οστές ρίζες της μονάδας. Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κορυφή από την οποία άγονται οι διαγώνιοι είναι η $z_0 = 1$. (Γιατί;) Αν συμβολίσουμε με $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ τα μήκη των αγομένων διαγωνίων τότε

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1} = \left|(z_0 - z_1)\right| \cdot \left|(z_0 - z_2)\right| \cdot \ldots \cdot \left|(z_0 - z_{n-1})\right| \qquad (1)$$

Από το παράδειγμα (3) το κυκλοτομικό πολυώνυμο $\varphi(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$, παραγοντοποιείται ως

$$\varphi(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_{n-1}),$$

άρα

$$n = \varphi(1) = \varphi(z_0) = (z_0 - z_1)\ldots(z_0 - z_{n-1}). \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται το συμπέρασμα.

5) Αποδείξτε ότι $\prod_{\kappa=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\kappa\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, $n \geq 2$.

Πράγματι η (2) του παραδείγματος (4) γράφεται ως

$$\prod_{\kappa=1}^{\mathrm{n-1}} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\kappa\pi}{\mathrm{n}}}\right) = n .$$

Άρα

$$n^2 = \prod_{\kappa=1}^{n-1} \left|\left(1 - e^{\frac{2\kappa\pi i}{n}}\right)\right|^2 = \prod_{\kappa=1}^{n-1} \left[\left(1 - \cos\frac{2\kappa\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\kappa\pi}{n}\right]. \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(1 - \cos\frac{2\kappa\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\kappa\pi}{n} = 2 - 2\cos\frac{2\kappa\pi}{n} =$$

$$= 4\left(\frac{1 - \cos\frac{2\kappa\pi}{n}}{2}\right) = 4\sin^2\frac{\kappa\pi}{n}. \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται η ζητούμενη ταυτότητα.

<u>**Η δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ 1.17**</u>

Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$, τότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται ,

$$4\alpha^2 z^2 + 4abz = -4ac .$$

Συμπληρώνουμε το τετράγωνο προσθέτοντας και στα δύο μέλη το b^2 και έχουμε

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac . \qquad (5)$$

Ας συμβολίσουμε με ω τις μια από τις δύο τετραγωνικές ρίζες του b^2-4ac (τότε η άλλη είναι $-\omega$) η (5) έχει ως συνέπεια ότι

$$2\alpha z+b=\pm\omega.$$

Κατά συνέπεια ευρίσκουμε τις λύσεις

$$z_1=\frac{-b+\omega}{2a} \quad \text{και} \quad z_2=\frac{-b-\omega}{2a}. \qquad (6)$$

(Αν $b^2-4ac=0$ τότε $\omega=0$ και οι ρίζες συμπίπτουν σε μια «διπλή» ρίζα .)

Παρατήρηση 1.17.1

Έστω $z\neq 0$ μιγαδικός αριθμός $z=|z|e^{i\theta},\theta\in(-\pi,\pi]$ και n θετικός ακέραιος με $n\geq 2$. Αν συμφωνήσουμε να συμβολίζουμε με $\sqrt[n]{z}$ (ή $\sqrt{z}$ αν $n=2$)

την $n-$οστή ρίζα $z_0=\sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta}{n}}$ του z, (και θέσουμε $\sqrt[n]{0}=0$) τότε ορίζεται μια

(μονότιμη) απεικόνιση $z\in C\to\sqrt[n]{z}\in C$, η οποία επεκτείνει την αντίστοιχη απεικόνιση $x\in[0,+\infty)\to\sqrt[n]{x}\in[0,+\infty)$. Με την σύμβαση αυτή οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$z_\kappa=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad \kappa=1,2.$$

Για την κατανόηση του παραπάνω ορισμού δίνουμε κάποια παραδείγματα.

1) $\sqrt{-1}=i$. Πράγματι , $-1=e^{i\pi}$ επομένως $\sqrt{-1}=e^{\frac{i\pi}{2}}=i$.

Επειδή $i=e^{\frac{i\pi}{2}}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sqrt{i}=e^{\frac{i\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad \text{και} \qquad \sqrt[3]{i}=e^{\frac{i\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

2) Να υπολογισθεί η $\sqrt[5]{1+i}$. Επειδή , $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ έπεται ότι $\sqrt[5]{1+i}=\sqrt[10]{2}e^{\frac{i\pi}{20}}$.

3) Να υπολογιστεί η $\sqrt[3]{-1}$. Επειδή $-1=e^{i\pi}$ έπεται ότι

$$\sqrt[3]{-1}=e^{\frac{i\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι ο ανωτέρω ορισμός μας δίνει για την $\sqrt[3]{-1}$ τιμή <u>διαφορετική</u> από την αναμενόμενη $\sqrt[3]{-1}=-1$.

1.5 Η τοπολογία του μιγαδικού επιπέδου

Η έννοια της απόλυτης τιμής στο C μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσουμε όρια ακολουθιών μιγαδικών αριθμών και όρια συναρτήσεων καθώς και την έννοια της συνέχειας για συναρτήσεις $f : A \subseteq C \to C$. Οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που θα διατυπώσουμε εδώ , οι οποίοι επεκτείνουν αντίστοιχους ορισμούς και αποτελέσματα για την πραγματική ευθεία R , είναι ειδικές περιπτώσεις ορισμών και αποτελεσμάτων που αφορούν πιο γενικούς χώρους , δηλαδή τους Ευκλείδειους χώρους (και γενικότερα τους μετρικούς χώρους). Καθώς οι περισσότερες των αποδείξεων μας είναι ήδη οικείες , είτε παραλείπονται ή περιγράφονται σύντομα. Σε κάθε περίπτωση παραπέμπουμε για περισσότερες λεπτομέρειες στην βιβλιογραφία.

Ι Ακολουθίες μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 1.18

Η ακολουθία μιγαδικών αριθμών (z_n) συγκλίνει στον μιγαδικό αριθμό z αν η ακολουθία πραγματικών αριθμών $|z_n - z|,\ n \geq 1$, συγκλίνει στο 0. Δηλαδή

$$z_n \to z \quad \text{ή} \quad \lim z_n = z \quad \text{αν } |z_n - z| \to 0 .$$

Επειδή από το παράδειγμα 1.10 (3) (α)

$$|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$$

έπεται ότι : $z_n \to z$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z$ και $\mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z$. Δηλαδή μπορούμε να γράφουμε : $\lim z_n = \lim \mathrm{Re}\, z_n + \lim \mathrm{Im}\, z_n$.

Επίσης παρατηρούμε ότι : $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$ (Γιατί:).

Παραδείγματα

1) $z^n \to 0$, αν $|z| < 1$. Πράγματι $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$.

2) $\dfrac{2n}{n-3i} \to 2$. Πράγματι $\left|\dfrac{2n}{n-3i} - 2\right| = \left|\dfrac{6i}{n-3i}\right| = \dfrac{6}{\sqrt{n^2+9}} \to 0$.

3) Έστω $z_n = \dfrac{1}{n + in^2 + 1}$. Εξετάστε την (z_n) ως προς την σύγκλιση .

Θέτουμε $w_n = n + in^2 + 1$ και χωρίζουμε σε πραγματικά και φανταστικά μέρη

$$z_n = \frac{\overline{w_n}}{|w_n|^2} = \frac{n+1-in^2}{(n+1)^2 + n^4} = \frac{n+1}{(n+1)^2 + n^4} - i\frac{n^2}{(n+1)^2 + n^4} .$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{Re}\, z_n = \dfrac{n+1}{(n+1)^2 + n^4} \to 0$

και $$\operatorname{Im} z_n = -\frac{n^2}{(n+1)^2 + n^4} \to 0 .$$

Έπεται ότι $$z_n \to 0 + i0 = 0 .$$

Όπως στην περίπτωση των ακολουθιών πραγματικών αριθμών είναι εύκολο να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.19

Αν $\lim z_n = z$ και $\lim \zeta_n = \zeta$ τότε :

α) $$\lim\left(az_n + b\zeta_n\right) = az + b\zeta\ , \quad \forall a,b \in C$$

β) $$\lim\left(z_n\zeta_n\right) = z\zeta \quad \text{και}$$

γ) $$\lim \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{z}{\zeta}\ ,\ \zeta \neq 0 .$$

Μία ακολουθία $(z_n) \subseteq C$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος $N = N(\varepsilon)$ έτσι ώστε

$$n,m \geq N \Rightarrow \left|z_n - z_m\right| < \varepsilon .$$

Χρησιμοποιώντας την πληρότητα του R (μία ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy) αποδεικνύεται εύκολα η πληρότητα του C.

Πρόταση 1.20

Έστω $(z_n) \subseteq C$ τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Η (z_n) συγκλίνει σε κάποιο $z \in C$.

(β) Η (z_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Απόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β) Το συμπέρασμα έπεται από την υπόθεση και την τριγωνική ανισότητα.

$$\left|z_n - z_m\right| \leq \left|z_n - z\right| + \left|z_m - z\right| .$$

(β) $\Rightarrow$ (α) Θέτουμε $z_n = x_n + iy_n, n \geq 1$. Τότε

$$\left|x_n - x_m\right| \leq \left|z_n - z_m\right| \text{ και } \left|y_n - y_m\right| \leq \left|z_n - z_m\right| .$$

Από αυτές τις ανισότητες έπεται ότι οι (x_n) και (y_n) είναι Cauchy στο R και επομένως από την πληρότητα του R υπάρχουν $x, y \in R$ ώστε

$$\lim x_n = x \qquad \text{και} \qquad \lim y_n = y .$$

Θέτουμε $z = x + iy$ και παρατηρούμε ότι

$$|z_n - z| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Επομένως $$\lim z_n = z$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών (z_n) λέγεται ότι είναι <u>φραγμένη</u> αν υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|z_n| \le M$ για κάθε $n \in N$.

Εύκολα αποδεικνύεται , όπως και για ακολουθίες πραγματικών , το ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>Πρόταση 1.21</u>

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $z_n \to z$ του C είναι φραγμένη.

Το παράδειγμα της ακολουθίας $z_n = (-1)^n + i\frac{1}{n}, n \ge 1$ μας πείθει ότι το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει . (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες .)

Σημειώνουμε ότι σχετικά με υπακολουθίες ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα.

<u>Πρόταση 1.22</u>

Αν $z_n \to z$ τότε κάθε υπακολουθία της (z_n) συγκλίνει στο z.

Απόδειξη. Ανάλογη με την αντίστοιχη για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Επίσης ισχύει το θεμελιώδες θεώρημα του Bolzano.

<u>Θεώρημα 1.23</u> (Bolzano)

Κάθε φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Έστω $z_n = x_n + iy_n$, $n \ge 1$ και $|z_n| \le M$, $n \ge 1$.

Οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες αφού

$$|x_n|, |y_n| \le |z_n| \le M, \quad n \ge 1.$$

Έστω $x'_n = x_{k_n}$, $n \ge 1$ συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n) ώστε $x'_n \to x \in R$.

(Θεώρημα Bolzano για το R .)

Έπεται ότι η υπακολουθία $y'_n = y_{k_n}$, $n \ge 1$ της (φραγμένης) ακολουθίας (y_n) έχει (πάλι από το θεώρημα Bolzano για το R) συγκλίνουσα υπακολουθία έστω $y''_m = y_{k_{n_m}}, m \ge 1$.

Αν συμβολίσουμε με y το όριο της (y''_m) και θέσουμε $z = w = x + iy$, τότε είναι σαφές ότι η υπακολουθία $w_m = x_{k_{n_m}} + iy_{k_{n_m}}, m \geq 1$, της (z_n) είναι συγκλίνουσα και $w_m \to w$.

<u>Το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο 1.24</u>

Θα λέμε ότι μια ακολουθία μιγαδικών (z_n) <u>συγκλίνει στο άπειρο</u> και θα γράφουμε $z_n \to \infty$ ή $\lim z_n = \infty$, αν

$$\lim |z_n| = +\infty .$$

Αυτό βέβαια είναι ισοδύναμο με το ότι :

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ ώστε αν $n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| \geq \varepsilon$.

Το σύνολο C μαζί με το σημείο ∞ - το <u>επ' άπειρον σημείο</u> – ονομάζεται το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο και συμβολίζεται με $\tilde{C}$, δηλαδή

$$\tilde{C} = C \cup \{\infty\} .$$

Αν (z_n) και (ζ_n) είναι ακολουθίες στο C ώστε $\lim z_n = \infty$ και $\lim \zeta_n = \zeta \in C$, έπεται εύκολα ότι

$$\lim(z_n + \zeta_n) = \lim(\zeta_n + z_n) = \infty .$$

Αυτή η ιδιότητα των ακολουθιών δικαιολογεί την αλγεβρική πράξη

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha , \quad \alpha \in C .$$

Με ανάλογο τρόπο δικαιολογούνται και οι ακόλουθες πράξεις στο $\tilde{C}$. Έστω $\alpha \in C$ τότε

$$\infty - \alpha = \alpha - \infty = \infty , \quad \infty \cdot \alpha = \alpha \cdot \infty = \infty , \ (\alpha \neq 0), \qquad \infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{\alpha} = \infty , \qquad \frac{\alpha}{\infty} = 0 \quad \text{και} \qquad \frac{\alpha}{0} = \infty , \ (\alpha \neq 0).$$

Επειδή $\lim[n + (-n)] = 0$ και $\lim[n + n] = \infty$, η πράξη $\infty + \infty$ δεν είναι επιτρεπτή . Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και οι πράξεις

$$\infty - \infty , \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty , \quad \infty \cdot 0 , \quad \frac{0}{0}$$

δεν είναι επιτρεπτές στο $\tilde{C}$.

<u>Παραδείγματα 1.25</u>

Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι ακολουθίες

(α) $z_n = z^n, n \geq 1$, όπου $z \in C$, (β) $z_n = (1+i)^n , n \geq 1$ (γ) $z_n = \dfrac{(1+i)^n}{n}, n \geq 1$, (δ) $z_n = n! z^n, n \ge 1$, (ε) $z_n = \dfrac{z^n}{n^a}$, όπου $\alpha > 0$ και $|z| > 1$, (στ) $z_n = \sqrt[n]{z}$, όπου $z \neq 0$ και (ζ) $z_n = i^n, n \ge 1$.

Παρατηρούμε ότι :

(α) Αν $|z| < 1$ τότε $|z^n| = |z|^n \to 0$, άρα $z_n \to 0$. Αν $|z| > 1$, τότε $|z^n| = |z|^n \to \infty$, άρα $z_n \to \infty$.

Έστω ότι για κάποιο $|z| = 1$ η (z_n) είναι συγκλίνουσα και $z_n \to a$ τότε βέβαια $|z_n| \to |a|$ και άρα $|a| = 1$. Επίσης έχουμε ότι $z \cdot z^n = z^{n+1} \to a$, αφού η (z^{n+1}) είναι υπακολουθία της $z_n = z^n,\ n \ge 1$. Κατά συνέπεια $z \cdot a = \alpha,$ και έτσι $z = 1$. Το συμπέρασμα είναι ότι

αν $|z| = 1$ η (z^n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $z = 1$.

(β) $|z_n| = |1+i|^n = \left(\sqrt{1+1}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \to +\infty$. Άρα $z_n \to \infty$.

(γ) $|z_n| = \dfrac{1}{n}|1+i|^n = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt{2^n} \to +\infty$ (γιατί ;). Άρα $z_n \to \infty$.

(δ) Αν $|z| \ge 1$, τότε $|z_n| = n! |z|^n \ge n! \to +\infty$. Άρα $z_n \to \infty$.

Υποθέτουμε ότι $0 < |z| < 1$, τότε $\dfrac{1}{|z_n|} = \dfrac{1}{n! |z|^n} = \dfrac{\frac{1}{|z|^n}}{n!} \to 0$ (γιατί ;), άρα $|z_n| \to +\infty$, που σημαίνει ότι $z_n \to \infty$. Το συμπέρασμα είναι ότι $z_n = n! z^n \to \infty$ για κάθε $z \in C$ με $z \neq 0$.

(Προφανώς αν $z = 0$ τότε $z_n = 0$ για κάθε $n \ge 1$.)

(ε) Επειδή $|z| > 1$, $|z_n| = \dfrac{1}{n^a} \cdot |z|^n \to +\infty$, άρα $z_n \to \infty$.

(στ) Από την παρατήρηση 1.17.1 έχουμε ότι

$$z_n = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{i\theta}{n}},$$

όπου θ είναι το πρωτεύον όρισμα του z.

Έπεται ότι

$$\operatorname{Re} z_n = \sqrt[n]{|z|} \cdot \cos\frac{\theta}{n} \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} z_n = \sqrt[n]{|z|} \cdot \sin\frac{\theta}{n}$$

και έτσι

$$\operatorname{Re} z_n \to 1 \cdot \cos 0 = 1 \quad \text{και} \quad \operatorname{Im} z_n \to 1 \cdot \sin 0 = 0 .$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$z_n \to 1 + 0i = 1 .$$

(ζ) Επειδή $i^{4n} = \left(i^4\right)^n = 1^n = 1$ και $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$ για $n \geq 1$, έπεται από την πρόταση 1.22 ότι η $\left(z_n\right)$ δεν είναι συγκλίνουσα. (Πρβλ. και το παράδειγμα 1.16 (2).)

II Ανοικτά και κλειστά σύνολα , όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Με τον όρο μιγαδική συνάρτηση εννοούμε μια συνάρτηση $f : A \to C$, όπου $A \neq \varnothing$ τυχόν σύνολο. Βέβαια το A θα είναι για εμάς ένα (συνήθως ανοικτό) υποσύνολο του C.

Για κάθε $z \in A$ θέτουμε ,

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{και} \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z)$$

Και έτσι η f γράφεται $f = u + iv$. Πολλές φορές η μελέτη μιας μιγαδικής συνάρτησης f ανάγεται στην μελέτη των πραγματικών συναρτήσεων u και v οι οποίες ονομάζονται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f .

Για παράδειγμα αν

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right),$$

τότε $$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} .$$

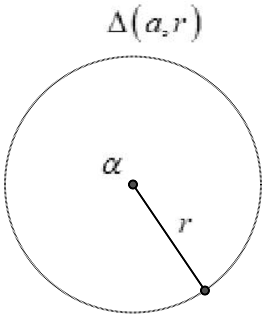
Έστω $\alpha \in C$ και $r > 0$. Ο ανοικτός δίσκος με κέντρο το α και ακτίνα r είναι το σύνολο

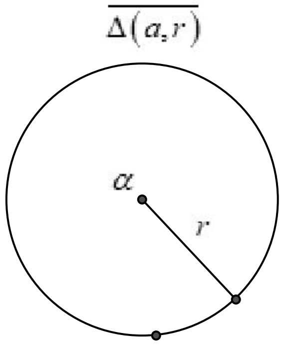
$$\Delta(a, r) = \left\{z \in C : |z - a| < r\right\}.$$

Ο κλειστός δίσκος με κέντρο α και ακτίνα r είναι το σύνολο

$$\overline{\Delta(a, r)} = \left\{z \in C : |z - a| \leq r\right\}.$$

Γεωμετρικά ο $\Delta(a, r)$ είναι το εσωτερικό του κύκλου κέντρου α και ακτίνας r και ο $\overline{\Delta(a, r)}$ περιλαμβάνει το εσωτερικό του κύκλου μαζί με τον κύκλο.





Με $C(a,r)$ συμβολίζουμε τον κύκλο κέντρου α και ακτίνας r, δηλαδή

$$C(a,r)=\{z\in C:|z-a|=r\}.$$

Ένα υποσύνολο S του C λέγεται ότι είναι <u>ανοικτό</u> αν για κάθε $z\in S$, υπάρχει $\varepsilon>0$ (εξαρτώμενο από το σημείο z), ώστε $\Delta(z,\varepsilon)\subseteq S$. Συμβατικά θεωρούμε και το κενό σύνολο$(\varnothing)$ ως ανοικτό σύνολο.

Ένα υποσύνολο S του C λέγεται <u>κλειστό</u> αν το συμπλήρωμά του $S^c=C\setminus S$ είναι ανοικτό σύνολο. Ισοδύναμα , το S είναι κλειστό αν $(z_n)\subseteq S$ και $z_n\to z$ τότε $z\in S$.

Το σύνολο $S\subseteq C$ λέγεται <u>φραγμένο</u> αν περιέχεται σε κάποιον δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$. Ισοδύναμα αν υπάρχει $r>0$: $|z|\le r$ για κάθε $z\in S$.

Ο μιγαδικός αριθμός z λέγεται <u>σημείο συσσώρευσης</u> (σ.σ) του συνόλου $S\subseteq C$, αν κάθε δίσκος $\Delta(z,r)$ περιέχει ένα σημείο $\omega\in S$ με $\omega\ne z$. Αποδεικνύεται ότι z είναι σ.σ. του S αν και μόνο αν υπάρχει $(z_n)\subseteq S\setminus\{z\}$, ώστε $z_n\to z$. (Το ουσιώδες χαρακτηριστικό του σ.σ. είναι ότι υπάρχουν σημεία του S διαφορετικά του z οσοδήποτε πλησίον του z .)

Το σύνολο των σ.σ. του S συμβολίζεται με S' και ονομάζεται το <u>παράγωγο</u> σύνολο του S.

Αποδεικνύεται ότι το S' είναι κλειστό σύνολο.

Η <u>κλειστότητα</u> $\overline{S}$ του S ορίζεται ως $\overline{S}=S\cup S'$.

Αποδεικνύεται ότι το $\overline{S}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το S.

Ένα υποσύνολο S του C λέγεται <u>συμπαγές</u> αν είναι κλειστό και φραγμένο. Τα συμπαγή υποσύνολα του C χαρακτηρίζονται ως εκείνα τα υποσύνολα $S\subseteq C$ ώστε κάθε ακολουθία $(z_n)\subseteq S$ έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.

Το <u>εσωτερικό</u> ενός συνόλου $S \subseteq C$ συμβολιζόμενο με $Int(S)$ ή S^0 είναι το σύνολο των σημείων $z \in S$ (εσωτερικών σημείων του S) ώστε υπάρχει $r > 0$ με $\Delta(z,r) \subseteq S$. Αποδεικνύεται ότι το $Int(S)$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο S

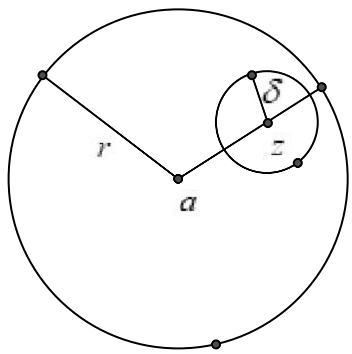
Ενδέχεται βέβαια , $Int(S) = \varnothing$.

Το <u>σύνορο</u> ενός συνόλου $S \subseteq C$, συμβολιζόμενο με ∂S ή $Bd(S)$, ορίζεται από την ισότητα $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$ (όπου, $S^c = C \setminus S$). Τα σημεία του ∂S ονομάζονται συνοριακά σημεία του S. Αποδεικνύεται ότι $\partial S = \overline{S} \setminus \mathrm{Int}(S)$ και ότι τα σύνολα $Int(S)$, $Int(\mathrm{C} \setminus S)$ και ∂S συνιστούν μια διαμέριση του C.

<u>Πρόταση 1.26</u>

Κάθε ανοικτός δίσκος $\Delta(\alpha, r)$ είναι ανοικτό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $z \in \Delta(\alpha, r)$ τότε $|z - a| < r$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq r - |z - a|$. Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $\Delta(z, \delta) \subseteq \Delta(\alpha, r)$.



Ανάλογα αποδεικνύεται - με χρήση της ʹʹ δυικήςʹʹ τριγωνομετρικής ανισότητας:

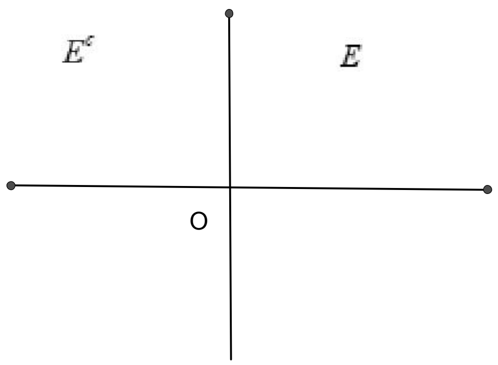
$\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2|$ - η ακόλουθη πρόταση (Άσκηση).

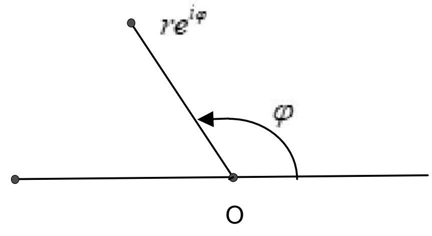
<u>Πρόταση 1.27</u>

Κάθε κλειστός δίσκος $\overline{\Delta(\alpha, r)}$ είναι κλειστό σύνολο.

<u>Παραδείγματα 1.28</u>

1) Το σύνολο E των σημείων που περιγράφεται από την ανισότητα $\{z \in C : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ είναι το δεξί ημιεπίπεδο, το οποίο εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ανοικτό σύνολο. Το συμπλήρωμα του $E^c = \{z \in C : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$ είναι βέβαια κλειστό σύνολο.. Το σύνορο του E (και του E^c) είναι το σύνολο $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} = \{z \in C : \mathrm{Re}\, z = 0\}$, δηλαδή ο άξονας των φανταστικών αριθμών.





2) Έστω $0 < \varphi < \pi$. Θέτουμε

$$A = \{z \in C : z = re^{i\theta},\ 0 < \theta < \varphi,\ r > 0\} \quad \text{και}$$

$$B = \{z \in C : z = re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \varphi,\ r \ge 0\}.$$

Τότε , το A είναι το εσωτερικό της κυρτής γωνίας με πλευρές τις ημιευθείες $\{r : r \ge 0\}$

(τον θετικό ημιάξονα) και $\{re^{i\varphi} : r \ge 0\}$. Το A είναι βέβαια ανοικτό μη φραγμένο σύνολο.. Παρατηρούμε ακόμη ότι $B = \overline{A}$ και άρα $\partial A = \partial B = \overline{A} \setminus \operatorname{int}(A) = \{r : r \ge 0\} \cup \{re^{i\varphi}, r \ge 0\}$.

(Ελέγξτε τις λεπτομέρειες .)

3) Κάθε κλειστός δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι συμπαγές σύνολο ως κλειστό και φραγμένο σύνολο. Παρατηρούμε ότι

(α) $\partial\Delta(a,r) = \partial\overline{\Delta(a,r)} = C(a,r)$ και

(β) Το σύνολο των σ.σ. του $\Delta(a,r)$ είναι ο $\overline{\Delta(a,r)}$. (Γιατί;)

4) Δεν είναι σωστό ότι κάθε σημείο ενός κλειστού συνόλου είναι σ.σ. του συνόλου. Για παράδειγμα , αν $S = \{z \in C : z = 0 \ \text{ή}\ \mathrm{z} = \frac{1}{\mathrm{n}}, n \ge 1\}$.

Τότε το μόνο σ.σ. του S είναι το 0, το οποίο ανήκει στο S , έτσι το S είναι κλειστό σύνολο.

5) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του C είναι συμπαγές. (Γιατί;)

<u>**Παρατηρήσεις 1.29**</u>

1)Τα σημεία z ενός συνόλου $S \subseteq C$ τα οποία δεν είναι σ.σ. του S ονομάζονται <u>μεμονωμένα</u> σημεία του S . Ισοδύναμα: Το $z \in S$ είναι μεμονωμένο σημείο του S αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(z,r) \cap S = \{z\}$. Έτσι αν θέσουμε $r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, στο παράδειγμα

1.28 (4) τότε $\Delta\left(\frac{1}{n}, r_n\right) \cap S = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ και άρα τα σημεία $\frac{1}{n}, n \geq 1$, είναι μεμονωμένα σημεία του S.

2)Αν $S \neq \emptyset$ είναι ανοικτό υποσύνολο του C, τότε κάθε σημείο του S είναι σ.σ. του S, δηλαδή $S \subseteq S'$. Ακόμη παρατηρούμε ότι αν S ανοικτό, ένα σημείο z ανήκει στο ∂S αν και μόνο αν το z είναι σ.σ. του S και $z \notin S$. Αυτό εκφράζει την διαισθητική ιδέα ότι ένα συνοριακό σημείο ενός συνόλου είναι ένα σημείο στην ‘‘άκρη’’ του συνόλου. (Πρβλ. τα παραδείγματα 1.28, (1), (2) και (3).)

Ο ορισμός του ορίου $\lim_{z \to z_0} f(z)$ είναι ανάλογος με την πραγματική περίπτωση και οι ιδιότητες του αποδεικνύονται με ανάλογα επιχειρήματα. Τα ίδια ισχύουν και για την έννοια της συνεχούς συνάρτησης $f : S \subseteq C \to C$.

Ορισμός 1.30

Έστω $f : S \subseteq C \to C$ συνάρτηση $z_0 \in C$ σ.σ. του S και $l \in C$, ορίζουμε τότε $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ (ή συμβολίζουμε $f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} l$) αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$

έτσι ώστε $z \in S$ και $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$.

Ισοδύναμα , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f\left(\Delta(z_0, \delta) \cap S \setminus \{z_0\}\right) \subseteq \Delta(l, \varepsilon)$.

Σημειώνουμε ότι 1) ο αριθμός δ εξαρτάται από το ε και το σημείο α.

2) Το όριο , αν υπάρχει , είναι μοναδικό. (Εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας.)

Πρόταση 1.31 (Χαρακτηρισμός των ορίων με ακολουθίες).

Έστω $f : S \to C$ συνάρτηση, $z_0 \in C$ σ.σ. του S και $l \in C$.

Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(α) $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$

(β) Για κάθε ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ με $z_n \neq z_0$ για $n \geq 1$ και $z_n \to z_0$ έπεται ότι $f(z_n) \to l$.

Πρόταση 1.32

Αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ και $\lim_{z \to z_0} g(z) = k$, τότε

(α) $\lim_{z \to z_0} (c_1 f + c_2 g)(z) = c_1 l + c_2 k$, $\quad c_1, c_2 \in C$

(β) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\cdot g)(z)=l\cdot k$ και

(γ) $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{l}{k}$, αν $k\neq 0$

(Όπου $(f+g)(z)=f(z)+g(z)$, $(cf)(z)=c\cdot f(z)$, $(f\cdot g)(z)=f(z)\cdot g(z)$ και $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$.)

Πρόταση 1.33

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l=l_1+il_2$ αν και μόνο αν $u(x,y)\to l_1$ και $v(x,y)\to l_2$ καθώς $(x,y)\to(a,b)$. (Όπου $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ και $z_0=a+ib$.)

Η πρόταση αυτή μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό των συγκλινουσών ακολουθιών που ακολουθεί τον ορισμό 1.18 καθώς και την πρόταση 1.31.

Παρατήρηση 1.34

Έστω $S\subseteq C$, θα λέμε ότι το ∞ του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\tilde{C}=C\cup\{\infty\}$ είναι σ.σ. του S, αν για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $z\in S$ ώστε $|z|>\varepsilon$. Ισοδύναμα το ∞ είναι σ.σ. του S αν υπάρχει $(z_n)\subseteq S$ ώστε $z_n\to\infty$. Έχοντας υπόψη αυτόν τον ορισμό μπορούμε να ορίσουμε το σύμβολο $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$ και όταν $z_0, l\in\tilde{C}$. Για παράδειγμα αν το ∞ είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού S της f και $l\in C$, τότε ορίζουμε $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=l$ αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $z\in S$ και $|z|>\delta\Rightarrow|f(z)-l|<\varepsilon$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε το σύμβολο $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=l$, $(z_0, l\in\tilde{C})$ και στις υπόλοιπες περιπτώσεις, $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, ...κτλ. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

Παραδείγματα 1.35

1) Το όριο $\lim\limits_{z\to z_0} z^n=z_0^n$, όταν $z_0\in C$ και $n\in N$.

Πράγματι , έστω $(z_m)\subseteq C$ ώστε $z_m\to z_0$, τότε από την πρόταση 1.19 (β) έπεται ότι $z_m^n\to z_0^n$.

Έτσι από τον χαρακτηρισμό των ορίων με ακολουθίες (πρόταση 1.31) έπεται το συμπέρασμα .

2) Το όριο $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{z}$, δεν υπάρχει. Πράγματι αν $z=x\in R$ $(x\neq 0)$ τότε $\dfrac{\bar{z}}{z}=\dfrac{x}{x}=1$ και ιδιαιτέρως τείνει στο 1 καθώς το $x\to 0$.

Αν όμως $z = iy,\ y \in R$, $(y \neq 0)$ τότε $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{-iy}{iy} = -1$ και ιδιαιτέρως τείνει στο -1 καθώς το $y \to 0$.

3) $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$ και $\lim\limits_{z\to\infty} z^n = \infty$ $(n \in N)$.

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχών θετικός αριθμός . Για το πρώτο όριο έχουμε $|z| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \varepsilon$.

Επομένως θέτοντας $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ έχουμε το συμπέρασμα. Για το δεύτερο όριο θέτουμε πάλι $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ και παρατηρούμε ότι αν $0 < |z| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \varepsilon$. Άρα το συμπέρασμα έπεται. Για το τρίτο όριο θέτουμε $\delta = \max(1, \varepsilon)$. Αν $|z| > \delta$, τότε επειδή $\delta \geq 1$, έπεται ότι $|z|^n \geq |z| > \delta \geq \varepsilon$. Το συμπέρασμα είναι ότι $\lim\limits_{z\to\infty} z^n = \infty$.

Ορισμός 1.36

Μια συνάρτηση $f : S \subseteq C \to C$ λέγεται ότι είναι συνεχής στο $z_0 \in S$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $z \in S$ και $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας δίσκους , ο ορισμός της συνέχειας διατυπώνεται ως εξής:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$

ώστε $f\left(\Delta(z_0, \delta) \cap S\right) \subseteq \Delta\left(f(z_0), \varepsilon\right)$.

Σημειώνουμε τα ακόλουθα :

1) Αν z_0 είναι σ.σ. του S τότε ο ανωτέρω ορισμός είναι ισοδύναμος με το ότι

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

2) Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του S τότε η f είναι προφανώς συνεχής στο z_0.

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες .) Στην πραγματικότητα η δεύτερη σημείωση δεν θα μας χρειαστεί καθώς θεωρούμε συνήθως συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $S \subseteq S'$, ιδιαίτερα αυτό ισχύει αν S είναι ανοικτό σύνολο.

Μια συνάρτηση $f : S \to C$ λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $z_0 \in S$.

Πρόταση 1.37 (Χαρακτηρισμός της συνέχειας με ακολουθίες.)

Έστω $f : S \subseteq C \to C$ συνάρτηση και $z_0 \in S$. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Η f είναι συνεχής στο z_0

(β) Για κάθε ακολουθία $(z_n)\subseteq S$ με $z_n \to z_0$ έπεται ότι

$$f(z_n)\to f(z_0).$$

Μία απόδειξη αυτής της πρότασης προκύπτει συνδυάζοντας την πρόταση 1.31 και τις παρατηρήσεις (1) και (2) μετά τον ορισμό 1.36.

Πρόταση 1.38 .

Έστω $f_1, f_2 : S \to C$ συναρτήσεις συνεχείς στο $z_0 \in S$ τότε :

1) Οι συναρτήσεις $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (όπου $c_1, c_2 \in C$) και $f_1 \cdot f_2$ είναι συνεχείς στο $z_0 \in S$.

2) Αν $f_2(z_0)\neq 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f_2(z)\neq 0$ για $z \in S \cap \Delta(z_0,\delta)$ και η $\dfrac{f_1}{f_2}$

(ορισμένη στο $S \cap \Delta(z_0,\delta)$) είναι συνεχής στο z_0 .

3) Αν $f = u + iv$ είναι συνάρτηση ορισμένη στο S , τότε η f είναι συνεχής στο $z_0 \in S$ αν και μόνο αν οι u και v είναι συνεχείς στο z_0 . ($u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$.)

Η πρόταση αυτή είναι συνέπεια των προτάσεων 1.37 ,1.32 και 1.33. (Για τον ισχυρισμό (2) χρησιμοποιούμε τον ορισμό της συνέχειας στο z_0 .)

Πρόταση 1.39

Έστω $f : S \subseteq C \to C$ και $g : T \subseteq C \to C$ συναρτήσεις ώστε $f(S)\subseteq T$. Αν η f είναι συνεχής στο $z_0 \in S$ και η g συνεχής στο $f(z_0)$ τότε η $gof : S \to C$ είναι συνεχής

στο z_0 .

Η πρόταση αυτή είναι απλή συνέπεια της πρότασης 1.37.

Ακολούθως θα αναπτύξουμε εν συντομία έναν χρήσιμο <u>εναλλακτικό τρόπο</u> ορισμού συνεχών συναρτήσεων με την χρήση <u>ανοικτών συνόλων</u>. Πρώτα θα χρειασθούμε μια γενίκευση : Αν $S \subseteq C$ μη κενό σύνολο, ένα υποσύνολο V του S λέγεται ότι είναι <u>ανοικτό</u> στο S (ή σχετικά ανοικτό υποσύνολο του S) αν υπάρχει $U \subseteq C$ ανοικτό ώστε $V = U \cap S$. Ένα υποσύνολο F του S λέγεται <u>κλειστό</u> στο S (ή σχετικά κλειστό υποσύνολο του S) αν υπάρχει $K \subseteq C$ κλειστό ώστε $F = K \cap S$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα : 1) Αν $S = [0,1)\subseteq R \subseteq C$ τότε το $V = \left[0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι ανοικτό

στο S και το $F = \left[\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι κλειστό στο S .

2) Το διάστημα $(a,b)=\{x \in R : a < x < b\}$ είναι ανοικτό στο R αλλά δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του C .

3) Το $V \subseteq S$ είναι ανοικτό στο S αν και μόνο αν το $S \setminus V$ είναι κλειστό στο S. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

Πρόταση 1.40

Έστω $f : S \subseteq C \to C$ συνάρτηση . Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

(α) Η f είναι συνεχής συνάρτηση .

(β) Για κάθε $U \subseteq C$ ανοικτό έπεται ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο S.

(Ιδιαίτερα έπεται ότι , αν το S είναι ανοικτό υποσύνολο του C τότε το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον C.)

(γ) Για κάθε K κλειστό υποσύνολο του C έπεται ότι το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στο S.

(Ιδιαίτερα έπεται ότι , αν το S είναι κλειστό υποσύνολο του C τότε και το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον C.)

Για μια απόδειξη αυτής της πρότασης παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία ($[M-X]$, θεώρημα 3.3.12, $[\mathrm{M}]_1$, πρόταση 3.7, $[\mathrm{M}]_2$ θεώρημα 1.43)

Παραδείγματα 1.41

1) Μια συνάρτηση $f : S \subseteq C \to C$ λέγεται ότι είναι Lipschitz (ή ότι ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz) αν υπάρχει σταθερά $K > 0$, ώστε

$\left|f(z) - f(\omega)\right| \leq K|z-\omega|$, για κάθε $z, \omega \in S$. Η f λέγεται τότε και K-Lipschitz.

Παρατηρούμε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι συνεχής

Πράγματι , δοθέντος του $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$ και παρατηρούμε ότι αν $z, \omega \in S$ με

$|z-\omega| \leq \delta$ τότε $\left|f(z) - f(\omega)\right| \leq K|z-\omega| \leq K \cdot \dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

2) Οι απεικονίσεις $z \in C \to \operatorname{Re} z \in R \subseteq C$ και $z \in C \to \operatorname{Im} z \in R \subseteq C$ είναι Lipschitz και συνεπώς συνεχείς. Πράγματι ,

$$|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} \omega| = |\operatorname{Re}(z-\omega)| \leq |z-\omega|$$

και
$$|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} \omega| = |\operatorname{Im}(z-\omega)| \leq |z-\omega|$$

από όπου έπεται το συμπέρασμα.

(Σημειώνουμε ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι γραμμικές όταν θεωρούμε το C ως πραγματικό διανυσματικό χώρο , και όπως γνωρίζουμε οι γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ Ευκλείδειων χώρων είναι Lipschitz συνεχείς.)

3) Αν $n \in N$ τότε η απεικόνιση $\varphi : z \in C \to z^n \in C$ είναι συνεχής. Αυτό είναι προφανής συνέπεια του παραδείγματος 1.35 (1) και της πρώτης παρατήρησης που ακολουθεί τον ορισμό 1.36. Εναλλακτικά μπορεί να συναχθεί με επαγωγή και την βοήθεια της πρότασης 1.38 (1). Οι απεικονίσεις $z \to z^n \left(n \geq 0\right)$ ονομάζονται μιγαδικά μονώνυμα. Επειδή ένα μιγαδικό πολυώνυμο είναι εξ ορισμού γραμμικός συνδυασμός μονωνύμων με μιγαδικούς συντελεστές, έπεται από την πρόταση 1.38 ότι κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \ \left(n \geq 0\right)$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του C.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδική ρητή συνάρτηση, $f = \dfrac{p}{q}$, όπου p, q μιγαδικά πολυώνυμα με $q \neq 0$, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, το οποίο είναι (αν p και q δεν έχουν κοινές ρίζες) το σύνολο $C \setminus Z(q)$ όπου $Z(q) = \{z \in C : q(z) = 0\}$. Παρατηρούμε ότι το $Z(q)$ είναι κλειστό σύνολο και άρα το πεδίο ορισμού της f είναι ανοικτό σύνολο.

4) Η συνάρτηση απόλυτη τιμή $z \in C \to |z| \in R \subseteq C$ είναι συνεχής. Πράγματι η απόλυτη τιμή ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz αφού

$$\big|\, |z| - |\omega| \,\big| \leq |z - \omega|, z, \omega \in C.$$

5) Αποδείξτε ότι $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in R$ και συμπεράνατε ότι η απεικόνιση $\varphi : x \in R \to e^{ix} \in C$ είναι συνεχής. Ποια η γεωμετρική σημασία της ανισότητας αυτής;

Παρατηρούμε ότι $\left|e^{ix} - e^{iy}\right|^2 = \left(\cos x - \cos y\right)^2 + \left(\sin x - \sin y\right)^2 =$

$= 2 - 2\left(\cos x \cos y + \sin x \sin y\right) = 2\left[1 - \cos\left(x - y\right)\right]$

$= 4\left[\dfrac{1 - \cos\left(x - y\right)}{2}\right] = 4\sin^2\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$. Άρα $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| = 2\left|\sin\left(\dfrac{x - y}{2}\right)\right| \leq 2\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}\right| = |x - y|$.

(Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι Lipschitz με σταθερά $K = 1$.) Έπεται ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{ix}, x \in R$ είναι Lipschitz και συνεπώς συνεχής.

Βέβαια η συνέχεια της φ έπεται και από το θεώρημα 1.38 (3). Η παραπάνω ανισότητα είναι η αναλυτική έκφραση ενός κλασικού γεωμετρικού αποτελέσματος: Αν A και B είναι σημεία ενός κύκλου τότε το μήκος της χορδής που συνδέει τα A και B είναι μικρότερο ή ίσο του μήκους του ελάσσονος τόξου που συνδέει τα A και B.

6)Η συνάρτηση $z \in C \setminus \{0\} \xrightarrow{\varphi} \dfrac{z}{|z|} \in C$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των τιμών της φ είναι $\varphi\left(C \setminus \{0\}\right) = C(0,1)$.

III Συνεκτικότητα στο C

Έστω $I \subseteq R$ τυχόν διάστημα και $f : I \to R$ συνεχής συνάρτηση , τότε ως γνωστόν η f έχει την ιδιότητα της ενδιαμέσου τιμής και συνεπώς το $f(I)$ είναι επίσης διάστημα του R . Η ιδιότητα αυτή δεν εξαρτάται μόνο από την συνέχεια της f αλλά και από μια ιδιότητα των διαστημάτων η οποία ονομάζεται συνεκτικότητα. Η έννοια της συνεκτικότητας γενικεύεται και στον C και παρουσιάζει σημαντικό ενδιαφέρον.

Για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων επί της συνεκτικότητας που θα παρουσιάσουμε παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία και ειδικότερα στα $[\mathrm{M}]_1$ και $[\mathrm{M}]_2$ (παράγραφος 6).

Ορισμός 1.42

Ένα υποσύνολο $S \subseteq C$ λέγεται συνεκτικό αν δεν είναι ένωση δύο ξένων μη κενών σχετικά ανοικτών υποσυνόλων του.

Ισοδύναμα , ένα υποσύνολο $S \subseteq C$ δεν είναι συνεκτικό αν υπάρχουν $U, V \subseteq C$ ανοικτά ώστε $S \cap U \neq \varnothing,\ S \cap V \neq \varnothing,\ (S \cap U) \cap (S \cap V) = \varnothing$ και $(S \cap U) \cup (S \cap V) = S$.
Προφανώς τα μονοσύνολα του C είναι σύνολα συνεκτικά.

Τα συνεκτικά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

Θεώρημα 1.43 (Συνεκτικότητα των διαστημάτων).

Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του R με περισσότερα από ένα στοιχεία είναι τα διαστήματα (ανοικτά , κλειστά , ημιανοικτά, φραγμένα ή μη φραγμένα).

Λήμμα 1.44

Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι για ένα υποσύνολο $S \subseteq C$.

(α) Το S δεν είναι συνεκτικό.

(β) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : S \to C$ ώστε $f(S) = \{0,1\}$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του λήμματος υπενθυμίζουμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης: Αν X τυχόν σύνολο και $A \subseteq X$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η συνάρτηση $X_A : X \to R$ $\mu\varepsilon$ $X_A(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathrm{A} \\ 0, x \notin A \end{cases}$.

Απόδειξη του λήμματος 1.44. (α) $\Rightarrow$ (β) Το S γράφεται ως $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$, όπου U και V ανοικτά στο C με $S \cap U \neq \varnothing \neq S \cap V$ και $(S \cap U) \cap (S \cap V) = \varnothing$.

Θέτουμε $f = X_{S \cap U}$ και παρατηρούμε ότι η f αντιστρέφει τα ανοικτά υποσύνολα του C σε σχετικά ανοικτά υποσύνολα του S , επομένως από την πρόταση 1.40 είναι συνεχής.

Προφανώς $f(S) = \{0,1\}$.

(β) $\Rightarrow$ (α) Τα σύνολα $S_0 = f^{-1}(\{0\})$ και $S_1 = f^{-1}(\{1\})$ είναι σχετικά ανοικτά μη κενά και ξένα υποσύνολα του S ώστε $S_0 \cup S_1 = S$. Επομένως το S δεν είναι συνεκτικό.

Πρόταση 1.45

Έστω $S \subseteq C$ συνεκτικό και $f : S \to C$ συνεχής συνάρτηση τότε το $f(S)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του C.

Απόδειξη. Αν το $f(S)$ δεν ήταν συνεκτικό τότε θα υπήρχε συνεχής συνάρτηση $g : f(S) \to C$ με $g(f(S)) = \{0,1\}$. Τότε η συνάρτηση $gof : S \to C$ θα ήταν συνεχής και $(gof)(S) = \{0,1\}$. Επομένως το S δεν θα ήταν συνεκτικό , άτοπο.

Το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής για συνεχείς συναρτήσεις στο οποίο αναφερθήκαμε πριν γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο

Θεώρημα 1.46 (Ενδιαμέσου τιμής)

Έστω $f : S \subseteq C \to R$ συνεχής συνάρτηση . Αν το S είναι συνεκτικό υποσύνολο του C τότε το $f(S)$ είναι διάστημα του R. (Δηλαδή η f παίρνει κάθε τιμή μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της.).

Απόδειξη. Έπεται προφανώς από την πρόταση 1.45 και το θεώρημα 1.43.

Λήμμα 1.47

Έστω $\{S_i : i \in I\}$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του C ώστε $\bigcap_{i \in I} S_i \neq \varnothing$, τότε η ένωση $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του C. Επίσης η κλειστότητα ενός συνεκτικού υποσυνόλου του C είναι συνεκτικό σύνολο.

Για την απόδειξη αυτού του λήμματος χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.44. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

Ορισμός 1.48

Έστω $S \subseteq C$ και $z \in S$. Η συνεκτική συνιστώσα S_z του z είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του S που περιέχουν το z.

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 1.44 και 1.47 αποδεικνύεται εύκολα (αφήνεται ως άσκηση) η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.49

Έστω $S \subseteq C$ και $z \in S$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

(α) Η συνεκτική συνιστώσα S_z του $z \in S$ είναι συνεκτικό σύνολο. Μάλιστα είναι μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υποσύνολο του S. (Αν $S_z \subseteq X \subseteq S$ και X συνεκτικό τότε $S_z = X$.)

(β) Η συνεκτική συνιστώσα S_z του $z \in S$ είναι <u>σχετικά κλειστό</u> υποσύνολο του S.

(γ) Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του S συνιστά μια <u>διαμέριση του</u> S. (Δηλαδή κάθε δύο διαφορετικές συνιστώσες του S είναι ξένες και η ένωση όλων των συνεκτικών συνιστωσών του S ισούται με το S. Προφανώς, αν το S είναι συνεκτικό, τότε η μόνη συνεκτική συνιστώσα του είναι το ίδιο το S.)

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός συνόλου S δεν είναι απαραίτητα σχετικά ανοικτά υποσύνολα του S. Για παράδειγμα οι συνεκτικές συνιστώσες του $S = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\} \subseteq R \subseteq C$ είναι οι $\{1\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, ..., \left\{\frac{1}{n}\right\}, ...$ και το $\{0\}$. Παρατηρούμε ότι το μονοσύνολο $\{0\}$ δεν είναι σχετικά ανοικτό στο S.

2) Αν S πεπερασμένο υποσύνολο του C, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του S είναι τα μονοσύνολά του.

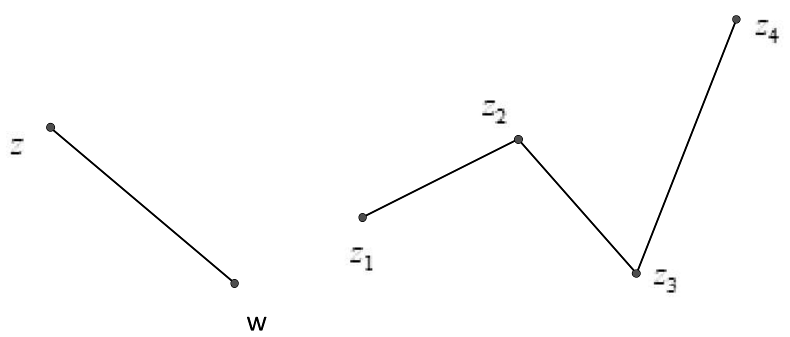
<u>Ορισμός 1.50</u>

(α) Έστω $z, \mathrm{w} \in C$ με $z \neq w$. Το (προσανατολισμένο) ευθύγραμμο τμήμα από το z στο w είναι το σύνολο $[z, \mathrm{w}] = \{(1-t)z + t\,w : t \in [0,1]\} \subseteq C$.

(β) Έστω $z_1, z_2, ..., z_n$ σημεία του C. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία $z_1, z_2, ..., z_n$ είναι το σύνολο $P = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup ... \cup [z_{n-1}, z_n]$.

(γ) Ένα υποσύνολο $K \subseteq C$ λέγεται κυρτό αν, για κάθε $z, \mathrm{w} \in K$ ισχύει ότι $[z, \mathrm{w}] \subseteq K$.

Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[z, \mathrm{w}]$ είναι κυρτό σύνολο.



<u>Πρόταση 1.51</u>

(α) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και κάθε πολυγωνική γραμμή είναι σύνολα συνεκτικά.

(β) Κάθε κυρτό σύνολο $K \subseteq C$ είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω $z, \mathrm{w} \in C$, τότε η απεικόνιση $\varphi:[0,1] \to [z,\mathrm{w}]: \varphi(t) = (1-t)z + t\,w$ είναι συνεχής και $\varphi([0,1]) = [z,\mathrm{w}]$. Επομένως το $[z,\mathrm{w}]$ είναι συνεκτικό.

Το γεγονός ότι μια πολυγωνική γραμμή P είναι συνεκτικό σύνολο αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών της. Για $m=2$ η P είναι ευθύγραμμο τμήμα και άρα συνεκτικό σύνολο. Για το επόμενο βήμα της επαγωγής χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.47.

(β) Έστω $K \subseteq C$ κυρτό και $z \in K$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι $[z,\mathrm{w}] \subseteq K$ για κάθε $w \in K$ επομένως $K = \cup\{[z,\mathrm{w}]: \quad w \in \mathrm{K}\}$.

Από το Λήμμα 1.47 έπεται το συμπέρασμα

<u>Παραδείγματα κυρτών συνόλων 1.52</u>

1) Κάθε ανοικτός ή κλειστός δίσκος του C είναι κυρτό σύνολο.

2) Κάθε ημιεπίπεδο (ανοικτό ή κλειστό) είναι κυρτό υποσύνολο του C .

3) Το εσωτερικό ενός τριγώνου ή παραλληλογράμμου είναι κυρτό υποσύνολο του C . Βέβαια και κάθε κλειστό τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο (το εσωτερικό μαζί με το σύνορο) είναι κυρτό σύνολο.

Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι απλή και διαισθητικά προφανής.

Αποδεικνύεται ό ακόλουθος χρήσιμος για τους σκοπούς μας χαρακτηρισμός των ανοικτών και συνεκτικών υποσυνόλων του C .

<u>Θεώρημα 1.53</u>

Έστω $U \subseteq C$ ανοικτό σύνολο . Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Το U είναι συνεκτικό σύνολο.

(β) Για κάθε $z, \omega \in U$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $P \subseteq U$ με αρχικό σημείο το z και τελικό σημείο το ω. (Το U είναι όπως συνήθως λέμε πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο.)

Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του C ονομάζεται και <u>τόπος</u>. Προφανώς κάθε ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του C είναι τόπος.

<u>Παραδείγματα 1.54</u>

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι τόποι στο C, οι οποίοι εν γένει δεν είναι κυρτά σύνολα.

1) Αν $F \subseteq C$ είναι πεπερασμένο μη κενό σύνολο τότε το $C \setminus F$ καθώς και το $\Delta(\alpha,r)\setminus F$

(για κάθε $a \in C$ και $r>0$) είναι σύνολα (ανοικτά και) συνεκτικά , αλλά όχι κυρτά. (Στην περίπτωση του δίσκου, υποθέτουμε ότι $\Delta(\alpha,r)\cap F \neq \varnothing$.)

2) Αν $z \in C$ και $0 < r_1 < r_2$ τότε ο δακτύλιος

$$\Delta(z, r_2) \setminus \overline{\Delta(z, r_1)}$$

είναι (ανοικτό και) συνεκτικό σύνολο , αλλά όχι κυρτό.

3) Αν οι δίσκοι $\Delta(z, r_1), \Delta(\omega, r_2)$ τέμνονται τότε η ένωσή τους είναι (ανοικτό και) συνεκτικό σύνολο.

Η απόδειξη των (1) , (2) και (3) αφήνεται ως άσκηση.

Καθόσον αφορά τις συνεκτικές συνιστώσες ενός ανοικτού υποσυνόλου του C αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.55

Έστω $U \subseteq C$ ανοικτό σύνολο. Τότε ισχύουν :

(α) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του U είναι ανοικτό υποσύνολο του C

(β) Το U έχει αριθμήσιμο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών.

Σημειώνουμε ότι για την απόδειξη του ισχυρισμού (β) χρησιμοποιούμε τον (α) καθώς και το γεγονός ότι ο C περιέχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο, π.χ. το σύνολο $Q + iQ = \{x + iy : x, y \ \rho\eta\tau o\acute{\iota}\ \alpha\rho\iota\theta\mu o\acute{\iota}\}$. (Ένα υποσύνολο D του C λέγεται πυκνό αν $\overline{D} = C$.)

Παραδείγματα

1) Έστω $\Delta(a_1, r_1), \Delta(a_2, r_2), \ldots, \Delta(a_n, r_n)$ ανοικτοί ξένοι ανά δύο δίσκοι. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του ανοικτού συνόλου, $U = \bigcup_{\kappa=1}^{n} \Delta(\alpha_\kappa, r_\kappa)$ είναι οι δίσκοι $\Delta(a_1, r_1), \Delta(a_2, r_2), \ldots, \Delta(a_n, r_n)$.

2) Οι συνεκτικές συνιστώσες του ανοικτού συνόλου $S = C \setminus (R \cup iR)$ είναι τα 4 τεταρτημόρια του μιγαδικού επιπέδου.

Ασκήσεις

1) Εκφράστε τους μιγαδικούς αριθμούς στην μορφή $a + ib, a, b \in R$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\sqrt{2}i(\pi + 2i)$, (β) $(i-1)(2-i)$, (γ) $(i+1)(i-2)(i+3)$

(δ) $\dfrac{1}{2+i}$, (ε) $\dfrac{2i}{3-i}$, (στ) $\dfrac{1+i}{i}$ και (ζ) $\dfrac{i}{1+i}$.

2) Περιγράψτε γεωμετρικά τα σύνολα των $z \in C$ τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες.

(α) $|z-i+2|=2$, (β) $|z-i+2|>4$, (γ) $1<|z-i+2|<2$

(δ) $\operatorname{Re} z>2$, (ε) $1<\operatorname{Im} z<2$ και (στ) $1<\operatorname{Im}(z-i)<2$

3) Εκφράστε τους δοσμένους μιγαδικούς:

(α) $1 \pm i, -1 \pm i$ και $1 \pm i\sqrt{2}$ σε τριγωνομετρική μορφή.

(β) $e^{2\pi i}$, $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\pi e^{\frac{-\pi i}{3}}$ και $3e^{\frac{-5i\pi}{4}}$ στην συνήθη μορφή $(a+bi, a,b \in R)$.

4) Να λυθούν οι εξισώσεις : $z^5=1$, $z^{10}+4=0$, $z^4=i$, $z^2-(3+i)z+(2+2i)=0$ και $z^2-3z+1+i=0$.

5) Να λυθεί η εξίσωση $z^n=\bar{z}$, $(n \in N)$.

6) Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $(z+1)^5+z^5=0$ ευρίσκονται στην ευθεία $x=-\frac{1}{2}$.

7) Αποδείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $(1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}=0$, $(n \in N)$ δίνονται από τον τύπο

$$z_\kappa = i \cdot \tan\frac{(2\kappa+1)}{4n}\pi, \qquad \kappa = 0,1,2,\ldots,2n-1.$$

(<u>Υπόδειξη</u> : Διαιρέστε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $1-z$ και θέστε $\omega=\frac{1+z}{1-z}$.)

8) Αποδείξτε την ταυτότητα :

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad \theta \in R,\ \theta \neq 2m\pi,\ (m \in Z).$$

(<u>Υπόδειξη</u> : Θέστε στην ταυτότητα $z+z^2+\ldots+z^n=z\cdot\frac{1-z^n}{1-z}$, όπου $z=e^{i\theta}$.

Παρατηρήστε ότι $$e^{i\theta}\cdot\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}$$ και κατόπιν εξισώστε τα πραγματικά μέρη της προκύπτουσας εξίσωσης.)

9) Έστω $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ οι διαδοχικές κορυφές κανονικού $n-$γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $C(a,R)$ $(a \in C,\ R>0,\ n \geq 2)$.

Αποδείξτε ότι : (α) Αν $\alpha = 0$, τότε οι κορυφές του $n-$γώνου συμπίπτουν με τις ρίζες κατάλληλου μιγαδικού αριθμού και συμπεράνατε ότι $\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1} = 0$

(β) Υπολογίστε στην περίπτωση $\alpha \neq 0$ το άθροισμα $\omega_0 + \omega_1 + ... + \omega_{n-1}$.

[Υπόδειξη. Επιλέγουμε μια κορυφή π.χ. την $z_0 = \mathrm{R}e^{i\theta}$ και θέτουμε $\omega = z_o^n$. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = \omega$ είναι οι κορυφές του $n-$γώνου.]

10) Έστω $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$, οι $n-$οστές ρίζες της μονάδας $(n \geq 2)$. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση την ακολουθία $z_1^m, m \geq 1$ $\left(z_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)$.

11) Έστω (z_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών ώστε $z_n \to z \in C$. Αποδείξτε ότι :

(α) $|z_n| \to |z|$. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) $\dfrac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n} \to z$.

12) Έστω $a_n, b_m \in C \setminus \{0\}$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{a_n z^n + ... + a_1 z + a_0}{b_m z^m + ... + b_1 z + b_0} = \begin{cases} \infty, n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, n = m \\ 0, n < m \end{cases}$.

13) Αποδείξτε ότι : (α) Κάθε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο και κάθε πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(β) Κάθε τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο και κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Αν F κλειστό στο C και $S \subseteq F$ τότε $\overline{S} \subseteq F$. Επομένως $\overline{S}$ είναι η τομή των κλειστών συνόλων που περιέχουν το S .

(δ) S είναι κλειστό αν και μόνο αν $S' \subseteq S$, αν και μόνο αν $\overline{S} = S$.

(ε) Το S είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ ώστε $z_n \to z$ έπεται ότι $z \in S$.

(στ) Αν $K \subseteq C$ είναι φραγμένο, τότε το $\overline{K}$ είναι συμπαγές.

(ζ) Κάθε πεπερασμένη ένωση συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο και κάθε τομή συμπαγών είναι συμπαγές.

(η) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του C είναι συμπαγές.

14) Έστω $K \subseteq C$ συμπαγές και $f : K \to C$ συνεχής. Αποδείξτε ότι:

(α) Το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του C

(β) Αν η f είναι πραγματική συνάρτηση (δηλαδή $f(K) \subseteq R$) τότε η f επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

15) Μία συνάρτηση $f : S \subseteq C \to C$ λέγεται ότι είναι <u>ομοιόμορφα συνεχής</u> αν , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε , $z, \omega \in S$ και $|z - \omega| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$.
(Προφανώς , η ομοιόμορφη συνέχεια συνεπάγεται την συνέχεια.)

Αποδείξτε ότι: (α) Κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

(β) Μια συνάρτηση $f : S \subseteq C \to C$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(z_n), (\omega_n) \subseteq C$ ώστε $|z_n - \omega_n| \to 0$ έπεται ότι $|f(z_n) - f(\omega_n)| \to 0$.

(γ) Αν $K \subseteq C$ συμπαγές και $f : K \to C$ συνεχής , τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Οι συναρτήσεις $z^2, z \in C$ και $\frac{z}{|z|}, z \neq 0$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (αν και συνεχείς).

(ε) Η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $c \le |z| < 1$ (όπου $0 < c < 1$) αλλά όχι στο $0 < |z| \le 1$.

16) Έστω $Z_n, n \ge 1$, το σύνολο των $n-$ οστών ριζών της μονάδας.

Αποδείξτε ότι : (α) Το Z_n είναι με τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό αβελιανή (κυκλική) ομάδα.

(β) Το σύνολο $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του μοναδιαίου κύκλου $C(0,1)$.

(Δηλαδή κάθε τόξο του $C(0,1)$ περιέχει στοιχεία του Z .)

(γ) Ο μοναδιαίος κύκλος $C(0,1)$ είναι με τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό αβελιανή ομάδα.

17) Ένα υποσύνολο D του C λέγεται <u>αστρόμορφο</u> αν υπάρχει $z \in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[z, \omega] \subseteq D$ για κάθε $\omega \in D$.

Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό.

(β) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο.

(γ) Παραδείγματα ανοικτών και αστρόμορφων συνόλων (αστρόμορφων τόπων) που δεν είναι κυρτά σύνολα είναι τα ακόλουθα:

γ_1) Έστω $L = [z, \infty)$ κλειστή ημιευθεία του C τότε το $D = C \setminus L$ είναι αστρόμορφος τόπος.

γ_2) Έστω $\Delta(a,r)$ ανοικτός δίσκος. Αν $z \in \Delta(a,r)$ και L είναι κλειστή ημιευθεία του C με αρχή το z, τότε το $D = \Delta(a,r) \setminus L$ είναι αστρόμορφος τόπος.

γ_3) Αν εξαιρέσουμε από ένα ανοικτό δίσκο ένα πεπερασμένο αριθμό κλειστών ακτινωτών ευθυγράμμων τμημάτων διατηρώντας το κέντρο του, τότε ο προκύπτων τόπος είναι αστρόμορφος ως προς το κέντρο του δίσκου.

(δ) Ο δακτύλιος $\Delta(\alpha,r_2) \setminus \overline{\Delta(\alpha,r_1)}$ ($0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$) είναι παράδειγμα τόπου ο οποίος δεν είναι αστρόμορφος.

(ε) Αν D_1, D_2 είναι αστρόμορφοι τόποι ως προς το ίδιο σημείο z_0, τότε $D_1 \cup D_2$ και $D_1 \cap D_2$ είναι επίσης αστρόμορφοι τόποι ως προς το σημείο z_0. Ένα τέτοιο παράδειγμα έχουμε στην περίπτωση δύο τεμνόμενων ανοικτών δίσκων.

18) Η διάμετρος ενός μη κενού συνόλου $S \subseteq C$ συμβολίζεται με $d(S)$ και ορίζεται ως $d(S) = \sup\{|z-\omega| : z,\omega \in S\}$. Είναι σαφές ότι το S είναι φραγμένο αν και μόνο αν $d(S) < +\infty$. Αποδείξτε το ακόλουθο θεώρημα του Cantor : Έστω $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_n \supseteq \ldots$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του C ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} d(K_n) = 0$. Τότε το σύνολο $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ περιέχει ένα ακριβώς σημείο. [<u>Υπόδειξη</u>: Για κάθε $n \in N$ επιλέξτε $z_n \in K_n$ και αποδείξτε ότι η (z_n) είναι ακολουθία Cauchy.]

19) Έστω $\varnothing \ne S \subseteq C$ και $z \in C$. Η απόσταση του z από το S ορίζεται ως

$$d(z,S) = \inf\{\, |z-w| : w \in S\}.$$

Η απόσταση δύο μη κενών υποσυνόλων A και B του C ορίζεται ως

$$d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \inf\{\, |z-w| : \mathrm{z} \in \mathrm{A} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \mathrm{w} \in \mathrm{B}\} \quad (= \inf\{\, d(z,\mathrm{B}) : \mathrm{z} \in \mathrm{A}\}).$$

Αποδείξτε ότι:

(α) $d(z,S) = 0 \Leftrightarrow z \in \overline{S}$. Επομένως $\overline{S} = \{\, z \in C : d(z,S) = 0\}$.

(β) Η απεικόνιση $z \in C \mapsto d(z,S) \in R$ είναι 1-Lipschitz και άρα συνεχής.

(γ) Αν A, B είναι μη κενά, κλειστά και ξένα υποσύνολα του C ώστε το B να είναι συμπαγές, τότε $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) > 0$.

[<u>Υπόδειξη για το (γ):</u> Η συνάρτηση $d(z,\mathrm{A})$ είναι συνεχής επί του συμπαγούς B και άρα επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{B}$.]

20) Έστω $D = Q + iQ = \{p + iq : p, q \in Q\}$. Αποδείξτε ότι:

α) Το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του C.

β) Η οικογένεια των ανοικτών δίσκων

$$B = \{\Delta(\mathrm{z}, p) : \mathrm{z} \in D \;\; \kappa\alpha\iota \;\; p > 0, p \in Q\}$$

είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του C. Δηλαδή, αν $\varnothing \neq U$ ανοικτό στο C, τότε το U είναι ένωση μελών της.

γ) Αν $\Delta(a, r)$ είναι ανοικτός δίσκος τότε

$$\Delta(a, r) = \bigcup \left\{ \overline{\Delta(a, \rho)} : 0 < \rho < r, \;\; \rho \;\; \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \right\}.$$

Ιδιαίτερα έπεται ότι ο $\Delta(a, r)$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών και άρα συμπαγών δίσκων.

δ) Αν U είναι ανοικτό στο C, τότε το U είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών δίσκων.

[Υπόδειξη. (α) Το Q είναι πυκνό στο R, από όπου έπεται ότι και το D είναι πυκνό στο C. Δηλαδή για κάθε $\Delta(\mathrm{z}, \varepsilon)$ υπάρχει $w \in D$ ώστε $w \in \Delta(\mathrm{z}, \varepsilon)$. Η αριθμησιμότητα του Q συνεπάγεται και αυτή του D.

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $z \in U$, υπάρχει $\Delta(\mathrm{w}, \mathrm{p}) \in B$ ώστε $z \in \Delta(\mathrm{w}, \mathrm{p}) \subseteq U$. Πράγματι, υπάρχει $\Delta(\mathrm{z}, \mathrm{r}) \subseteq U$ και βέβαια μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r \in Q$. Έστω $w \in D$ ώστε $|z - w| < \frac{r}{3}$, τότε $z \in \Delta\left(\mathrm{w}, \frac{r}{2}\right) \subseteq \Delta(z, r) \subseteq U$.]

21) Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό ώστε $\Omega \neq C$. Αν $a \in \Omega$, αποδείξτε ότι

$$d(a, C \setminus \Omega) = d(a, \partial\Omega).$$

[Υπόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι με $\partial\Omega$ συμβολίζουμε το σύνορο του Ω, το οποίο ορίζεται ως $\partial\Omega = \overline{\Omega} \bigcap \overline{(C \setminus \Omega)}$ ($= \overline{\Omega} \setminus \operatorname{int}\Omega$) και ακόμη ότι τα σύνολα Ω, $\partial\Omega$ και $\operatorname{int}(C \setminus \Omega)$ συνιστούν μια διαμέριση του C. Επειδή το $C \setminus \Omega$ είναι κλειστό, έπεται ότι $\partial\Omega = \overline{\Omega} \bigcap (C \setminus \Omega) \subseteq C \setminus \Omega$. Επομένως $d(a, C \setminus \Omega) \leq d(a, \partial\Omega)$ (1).

Αν το $\operatorname{int}(C \setminus \Omega) = \varnothing$, τότε $C = \Omega \bigcup \partial\Omega$ και επειδή $\Omega \bigcap \partial\Omega = \varnothing$, έπεται ότι $\partial\Omega = C \setminus \Omega$ και έτσι ισχύει ισότητα στην (1).

Υποθέτουμε ότι $\operatorname{int}(C \setminus \Omega) \neq \varnothing$. Για να αποδείξουμε ότι ισχύει ισότητα στην (1) αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

$\forall b \in C \setminus \Omega \quad \exists z \in \partial\Omega : \; |a - z| \leq |a - b|$ (2).

Αν $b \in \partial\Omega \subseteq C \setminus \Omega$, τότε αρκεί να επιλέξουμε $z = b$. Έτσι υποθέτουμε ότι $b \in \operatorname{int}(C \setminus \Omega)$. Τότε $[a, b] \bigcap \partial\Omega \neq \varnothing$ (και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $z \in [a, b] \bigcap \partial\Omega$), πράγματι αν η ανωτέρω τομή ήταν το κενό σύνολο τότε $[a,b] \subseteq \Omega \bigcup \mathrm{int}(C \setminus \Omega)$ και κατά συνέπεια $[a,b] = (\Omega \bigcap [a,b]) \bigcup \left(\mathrm{int}(C \setminus \Omega) \bigcap [a,\mathrm{b}]\right)$ και η ισότητα αυτή αντιφάσκει με τη συνεκτικότητα του ευθυγράμμου τμήματος $[a,b]$.]

2. Μιγαδική παραγώγιση

Στο Κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τη μιγαδική παράγωγο και τη συνακόλουθη έννοια της ολόμορφης συνάρτησης. Στο πρώτο μέρος του, μελετούμε τις στοιχειώδεις ιδιότητες της μιγαδικής παραγώγισης (οι οποίες είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες ιδιότητες της παραγώγισης συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής) και στο δεύτερο μέρος τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Δηλαδή εκείνες τις εξισώσεις οι οποίες μας υποδεικνύουν πώς (οφείλουν να) συνδέονται οι μερικές παράγωγοι του πραγματικού και του φανταστικού μέρους μιας ολόμορφης συνάρτησης.

2.1 Μιγαδική παράγωγος και ολόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός 2.1. Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό σύνολο, $\alpha \in \Omega$ και $f : \Omega \to C$ συνάρτηση. Λέμε ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α αν το όριο

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

υπάρχει και είναι μιγαδικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(a)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο a.

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης , το ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο a, σημαίνει ότι υπάρχει $\omega \in C$ ώστε

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$: $z \in \Omega$, $|z - a| < \delta(\varepsilon)$

$$\Rightarrow |f(z) - f(a) - \omega(z - a)| \le \varepsilon |z - a|. \qquad \text{(και τότε } \omega = f'(a) \text{).}$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι η ύπαρξη της μιγαδικής παραγώγου της f στο a ισοδυναμεί με το ότι το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

υπάρχει στο C.

Μια συνάρτηση $f : \Omega \subseteq C \to C$, όπου $\Omega \subseteq C$ ανοικτό σύνολο ονομάζεται ολόμορφη (ή αναλυτική) αν έχει μιγαδική παράγωγο σε κάθε σημείο $a \in \Omega$.

Παραδείγματα 2.2

1) Είναι προφανές ότι κάθε σταθερή συνάρτηση $f(z) = c, z \in \Omega$ είναι ολόμορφη και $f'(z) = 0, z \in \Omega$.

2) Τα μιγαδικά μονώνυμα , δηλαδή οι συναρτήσεις $\varphi(z) = z^n$, $z \in C$, $n \ge 1$ είναι ολόμορφες στο C. Πράγματι , έστω $\alpha \in C$ και $n \in N$ τότε

$$z^n - a^n = (z - a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right).$$

Άρα αν $z \neq a$ τότε $\dfrac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-a} = z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1}$ από όπου έπεται ότι

$$\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-a} = na^{n-1}.$$

Έτσι η $\varphi(z) = z^n$, είναι ολόμορφη και

$$\varphi'(z) = nz^{n-1},\ z \in C.$$

3) Η συνάρτηση $f(z) = \overline{z},\ z \in C$, η οποία απεικονίζει τον z στον συζυγή του, δεν έχει μιγαδική παράγωγο σε οποιοδήποτε σημείο του C.

Έστω $a = x_0 + iy_0 \in C$. Παρατηρούμε ότι αν προσεγγίσουμε τον a κινούμενοι παράλληλα με τον πραγματικό άξονα, δηλαδή αν $z = x + iy_0$, με $z \neq a$, τότε έχουμε

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a} = \frac{\overline{z-a}}{z-a} = \frac{\overline{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}}{x+iy_0-(x_0+iy_0)} = \frac{\overline{x-x_0}}{x-x_0} = 1.$$

Ενώ αν κινηθούμε προς τον α παράλληλα προς τον φανταστικό άξονα έχουμε , αν $\omega = x_0 + iy$ με $\omega \neq \alpha$, ότι

$$\frac{f(\omega)-f(a)}{\omega-a} = \frac{\overline{\omega}-\overline{a}}{\omega-a} = \frac{\overline{\omega-a}}{\omega-a} == -1.$$

Έτσι η συνάρτηση $z \in C \to \overline{z} \in C$, παρ' όλες τις καλές ιδιότητές της , αλγεβρικές (είναι ένας αυτομορφισμός του σώματος C), τοπολογικές (είναι ομοιομορφισμός του C επί του C) και περαιτέρω τις ιδιότητες διαφόρισης (είναι μια αμφιδιαφόριση του R^2 επί του R^2 εφόσον $f(x,y) = (x,-y)$, $(x,y) \in R^2$ και η f είναι $R-$γραμμική και $1-1$) βρίσκεται στον αντίποδα της μιγαδικής παραγώγισης. Με το παράδειγμα αυτό κατανοούμε, ότι μιγαδική παραγώγιση και διαφορισιμότητα υπό την έννοια των πραγματικών μεταβλητών είναι <u>διαφορετικές</u> έννοιες. Αργότερα θα διαπιστώσουμε ότι,

Μιγαδική παραγώγιση $\Rightarrow$ διαφορισιμότητα

Η ακόλουθη απλή πρόταση – αποδιδόμενη στον Καραθεοδωρή – μας δίνει ένα ισοδύναμο ορισμό της μιγαδικής παραγώγισης ο οποίος διευκολύνει τις αποδείξεις των στοιχειωδών ιδιοτήτων των ολομόρφων συναρτήσεων.

<u>Πρόταση 2.3 (Παρατήρηση Καραθεοδωρή)</u>

Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό , $\alpha \in \Omega$ και $f:\Omega \to C$ συνάρτηση . Τότε η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi:\Omega \to C$ συνεχής στο α, ώστε $f(z)-f(a) = \varphi(z)(z-a)$, $z \in \Omega$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $f'(a) = \varphi(a)$.

Απόδειξη. $''\Rightarrow''$ Ορίζουμε

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & z\in\Omega, z\neq a\\ f'(a), & z=a\end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $\lim_{z\to a}\varphi(z)=f'(a)=\varphi(a)$, άρα η φ είναι συνεχής στο a και βέβαια

$$f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a), \text{ για } z\in\Omega.$$

$''\Leftarrow''$ Παρατηρούμε ότι

$$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(a)}{z-a},\ z\in\Omega,\ z\neq a$$

και βέβαια από την συνέχεια της φ στο a έχουμε

$$\varphi(a)=\lim_{z\to a}\varphi(z)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=f'(a).$$

Συνεπώς η f έχει μιγαδική παράγωγο στο a και $f'(a)=\varphi(a)$.

Πόρισμα 2.4

Έστω $\Omega\subseteq C$ ανοικτό και $f:\Omega\to C$ συνάρτηση η οποία έχει μιγαδική παράγωγο στο $\alpha\in\Omega$ τότε η f είναι συνεχής στο a.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει $\varphi:\Omega\to C$ συνεχής στο a ώστε

$$f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a),\ z\in\Omega.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{z\to a}f(z)=f(a)+\lim_{z\to a}\left[\varphi(z)(z-a)\right]=f(a)+\varphi(a)\cdot 0=f(a).$$

Έτσι η f είναι συνεχής στο a.

Στην επόμενη πρόταση εισάγονται οι κανόνες μιγαδικής παραγώγισης . Οι κανόνες αυτοί

(και οι αποδείξεις τους) είναι ανάλογοι με τους αντίστοιχους για συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Πρόταση 2.5

Έστω $\Omega\subseteq C$ ανοικτό , $\alpha\in\Omega$ και $f,g:\Omega\to C$ συναρτήσεις και $\lambda\in C$. Αν οι f,g έχουν μιγαδική παράγωγο στο α τότε :

(1) Οι $f+g,\ \ f\cdot g,\ \lambda f$, έχουν μιγαδική παράγωγο στο α και ισχύουν

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$$

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a)=\lambda\cdot f'(a).$$

(2) Αν $g(a)\neq 0$ τότε η $\frac{f}{g}$ έχει μιγαδική παράγωγο στο α και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}\ .$$

Ιδιαίτερα έπεται ότι $\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}$.

Απόδειξη. Από τον ισχυρισμό (1) αποδεικνύουμε ενδεικτικά τον τύπο για την παραγώγιση του γινομένου δύο συναρτήσεων. Από την πρόταση 2.3 υπάρχουν συναρτήσεις $\varphi,\psi:\Omega\to C$ συνεχείς στο α ώστε , $f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a)$ και $g(z)-g(a)=\psi(z)(z-a)$, $z\in\Omega$, $f'(a)=\varphi(a)$ και $g'(a)=\psi(a)$.

Έπεται ότι , $f(z)\cdot g(z)-f(a)\cdot g(a)=\varphi(z)(z-a)g(a)+\varphi(z)\psi(z)(z-a)^2+$ $f(a)\cdot\psi(z)(z-a)=\left[\varphi(z)g(a)+(z-a)\varphi(z)\psi(z)+f(a)\psi(z)\right](z-a)$

Θέτουμε , $\Phi(z)=\varphi(z)g(a)+(z-a)\varphi(z)\psi(z)+f(a)\psi(z)$ και παρατηρούμε ότι η Φ είναι συνεχής στο α .

Έπεται από την πρόταση 2.3 ότι η $f\cdot g$ έχει μιγαδική παράγωγο στο α και

$$(fg)'(a)=\Phi(a)=\varphi(a)\cdot g(a)+f(a)\psi(a)=$$

$$=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

Για την απόδειξη του τύπου για το πηλίκο δύο συναρτήσεων θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την παρατήρηση Καραθεοδωρή (ακριβέστερα το αντίστροφό της).

Έτσι έχουμε $\qquad f(z)=f(a)+\varphi(z)(z-a)$ και

$$g(z)=g(a)+\psi(z)(z-a) \text{ για } z\in\Omega$$

Από όπου έπεται (ενθυμούμενοι ότι g συνεχής στο α , $g(a)\neq 0$ και άρα υπάρχει $r>0$ ώστε $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $g(z)\neq 0$ για κάθε $z\in\Delta(a,r)$) ότι

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(a)+\varphi(z)(z-a)}{g(a)+\psi(z)(z-a)}\Rightarrow\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(a)+\varphi(z)(z-a)}{g(a)+\psi(z)(z-a)}-\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=$$

$$=\frac{g(a)f(a)+g(a)\varphi(z)(z-a)-f(a)g(a)-f(a)\psi(z)(z-a)}{(g(a))^2+g(a)\psi(z)(z-a)}=$$

$\left[\dfrac{g(a)\varphi(z)-f(a)\psi(z)}{(g(a))^2+g(a)\psi(z)(z-a)}\right](z-a)$, για $z\in\Delta(a,r)$.

Θέτομε $F(z)=\dfrac{g(a)\varphi(z)-f(a)\psi(z)}{(g(a))^2+g(a)\psi(z)(z-a)},\ z\in\Delta(a,r)$

Και παρατηρούμε ότι η F συνεχής στο α. Από την πρόταση 2.3 έπεται αμέσως ότι η $\dfrac{f}{g}$ έχει μιγαδική παράγωγο στο α και ισχύει $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(\alpha)=F(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Τελικά έχουμε τον ζητούμενο τύπο για την μιγαδική παράγωγο του πηλίκου $\dfrac{f}{g}$.

<u>Παραδείγματα 2.6</u>

1) Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $P(z)=c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+...+c_1z+c_0, c_k\in C$ είναι , όπως προκύπτει από την πρόταση 2.5 (1) και το παράδειγμα 2.2 (2) ολόμορφη συνάρτηση στο C και

$$P'(z)=nc_nz^{n-1}+(n-1)c_{n-1}z^{n-2}+...+2c_2z+c_1,\ z\in C$$

2) Από την πρόταση 2.5 (2) και το προηγούμενο παράδειγμα έπεται αμέσως ότι κάθε ρητή μιγαδική συνάρτηση δηλαδή της μορφής $f=\dfrac{p}{q}$, όπου p και q μιγαδικά πολυώνυμα με $q\neq 0$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της , το οποίο είναι το (ανοικτό) υποσύνολο $\Omega=C\setminus Z(q)$ του C , όπου $Z(q)$ το σύνολο των ριζών του q. (Εδώ υποθέτουμε ότι οι p και q δεν έχουν κοινές ρίζες.)

Ειδικότερα έχουμε για την συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{z},\ z\neq 0$ ότι $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2},\ z\neq 0$ και με επαγωγή ότι

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{n!}{z^{n+1}},\ n\geq 0,\quad z\neq 0.$$

Επίσης για την συνάρτηση $g(z)=\dfrac{1}{z-a},\ z\neq a$ έχουμε ότι

$$g^{(n)}(z)=(-1)^n\frac{n!}{(z-a)^{n+1}},\ n\ge 0,\ z\neq a$$

Παρατηρούμε ότι η μιγαδική παράγωγος πολυωνύμου ή ρητής συνάρτησης είναι πολυώνυμο ή ρητή συνάρτηση.

Ακολουθεί ο κανόνας αλυσίδας για την μιγαδική παράγωγο σύνθετης συνάρτησης , ο οποίος είναι όμοιος με τον αντίστοιχο κανόνα για συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

<u>Θεώρημα 2.7</u> (Κανόνας της αλυσίδας)

Έστω $\Omega, G\subseteq C$ ανοικτά σύνολα , $f:\Omega\to G,\ g:G\to C$ συναρτήσεις και $\alpha\in\Omega$. Αν η f έχει παράγωγο στο α και η g στο $f(a)$, τότε η $gof:\Omega\to C$ έχει μιγαδική παράγωγο στο α και ισχύει

$$(gof)'(a)=g'(f(a))\cdot f'(a)$$

Απόδειξη. Από την παρατήρηση Καραθεοδωρή υπάρχουν συναρτήσεις

$\varphi:\Omega\to C$ συνεχής στο α και

$\psi:G\to C$ συνεχής στο $f(a)$ ώστε ,

$$f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a),\ z\in\Omega \quad \text{και} \quad \varphi(a)=f'(a)$$

$$g(\omega)-g(f(a))=\psi(\omega)(\omega-f(a)),\ \omega\in G \quad \text{και} \quad \psi(f(a))=g'(f(a))$$

Συνδυάζοντας τις δύο ισότητες έχουμε για $z\in\Omega$

$$g(f(z))-g(f(a))=\psi(f(z))(f(z)-f(a))=$$

$$=\psi(f(z))(\varphi(z)(z-a))=\psi(f(z))\varphi(z)(z-a),\ z\in\Omega.$$

Έπεται ότι ,

$$(gof)(z)-(gof)(a)=(\psi of)(z)\varphi(z)(z-a),\ z\in\Omega.$$

Επειδή η $\psi of\cdot\varphi$ είναι συνεχής στο α έπεται από το αντίστροφο της παρατήρησης Καραθεοδωρή ότι η gof έχει μιγαδική παράγωγο στο α και μάλιστα

$$(gof)'(a)=(\psi of)(a)\cdot\varphi(a)=\psi(f(a))\cdot\varphi(\alpha)=g'(f(a))\cdot f'(a).$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση 2.8</u>

1) Έστω $I\subseteq R$ διάστημα , $\alpha\in I$ και $f:I\to C$ μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής .

Η f λέγεται ότι είναι διαφορίσιμη στο α αν το όριο $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ υπάρχει στο C.

Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(\alpha)$ και ονομάζεται η παράγωγος της f στο α.

Αν γράψουμε $f=\mathrm{Re}\, f+i\,\mathrm{Im}\, f$, τότε βέβαια η f έχει παράγωγο ίση με $f'(a)$ στο α αν και μόνο αν οι (πραγματικές) συναρτήσεις (πραγματικής μεταβλητής) $\mathrm{Re}\, f$ και $\mathrm{Im}\, f$ έχουν παράγωγο στο α και τότε $f'(a)=(\mathrm{Re}\, f)'(a)+i(\mathrm{Im})'(a)$ (πρβλ. την πρόταση 1.33).

Εννοείται ότι αν το α είναι άκρο του διαστήματος I, τότε το παραπάνω όριο εκφράζει την έννοια της αντίστοιχης πλευρικής παραγώγου της f στο α.

2) Σημειώνουμε ότι η Παρατήρηση Καραθεοδωρή ισχύει με την ίδια ακριβώς απόδειξη και για συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής $f: I\subseteq R\to C$. Επίσης ο κανόνας αλυσίδας

(με τις κατάλληλες υποθέσεις) αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) Όταν η f είναι μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής και η g μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής δηλαδή $f: I\subseteq R\to G\subseteq C$ και $g: G\to C$ και

(β) όταν η f είναι πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής και η g μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή $f: I\subseteq R\to J\subseteq R$ και $g: J\to C$, όπου I και J διαστήματα του R.

Θεώρημα 2.9

Έστω $\Omega\subseteq C$ τόπος και $f:\Omega\to C$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f'(z)=0$ για κάθε $z\in\Omega$. Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για δύο τυχόντα διαφορετικά σημεία α και b του Ω ισχύει ότι $f(a)=f(b)$.

Εφόσον Ω τόπος υπάρχει πολυγωνική γραμμή $P=[z_1,z_2]\cup[z_2,z_3]\cup\ldots\cup[z_{n-1},z_n]$ όπου $z_1=a$ και $z_n=b$, ώστε $P\subseteq\Omega$. Θέτουμε για $\kappa=1,2,\ldots,n-1$

$$\varphi_\kappa(t)=(1-t)z_\kappa+t\cdot z_{\kappa+1},\quad t\in[0,1]$$

και
$$\gamma_\kappa(t)=(fo\varphi_\kappa)(t)=f\left((1-t)z_\kappa+t\cdot z_{\kappa+1}\right),\ t\in[0,1].$$

Παρατηρούμε ότι η φ_κ είναι διαφορίσιμη στο $[0,1]$ και μάλιστα ισχύει, $\varphi_k'(t)=z_{\kappa+1}-z_\kappa$, $t\in[0,1]$. Έτσι από την παρατήρηση 2.8 (2), την υπόθεσή μας ότι $f'(z)=0$ για $z\in\Omega$ και τον κανόνα της αλυσίδας συμπεραίνουμε ότι ,

$$\gamma_\kappa'(t)=f'(\varphi_\kappa(t))\cdot\varphi_\kappa'(t)=0\cdot\varphi_\kappa'(t)=0\quad \text{για}\quad t\in[0,1].$$

Εφόσον το I είναι διάστημα και η γ_κ συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής έπεται ότι η γ_κ είναι σταθερή συνάρτηση , άρα $\gamma_\kappa(0)=\gamma_\kappa(1)$ ή $f(z_\kappa)=f(z_{\kappa+1})$.

Τελικά έχουμε ότι , $f(z_1)=f(z_2)=....=f(z_{n-1})=f(z_n)$ και άρα $f(\alpha)=f(b)$. Δηλαδή την ζητούμενη ισότητα.

Πόρισμα 2.10

Έστω $\Omega \subseteq C$ τόπος και $f:\Omega \to C$ ολόμορφη συνάρτηση . Υποθέτουμε ότι:

Είτε (α) η f είναι πραγματική συνάρτηση , δηλαδή $f(\Omega)\subseteq R$

Είτε (β) η f παίρνει μόνο φανταστικές τιμές , δηλαδή $f(\Omega)\subseteq i\cdot R$.

Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $f=u+iv$, όπου $u=\operatorname{Re} f$ και $v=\operatorname{Im} f$. Από το προηγούμενο θεώρημα . αρκεί σε κάθε περίπτωση να αποδείξουμε ότι $f'(z)=0$ για κάθε $z\in\Omega$.

(α) Έστω ότι $f(\Omega)\subseteq R$, τότε $v=0$ επί του Ω.

Έστω $a=x_0+iy_0\in\Omega$. Είναι σαφές ότι η τιμή $f'(a)$ της μιγαδικής παραγώγου μπορεί να υπολογιστεί πλησιάζοντας είτε παράλληλα προς τον πραγματικό ή τον φανταστικό άξονα .

Για $z=x+iy_0\in\Omega$ (παράλληλα προς τον πραγματικό άξονα) έχουμε

$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{u(z)-u(a)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{u(z)-u(a)}{x-x_0}\in R.$$

Για $z=x_0+iy$ (παράλληλα προς τον φανταστικό άξονα) έχουμε

$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{u(z)-u(a)}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)}=$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{u(z)-u(a)}{i(y-y_0)}=-i\lim_{z\to a}\frac{u(z)-u(a)}{y-y_0}\in iR.$$

Έπεται ότι $f'(a)$=0, αφού είναι πραγματικός και συγχρόνως φανταστικός αριθμός. Επειδή το α ήταν τυχόν στοιχείο του Ω, έχουμε ότι $f'(z)=0$ για κάθε $z\in\Omega$.

(β) Παρατηρούμε ότι $u=0$ επί του Ω και η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για τον ορισμό και την απόδειξη της ολομορφίας του μιγαδικού λογαρίθμου.

Θεώρημα 2.11

Έστω $\Omega, G \subseteq C$ ανοικτά σύνολα, $f:\Omega \to G$ συνεχής και $g:G \to C$ ολόμορφη συνάρτηση . Υποθέτουμε ότι $g'(\omega) \neq 0$ για κάθε $\omega \in f(\Omega)$ και ότι $g(f(z)) = z$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε η f είναι ολόμορφη και ισχύει

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}, \quad z \in \Omega$$

Απόδειξη. Έστω α τυχόν στοιχείο του Ω. Επειδή η g έχει παράγωγο στο $f(\alpha)$, από την παρατήρηση Καραθεοδωρή υπάρχει συνάρτηση $\varphi: G \to C$ συνεχής στο $f(\alpha)$ ώστε

$$g(\omega) - g(f(a)) = \varphi(\omega)(\omega - f(a)), \ \omega \in G \ \text{ και } \ \varphi(f(a)) = g'(f(a)) \quad (1)$$

Έπεται από την (1) ότι για $z \in \Omega$ και $\omega = f(z)$ θα έχουμε

$$z - a = g(f(z)) - g(f(a)) = \varphi(f(z))(f(z) - f(a)) \quad (2)$$

Επειδή η $\varphi o f$ είναι συνεχής στο α και

$$(\varphi o f)(\alpha) = \varphi(f(a)) = g'(f(a)) \neq 0,$$

έπεται ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και για $z \in \Delta(a,r)$ να ισχύει $\varphi(f(z)) \neq 0$.

Έτσι από την (2) έχουμε ότι

$$f(z) - f(a) = \frac{1}{\varphi(f(z))} \cdot (z - a), \quad z \in \Delta(a,r)$$

Από το αντίστροφο της Παρατήρησης Καραθεοδωρή έπεται αμέσως ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α και ισχύει

$$f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 2.12

(1) Ισχύουν οι ακόλουθες σημαντικές συνέπειες του θεωρήματος του Cauchy το οποίο θα αποδείξουμε αργότερα. Αν η f είναι ολόμορφη και μη σταθερή σε ένα τόπο Ω τότε το $f(\Omega)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του C (θεώρημα ανοικτής απεικόνισης) και ακόμη ότι , αν η f είναι ολόμορφη και $1-1$ τότε $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ και η αντίστροφή της είναι επίσης ολόμορφη . (πρβλ τα θεωρήματα 7.8.4, 7.8.5 και 7.8.6 του [M-X].)

(2) Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι στο θεώρημα 2.11 η υπόθεση $g\left(f\left(z\right)\right)=z$ για κάθε $z\in\Omega$, έχει ως συνέπεια ότι η f είναι $1-1$ στο Ω και η g στο $f\left(\Omega\right)$. Έτσι από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται ότι η υπόθεση ότι η $g'\left(\omega\right)\neq 0$, για $\omega\in G$ και η συνέχεια της f -- η οποία στην παρούσα φάση ήταν απαραίτητη—μπορεί (εκ των υστέρων) να παραληφθεί .

2.2 Οι εξισώσεις Cauchy – Riemann

Στην παράγραφο αυτή διερευνούμε την σχέση μεταξύ μιγαδικής παραγώγισης μιας συνάρτησης $f:\Omega\subseteq C\to C$ και της διαφορισιμότητας της f υπό την έννοια των πραγματικών μεταβλητών. Ο προβληματισμός αυτός είναι εύλογος εφόσον η f - εκτός από συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής $z=x+iy$ -- είναι και συνάρτηση των δύο πραγματικών μεταβλητών (x,y).

Υπενθυμίζουμε πρώτα τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης $f:\Omega\subseteq R^n\to R^m$ στην ειδική περίπτωση η οποία ενδιαφέρει εδώ , όταν $n=2$ και $1\le m\le 2$.

Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\alpha\in\Omega$ αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T:R^2\to R^m$ ώστε

$$\lim_{z\to a}\frac{\left|f(z)-f(a)-T(z-a)\right|}{|z-a|}=0.$$

Η γραμμική απεικόνιση T (αν υπάρχει) είναι μοναδική. Ονομάζεται το διαφορικό της f στο α και συμβολίζεται με $Df(a)$.

Έστω $\Omega\subseteq C$ ανοικτό $\alpha\in\Omega$ και $f:\Omega\to C$ συνάρτηση ώστε $f=u+iv$, όπου (ως συνήθως) $u=\operatorname{Re}f$ και $v=\operatorname{Im}f$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(α) Η f είναι διαφορίσιμη στο $\alpha \Leftrightarrow$ οι u και v είναι διαφορίσιμες στο α.

Τότε έχουμε ότι

$$Df(a)=\left(Du(a),Dv(a)\right).$$

(β) Αν η f είναι διαφορίσιμη στο α, τότε οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν στο α και ο πίνακας των μερικών παραγώγων

$$J_{f(a)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(a)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(a)\end{pmatrix}$$

ονομάζεται ο <u>πίνακας Jacobi</u> της f στο α.

Ο πίνακας αυτός συνδέεται με το διαφορικό της f ως εξής

$$Df(a)(h)=J_{f(a)}\cdot h,\qquad h=(h_1,h_2)\in R^2$$

Όπου το γινόμενο δεξιά σημαίνει τον πολλαπλασιασμό του πίνακα $J_{f(a)}$ με το διάνυσμα στήλη $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$.

<u>Λήμμα 2.13</u> . Ένας πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, όπου $a,b,c,d \in R$, αναπαριστά με τον πολλαπλασιασμό πινάκων

$$R^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2,$$

Πολλαπλασιασμό με ένα (σταθερό) μιγαδικό έστω $A+iB$

$$C \ni z \mapsto (A+iB)(x+iy) \in C,$$

Αν και μόνο αν $\alpha = d$ και $b = -c$.

Ο ζητούμενος μιγαδικός είναι τότε ο $A+iB = a+ic = d-ib$

Απόδειξη. $'' \Rightarrow ''$ Έστω ότι υπάρχει μιγαδικός $A+iB$ ώστε να ισχύει

$$\begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A+iB)(x+iy) \quad \text{για κάθε } x+iy \in C. \qquad (1)$$

Κάνοντας πράξεις (αριστερά της (1) πολλαπλασιασμός πινάκων και δεξιά μιγαδικό πολλαπλασιασμό) βρίσκουμε τις εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} ax+by &= Ax-By \\ cx+dy &= Bx+Ay \end{aligned}\right\} \quad \text{για κάθε } x,y \in R. \qquad (2)$$

Θέτοντας $x=1$ και $y=0$ και κατόπιν $x=0$ και $y=1$ λαμβάνουμε από την (2) ότι

($\alpha = A$ και $c = B$) και ($b=-B$, $d = A$).

Άρα $\alpha = d$ και $B = c = -b$ και έτσι $A+iB = a+ic = d-ib$.

$'' \Leftarrow ''$ Υποθέτουμε ότι $\alpha = d$ και $b=-c$. Αν θεωρήσουμε για $A+iB = a+ic$ τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό

$$z = x+iy \mapsto (a+ic)(x+iy)$$

τότε εύκολα διαπιστώνουμε κάνοντας πράξεις ότι

$$\begin{pmatrix} \alpha & -c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a+ic)(x+iy) \quad \text{για κάθε } (x,y) \in R^2$$

Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση 2.14</u>

Ουσιαστικά το προηγούμενο λήμμα μας λέει ότι μια $R-$ γραμμική συνάρτηση $F:R^2 \to R^2$ (δηλαδή γραμμική όταν ο R^2 θεωρείται ως διανυσματικός χώρος επί του R, οπόταν $\dim_R R^2 = 2$) είναι $C-$γραμμική (δηλαδή ικανοποιεί την ισχυρότερη ιδιότητα ότι είναι γραμμική όταν ο $C = R^2$ θεωρείται ως διανυσματικός χώρος επί του C, οπόταν $\dim_C C = 1$) αν και μόνο αν η F είναι της μορφής

$$F(z) = a \cdot z \ , \ z \in C, \text{ για κάποιο } a \in C .$$

Τυπικό παράδειγμα $R-$ γραμμικής συνάρτησης $F:R^2 \to R^2$ η οποία δεν είναι $C-$γραμμική είναι η $F(x,y) = (x,-y)$, δηλαδή η $F(z) = \bar{z}$, $z \in C$.

Πράγματι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην F είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα διευκρινίζει πλήρως την σχέση μιγαδικής παραγώγισης και διαφορισιμότητας υπό την πραγματική έννοια.

<u>Θεώρημα 2.15</u> (Εξισώσεις Cauchy – Riemann).

Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό, $\alpha \in \Omega$ και $f:\Omega \to C$ συνάρτηση, $f = u + iv$. Τότε οι επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α .

(β) Η f έχει διαφορικό στο α (ισοδύναμα οι u και v έχουν διαφορικό στο α) και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy –Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \ \text{ και } \ \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Τότε ισχύει , $f'(a) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(a) \quad \left(= \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \right)$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) \quad \left(= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν η $f'(a)$ υπάρχει τότε οι μερικές παράγωγοι των u και v στο a υπάρχουν και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy και Riemann.

Έστω ότι $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) .$$

Θα πλησιάσουμε το α πρώτα κινούμενοι παράλληλα προς τον πραγματικό και κατόπιν προς άξονα των φανταστικών αριθμών (πρβλ. την απόδειξη του πορίσματος 2.10).

Έτσι έχουμε $$f'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in R}}\frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)+i\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

και $$f'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in R}}\frac{1}{i}\frac{\big(u(a+ih)-u(a)\big)+i\big(v(a+ih)-v(a)\big)}{h}=$$

$$=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a)+i\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Έπεται προφανώς ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a)=-\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Επίσης η μέθοδος απόδειξης μας δίνει και την τιμή της μιγαδικής παραγώγου ως έκφραση (γραμμικό συνδυασμό) των μερικών παραγώγων των u και v.

$$f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a).$$

Αποδεικνύουμε τώρα την ισοδυναμία των ισχυρισμών του θεωρήματος.

" $\Rightarrow$" Όπως είναι γνωστό η ύπαρξη της $f'(a)$ ισοδυναμεί (χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon-\delta$ ορισμό του ορίου) με τον επόμενο ισχυρισμό:

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$: $z\in\Omega$ και $0<|z-a|<\delta \Rightarrow$

$$\frac{|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)|}{|z-a|}<\varepsilon \ . \qquad (1)$$

Από τον ορισμό του διαφορικού συνάρτησης $f:\Omega\subseteq R^2\to R^2$ έπεται αμέσως ότι η f είναι διαφορίσιμη στο α και ότι το διαφορικό της στο α είναι η $C-$ γραμμική συνάρτηση

$$Df(a)(z)=f'(a)\cdot z\,,\ z\in C \ .$$

Το γεγονός ότι ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy - Riemann καθώς και η έκφραση της $f'(a)$, διασφαλίζεται από το πρώτο μέρος της απόδειξης .

" $\Leftarrow$" Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a και ότι οι μερικές παράγωγοι των u και v (οι οποίες αναγκαία τότε υπάρχουν) ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy—Riemann στο a .

Η ύπαρξη του διαφορικού της f στο α σημαίνει (με χρήση του $\varepsilon-\delta$ ορισμού του ορίου) ότι

Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$: $z\in\Omega$ και $0<|z-a|<\delta \Rightarrow$

$$\frac{|f(z)-f(a)-Df(a)(z-a)|}{|z-a|}<\varepsilon . \qquad (2)$$

Ως γνωστόν για το διαφορικό $Df(a)$ της f στο α ισχύει ότι

$$Df(a)(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=J_{f(a)}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x,y)\in R^2 .$$

Επειδή ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy – Riemann στο α, έπεται από το λήμμα 2.13 ότι ο πίνακας Jacobi $J_{f(a)}$ αναπαριστά πολλαπλασιασμό με τον μιγαδικό αριθμό $A+iB=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$, δηλαδή

$$Df(a)(x,y)=J_{f(a)}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\cdot(x+iy), \; z=x+iy\in C . \qquad (3)$$

Έπεται αμέσως από τις (2) και (3) ότι ικανοποιείται η (1), δηλαδή ότι υπάρχει η $f'(a)$

και
$$f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a) .$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Πόρισμα 2.16</u>

Έστω $\Omega\subseteq C$ ανοικτό, $f:\Omega\to C$ συνάρτηση, $f=u+iv$ και $\alpha\in\Omega$. Υποθέτουμε ότι :

(α) Οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν σε μια περιοχή U του α και είναι συνεχείς στο α.

(β) Η f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy – Riemann στο α.

Τότε η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α.

Έπεται προφανώς ότι αν οι u και v είναι της κλάσης C^1 στο Ω και οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του Ω, τότε η f είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω.

Απόδειξη. Από την πρώτη υπόθεση έπεται ότι η f έχει διαφορικό στο α (γνωστό από τα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ). Επειδή η f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy – Riemann στο α, το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο θεώρημα.

<u>Σημείωση</u>

Έστω $f:\Omega\subseteq R^2\to R^2$, $f=(u,v)$ συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό σύνολο Ω.

Υπενθυμίζουμε ότι η f λέγεται ότι είναι της κλάσης C^1 (ή συνεχώς διαφορίσιμη) αν οι μερικές παράγωγοι των u και v υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν αυτές με τη σειρά τους είναι C^1 τότε λέμε ότι η f είναι της κλάσης C^2. Με επαγωγή μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις της κλάσης C^n, για κάθε $n\geq 1$. Η f λέγεται ότι είναι της κλάσης C^∞ αν οι u και v έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης.

Για παράδειγμα η $f(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$, $(x,y)\in\Omega$ είναι της κλάσης C^2, αν οι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο Ω. Αυτό σημαίνει ότι , οι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \quad \text{καθώς και οι} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

υπάρχουν στο Ω και επί πλέον είναι συνεχείς συναρτήσεις .

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε ισότητα των μεικτών παραγώγων , δηλαδή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

<u>Παραδείγματα 2. 17</u>

1) Μία συνάρτηση ενδέχεται να ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy—Riemann σε ένα σημείο χωρίς να έχει παράγωγο σε αυτό το σημείο.

Έστω $f:C\to C$ με

$$f(z)=\begin{cases}1, & \alpha\nu \quad z=x+iy,\ \ x\neq 0,\ \ \kappa\alpha\iota \quad y\neq 0\\ 0, & \alpha\nu \quad \varepsilon\acute{\iota}\tau\varepsilon \quad x=0 \quad \acute{\eta} \quad y=0\end{cases}$$

Δηλαδή $f=X_V$, είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του ανοικτού συνόλου

$$V=\left\{z\in C:\operatorname{Re}z\neq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \operatorname{Im}z\neq 0\right\}.$$

Γράφουμε $f=u+iv$ και παρατηρούμε ότι $u=f$ και $v=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0$$

και
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \text{στο } C .$$

Άρα οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ισχύουν στο $(0,0)$ (και σε κάθε σημείο των αξόνων).

Εν τούτοις η f δεν έχει μιγαδική παράγωγο στο $(0,0)$ (και στα σημεία των αξόνων) εφόσον δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ (και στα σημεία των αξόνων).

Ως άσκηση αφήνεται ο έλεγχος των εντός παρενθέσεων ισχυρισμών.

2) Η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$, $z\in C$ αν και R - γραμμική δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy—Riemann σε κάθε σημείο του C.

Πράγματι ,
$$f(x,y)=(x,-y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad (x,y)\in R^2 ,$$

και
$$u(x,y)=x \ , \ v(x,y)=-y$$

και
$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \ , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1 .$$

Παρατηρούμε ότι η f δεν είναι $C-$γραμμική συνάρτηση . (Πρβλ. το παράδειγμα 2.2 (3) , το λήμμα 2.13 και την παρατήρηση 2.14.)

3) Το θεώρημα 2.15 επιτρέπει να αποδείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $x\in \mathrm{R}\mapsto \mathrm{e}^x\in(0,+\infty)$ έχει <u>ολόμορφη επέκταση στο C</u> η οποία κληρονομεί τις βασικές ιδιότητές της.

Έτσι ορίζουμε,

$$f : C\to C : f(x+iy)=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y),$$

για $z=x+iy\in C$.

Η f έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) Η f είναι ολόμορφη στο C και $f'(z)=f(z)$, $z\in C$

(β) $\quad f(z+\omega)=f(z)\cdot f(\omega), \quad z,\omega\in C$

(γ) $\quad f(z)\neq 0$ για κάθε $z\in C$

(δ) Η f δεν είναι ρητή συνάρτηση.

Πράγματι , παρατηρούμε ότι $u(x,y)=e^x\cdot\cos y$ και $v(x,y)=e^x\cdot\sin y$ και βέβαια οι συναρτήσεις u και v είναι C^∞ διαφορίσιμες στο R^2 . Τότε έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cdot\cos y=u(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cdot\sin y=-v(x,y)$$

και
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cdot\sin y=v(x,y), \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cdot\cos y=u(x,y)$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει αμέσως η ισχύς των εξισώσεων Cauchy – Riemann και ακόμη ότι

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)=u(z)+iv(z)=f(z),\ \ z\in C.$$

Έστω $z,\omega\in C$ με $z=a+ib$ και $\omega=c+id$. Τότε,

$$f(z+\omega)=e^{a+c}\cdot e^{i(b+d)}=\left(e^a\cdot e^{ib}\right)\cdot\left(e^c\cdot e^{id}\right)=f(a+ib)\cdot f(c+id)=f(z)\cdot f(\omega).$$

Αν $z=x+iy\in C$ τότε $f(z)=e^x\cdot e^{iy}$, άρα $\left|f(z)\right|=e^x>0$.

Τέλος αποδεικνύουμε ότι η f δεν είναι ρητή συνάρτηση.

Αν $g=\dfrac{p}{q}$ ήταν ρητή συνάρτηση , δηλαδή πηλίκο μιγαδικών πολυωνύμων , τότε μπορούμε να αποδείξουμε (όπως και στην περίπτωση του πηλίκου πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής με συντελεστές πραγματικούς) ότι το όριο $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{p(z)}{q(z)}$ υπάρχει στο $\tilde{C}=C\cup\{\infty\}$ (Πρβλ. την άσκηση 12 του Κεφαλαίου Ι).

Όμως για την συνάρτηση f που ορίσαμε παραπάνω το όριο $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ δεν υπάρχει .

Πράγματι , αν $z_n=2\pi in$, $n\in N$ τότε $z_n\to\infty$ (αφού $\left|z_n\right|=2\pi n\to+\infty$) και

$$f(z_n)=e^{2\pi in}=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n=1,\quad n\geq 1.$$

Αν όμως $\omega_n=2\pi in+i\pi$, $n\geq 1$ τότε $\omega_n\to\infty$ και

$$f(\omega_n)=e^{2\pi in+i\pi}=e^{i\pi}\cdot e^{2\pi in}=e^{i\pi}=-1,\quad n\geq 1.$$

Έτσι αποδείξαμε τις ιδιότητες (α)—(δ) της f . Η συνάρτηση f ονομάζεται <u>εκθετική</u> συνάρτηση και συμβολίζεται με e^z , δηλαδή θέτουμε

$$f(z)=e^z,\ \ z\in C.$$

Το παράδειγμα της εκθετικής συνάρτησης είναι πολύ σημαντικό και περαιτέρω ιδιότητες του (καθώς και ο ορισμός και οι ιδιότητες των κλάδων του μιγαδικού λογαρίθμου οι οποίοι ορίζονται ως αντίστροφες συναρτήσεις της εκθετικής σε κατάλληλους τόπους του C) θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο των δυναμοσειρών.

Ορισμός 2.18

Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό . Μία συνάρτηση $u : R^2 \to R$ ονομάζεται αρμονική , αν είναι της κλάσης C^2 (υπάρχουν οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της u στο Ω και είναι συνεχείς συναρτήσεις) και ισχύει η εξίσωση του Laplace, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{στο} \quad \Omega .$$

Παρατήρηση 2.19

Έστω $f : \Omega \subseteq C \to C$ ολόμορφη συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο Ω. Αποδεικνύεται τότε ως συνέπεια του θεωρήματος Cauchy που θα αποδείξουμε αργότερα ότι και η $f\,'$ είναι ολόμορφη στο Ω. Επομένως η $f\,'$ έχει μιγαδικές παραγώγους κάθε τάξης, δηλαδή οι $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$ υπάρχουν και είναι (άρα) συνεχείς στο Ω. Από το αποτέλεσμα αυτό έπεται οι συναρτήσεις $u = \operatorname{Re} f$ και $v = \operatorname{Im} f$ είναι C^∞ διαφορίσιμες (με την πραγματική έννοια) στο Ω.

Πράγματι

$$f\,'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z)\right) \qquad (1)$$

από όπου έπεται ότι u και v είναι C^1 συναρτήσεις .

Επειδή η f'' είναι συνεχής και βέβαια ισχύει

$$f''(z) = \frac{\partial f'}{\partial x}(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial f'}{\partial y}(z), \qquad (2)$$

αν αντικαταστήσουμε στην (2) τις εκφράσεις της $f\,'$ από την (1) συμπεραίνουμε ότι οι u και v είναι της κλάσης C^2. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και χρησιμοποιώντας επαγωγή έχουμε το συμπέρασμα.

Θεώρημα 2.20

Αν η συνάρτηση $f : \Omega \to C$, $f = u + iv$, είναι ολόμορφη στο ανοικτό $\Omega \subseteq C$ τότε οι u και v είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Cauchy – Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι (από την παρατήρηση 2.19) οι u και v είναι της κλάσης C^2.

Διαφορίζουμε την πρώτη ως προς x και την δεύτερη ως προς y και παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \ . \qquad (1)$$

Επειδή οι u και v είναι της κλάσης C^2, οι μικτές παράγωγοι είναι ίσες , δηλαδή ισχύει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \ . \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) με την βοήθεια της (2) λαμβάνουμε την εξίσωση Laplace για την u.

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η v είναι αρμονική συνάρτηση.

<u>Παραδείγματα 2.21</u>

(1) Η συνάρτηση $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ καθώς και η $v(x,y) = 3x^2 y - y^3$ είναι αρμονικές στο $C = R^2$. Πράγματι αν $z = x + iy$ τότε

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2 y - y^3\right)$$

Επίσης οι συναρτήσεις $e^x \cos y$ και $e^x \sin y$ είναι αρμονικές στο R^2, αφού είναι το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της εκθετικής συνάρτησης.

(2) Αν η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη στο ανοικτό Ω τότε:

(α) Οι $u^2 - v^2$, uv, $u^3 - 3uv^2$ και $3u^2 v - v^3$ είναι αρμονικές στο Ω, αφού οι $f^2 = (u+iv)^2$ και $f^3 = (u+iv)^3$ είναι ολόμορφες στο Ω.

Αν επί πλέον $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ τότε οι $\dfrac{u}{u^2+v^2}$ και $\dfrac{v}{u^2+v^2}$ είναι αρμονικές στο Ω . (Ιδιαίτερα οι συναρτήσεις $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ και $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ είναι αρμονικές στο $C \setminus \{0\}$). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\dfrac{1}{f} = \dfrac{\overline{f}}{|z|^2} = \dfrac{u - iv}{u^2+v^2}$ και βέβαια η $\dfrac{1}{f}$ είναι ολόμορφη στο Ω.

(β) Οι $e^u \cos v$ και $e^u \sin v$ είναι αρμονικές στο Ω αφού η $e^f = e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$ είναι ολόμορφη στο Ω.

(3) Το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος κάθε μιγαδικού πολυωνύμου (ιδιαίτερα των μονωνύμων z^n, $n \geq 1$) είναι αρμονικές συναρτήσεις στο $C = R^2$. Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει φυσικά και για τις ρητές συναρτήσεις.

<u>Ορισμός 2.22</u>

Δύο (αρμονικές) συναρτήσεις u, v ορισμένες στο ανοικτό υποσύνολο Ω του R^2 ονομάζονται <u>αρμονικές συζυγείς</u> αν η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω.

Η v τότε λέγεται ότι είναι η <u>αρμονική συζυγής</u> της u.

Παρατηρούμε ότι όλα τα παραδείγματα που παρατέθηκαν στο παράδειγμα 2.21 μας προμηθεύουν ζεύγη αρμονικών συζυγών συναρτήσεων. Π.χ. οι $e^x \cos y$ και $e^x \sin y$ αλλά και οι $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ και $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ συνιστούν ζεύγη αρμονικών συζυγών συναρτήσεων.

Ακόμη παρατηρούμε ότι αν οι u και v είναι αρμονικές συζυγείς τότε και οι $-v$ και u είναι αρμονικές συζυγείς (η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη συνεπώς και η $if = -v + iu$ είναι ολόμορφη). Όμως οι v και u δεν είναι αναγκαία αρμονικές συζυγείς. (Γιατί;).

<u>Παρατήρηση 2.23</u>

Έστω $\Omega \subseteq C$ τόπος και $u : \Omega \to R$ αρμονική συνάρτηση . Τότε η αρμονική συζυγής της u (αν υπάρχει) είναι μοναδική ως προς μία πραγματική προσθετική σταθερά . Πράγματι αν οι συναρτήσεις v και v_1 είναι και οι δύο αρμονικές συζυγείς της u τότε οι συναρτήσεις $f = u + iv$ και $g = u + iv_1$ είναι ολόμορφες στον τόπο Ω. Έτσι από το θεώρημα 2.15 παίρνουμε

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

και
$$g' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Άρα $f' = g'$ από όπου έπεται (θεώρημα 2.9) ότι υπάρχει σταθερά $c \in C$ ώστε $f - g = c$ στο Ω ή $(u+iv)-(u+iv_1)=c$ ή $i(v-v_1)=c$. Επειδή η $v - v_1$ είναι πραγματική συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι ο c είναι αναγκαία φανταστικός αριθμός, δηλαδή $c = i\kappa$ με $\kappa \in R$, από όπου έπεται ότι $v - v_1 = \kappa$ επί του Ω.

Ουσιαστικά η παρατήρηση μας λέει ότι δύο ολόμορφες συναρτήσεις f, g ορισμένες στον τόπο Ω με το ίδιο πραγματικό (η φανταστικό) μέρος διαφέρουν κατά μία σταθερά.

<u>Παραδείγματα 2.24</u>

(1) Έστω $u(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in R$, πολυώνυμο (πρώτου βαθμού) των πραγματικών μεταβλητών x και y.

Αποδείξτε ότι το u είναι το πραγματικό μέρος κάποιας ολόμορφης συνάρτησης f .

Να υπολογιστεί η f.

Παρατηρούμε ότι η u είναι αρμονική στο R^2.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση στο C με πραγματικό μέρος την u, έστω $f = u + iv$. Από τις εξισώσεις Cauchy - Riemann έχουμε

ότι $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ή $\dfrac{\partial v}{\partial y} = a$ και $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\beta$.

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση βρίσκουμε

$$v(x, y) = \int a dy + c(x) = ay + c(x)$$

Συνδυάζοντας την δεύτερη εξίσωση με την τρίτη βρίσκουμε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = c'(x) = -\beta \Rightarrow c(x) = -\beta x + c,$$

όπου c πραγματική σταθερά. Κατά συνέπεια

$$v(x, y) = \alpha y - \beta x + c.$$

Έτσι η ζητούμενη συνάρτηση f είναι η

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + i(\alpha y - \beta x + c)$$

$$= \alpha x + \beta y + i(\alpha y - \beta x) + \gamma + ic = (\alpha - i\beta)(x + iy) + \gamma + ic$$

$$= Az + \Gamma, \text{ όπου } A = \alpha - i\beta \text{ και } \Gamma = \gamma + ic.$$

Δηλαδή η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει για ένα πολυώνυμο $u(x, y)$ (των πραγματικών μεταβλητών x και y και με πραγματικούς συντελεστές) δευτέρου βαθμού. Πράγματι η συνάρτηση $u(x, y) = x^2 + y^2$ δεν είναι όπως εύκολα ελέγχεται αρμονική στο R^2. Ένα άλλο τέτοιο παράδειγμα είναι και η $u(x, y) = x^2$.

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u(x, y) = 2x(1 - y)$ είναι αρμονική σε κάποιο τόπο $\Omega \subseteq C$ και μετά βρείτε την αρμονική συζυγή της. (πρβλ. την παρατήρηση 2.23).

Η u είναι αρμονική στο R^2. Πράγματι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1 - y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Άρα
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Για να βρούμε την αρμονική συζυγή έστω v της u, επιλύουμε (όπως στο παράδειγμα (1)) το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Cauchy – Riemann ως προς v.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2(1-y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2x .$$

Η τέταρτη εξίσωση μας δίνει με ολοκλήρωση

$$v(x,y)=\int 2xdx+c(y)=x^2+c(y).$$

Επομένως
$$\frac{\partial v}{\partial y}=c'(y)=2(1-y).$$

Άρα
$$c(y)=\int 2(1-y)dy=2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)+c=2y-y^2+c$$

όπου c πραγματική σταθερά. Έπεται ότι η συνάρτηση $v(x,y)=x^2+2y-y^2+c$ είναι αρμονική συζυγής της u.

Η δε ολόμορφη συνάρτηση f με $\operatorname{Re} f=u$ και $\operatorname{Im} f=v$ είναι η

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=iz^2+2z+ic, \qquad z=x+iy.$$

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

3) Μια αρμονική συνάρτηση u ορισμένη σε έναν τόπο Ω του R^2 δεν έχει πάντοτε αρμονική συζυγή (ισοδύναμα η u δεν είναι κατ' ανάγκη το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης ορισμένης στο Ω). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $u(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\Omega=C\setminus\{0\}$. Είναι εύκολος ο έλεγχος ότι η u είναι αρμονική στον Ω:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

και
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot\left(x^2+y^2\right)-x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \quad (x,y)\in\Omega.$$

Ανάλογα υπολογίζουμε
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Επομένως
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

στον τόπο Ω και έτσι η u είναι αρμονική στον Ω.

Όπως θα αποδείξουμε αργότερα (με την βοήθεια του κύριου κλάδου του λογαρίθμου) η u δεν έχει αρμονική συζυγή στον Ω. Όμως η u έχει αρμονική συζυγή π.χ. στον τόπο ,

$$D = C \setminus \left\{ (0,x) : x \in R \quad \kappa\alpha\iota \quad x \leq 0 \right\}.$$

Ας σημειωθεί ότι αν η u είναι αρμονική σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο ή γενικότερα σε ένα αστρόμορφο τόπο (Άσκηση 27 του κεφαλαίου 1) τότε η u έχει αρμονική συζυγή

([Μ-Χ] , 6.9.7 και 6.11).

Ασκήσεις

1) Υπολογίστε την μιγαδική παράγωγο της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{z}, \ z \neq 0$$

με δύο τρόπους :

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου .

(β) Με την βοήθεια (αφού τις αποδείξετε) των εξισώσεων Cauchy – Riemann.

2) Αποδείξτε ότι η $f(z) = |z|$ είναι παντού συνεχής αλλά δεν έχει πουθενά μιγαδική παράγωγο. Επίσης αποδείξτε ότι η $g(z) = |z|^2$ έχει μιγαδική παράγωγο μόνο στο 0.

3) Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις , βρείτε για την f που είναι ορισμένη στον τόπο D τις u και v όπου $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ και u, v, x, y πραγματικές ποσότητες:

(α) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$, $D = C \setminus \{0\}$

(β) $f(z) = |z|$, $D = C$

(γ) $f(z) = \overline{z}$

(δ) $f(z) = z^4$, $D = C$.

Αποδείξτε ότι οι u και v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy – Riemann παντού στις περιπτώσεις (α) και (δ) και πουθενά στις περιπτώσεις (β) και (γ).

4) Αποδείξτε τις εξισώσεις Cauchy – Riemann για τις συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ που είναι ορισμένες στον τόπο D :

(α) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$, $D = R^2$

(β) $u(x,y)=\sin x\cosh y$, $v(x,y)=\cos x\sinh y$, $D=R^2$

(γ) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $D=R^2\setminus\{(0,0)\}$

(δ) $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)$, $v(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, $D=(0,+\infty)\times R$.

Σε κάθε περίπτωση , εξακριβώστε ότι οι u και v είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης .

5) Αν $z=x+iy$, έστω :

(α) $f(z)=\dfrac{(1+i)x^3-(1-i)y^3}{x^2+y^2}$, $z\neq 0$, $f(0)=0$

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ικανοποιούνται εκεί , αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Αντιφάσκει το αποτέλεσμα αυτό με το θεώρημα 2. 15;

(β) $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Αποδείξτε ότι οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ικανοποιούνται στο 0 αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

6) Έστω $f(z)=\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}$ $(z=x+iy\neq 0)$, $f(0)=0$.

Αποδείξτε ότι , $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=0$ καθώς $z\to 0$ κατά μήκος κάθε ευθείας L της μορφής $L=\{(a+ib)t:t\in R\}$. Εν τούτοις η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

(Αποδείξτε τον τελευταίο ισχυρισμό θεωρώντας $z\to 0$ κατά μήκος της καμπύλης $z(t)=t+i\sqrt{t}$, $t>0$.)

7) Έστω $C_\pi=C\setminus\{t\in R:t\leq 0\}$. Ορίζουμε $r:C_\pi\to C$ με τις συνθήκες :

(α) $\left(r(z)\right)^2=z$ και (β) $\operatorname{Re}\left(r(z)\right)>0$.

Αποδείξτε ότι η r είναι συνεχής στο C_π και ακολούθως με τον ορισμό της μιγαδικής παραγώγου ότι $r'(z)=\dfrac{1}{2r(z)}$. $z\in C_\pi$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Παρατηρήστε ότι , $r(z)=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$ (παρατήρηση 1.17.1) . Κατόπιν χρησιμοποιείστε το γεγονός , που θα αποδειχθεί αργότερα , ότι η συνάρτηση $\arg(z)$, $z\in C_{\pi}$, είναι συνεχής.]

8) Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο D . Αν κάποια από τις $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ ή $|f|$ είναι σταθερή , τότε η f είναι σταθερή.

[<u>Υπόδειξη</u>: Έστω $f=u+iv$. Αν η $|f|$ είναι σταθερή τότε $u^2+v^2=c$. Αν $c=0$ τότε $f=0$. Υποθέτοντας ότι $c>0$, διαφορίστε ως προς x και ως προς y την εξίσωση $u^2+v^2=c$.]

9) Έστω ότι η f είναι ολόμορφη στον τόπο D και ότι σε κάθε σημείο z του D είτε $f(z)=0$ ή $f'(z)=0$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή .

[<u>Υπόδειξη</u>: Διαφορίστε την f^2 .]

10) Έστω $f:C\to C$ ολόμορφη συνάρτηση της μορφής $f(z)=u(x)+iv(y)$, $z=x+iy\in C$. Αποδείξτε ότι η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

11) Σε ποια υποσύνολα του C είναι αρμονικές οι συναρτήσεις

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\left(\frac{(x+iy)^2-1}{(x+iy)^3+1}\right),\qquad u(x,y)=\operatorname{Im}\left(\frac{(x+iy)^3+2(x+iy)-3i}{x+iy+1}\right)$$

$$u(x,y)=\frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1},\qquad u(x,y)=\operatorname{Im}\left(x+iy+\frac{1}{(x+iy)^2}\right)$$

12) Έστω ότι η συνάρτηση $u = u(x, y)$ είναι αρμονική στο ανοικτό σύνολο $D \subseteq C$.

Αποδείξτε ότι η $f = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ είναι ολόμορφη στο D.

13) Έστω u αρμονική στο R^2 ώστε η u παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.

Αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή.

[<u>Υπόδειξη :</u> Έστω v η αρμονική συζυγής της u . Τότε η $f = u + iv$ είναι ακέραια συνάρτηση , δηλαδή ολόμορφη στο C . Αποδείξτε ότι η $h = e^{-f}$ είναι φραγμένη ακέραια συνάρτηση. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα Liouville που θα αποδείξουμε αργότερα. Το θεώρημα Liouville ισχυρίζεται ότι κάθε φραγμένη ακέραια συνάρτηση είναι σταθερή.]

<u>Παρατήρηση.</u> Όσον αφορά τις παραπάνω ασκήσεις, δεχθείτε όπου χρειάζεται ότι κάθε αρμονική συνάρτηση ορισμένη σ’ έναν ανοικτό και κυρτό (ή αστρόμορφο) τόπο έχει αρμονική συζυγή.

3 Σειρές μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων - Δυναμοσειρές

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούμε τις βασικές ιδιότητες σειρών μιγαδικών αριθμών και σειρών συναρτήσεων, επικεντρώνοντας στις δυναμοσειρές οι οποίες είναι θεμελιώδους σημασίας για την μελέτη των ολομόρφων συναρτήσεων. Επίσης μελετούμε την μιγαδική εκδοχή της εκθετικής , του λογαρίθμου και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3.1 Σειρές μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων.

Ορισμός 3.1

Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών (θα γράφουμε συνήθως $(a_n)\subseteq C$).

Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \geq 1$. Η ακολουθία (s_n) ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_n) ή σειρά με γενικό όρο a_n και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Θα λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει , αν η ακολουθία (s_n) είναι συγκλίνουσα στο C .

Στην περίπτωση αυτή το όριο s της (s_n) το ονομάζουμε άθροισμα της σειράς και (επίσης) το συμβολίζουμε με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Δηλαδή γράφουμε $$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Αν μια σειρά δεν συγκλίνει τότε λέμε ότι αποκλίνει.

Οι βασικές ιδιότητες των συγκλινουσών σειρών μιγαδικών αριθμών είναι οι ακόλουθες:

(1) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει , θεωρήστε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.)

(2) Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνουν και $\lambda, \mu \in C$ τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ συγκλίνει και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

(3) Αν $a_n = x_n + iy_n$, $n \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ Και $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνουν .

Τότε ισχύει
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

<u>Ορισμός 3.2</u>

Θα λέμε ότι η σειρά μιγαδικών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά (πραγματικών) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλίνουσα.

Ανάλογα με τις σειρές πραγματικών αριθμών αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα

<u>Πρόταση 3.3</u>

Αν η σειρά μιγαδικών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα τότε είναι και συγκλίνουσα και ισχύει
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει , π.χ. η εναλλάσσουσα σειρά Leibnitz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ είναι συγκλίνουσα αλλά όχι απόλυτα συγκλίνουσα.

Υπενθυμίζουμε στην συνέχεια την έννοια του $\limsup$ και $\liminf$ μιας ακολουθίας <u>πραγματικών</u> αριθμών.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι αν A μη κενό υποσύνολο του $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ ($= R \cup \{\pm\infty\}$) τότε τα $\sup A$ και $\inf A$ υπάρχουν. Πράγματι , (η συνήθης διάταξη του R επεκτείνεται στο $\overline{R}$ θέτοντας, $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in R$) αν $A \subseteq R$ και το A είναι άνω φραγμένο τότε από το αξίωμα πληρότητας το $\sup A$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο τότε θέτουμε $\sup A = +\infty$. Ανάλογα ισχύουν και για ένα κάτω (αντίστοιχα όχι κάτω) φραγμένο υποσύνολο του R . Η γενική περίπτωση όπου $\varnothing \neq A \subseteq \overline{R}$ έπεται τώρα εύκολα.

<u>Ορισμός 3.4</u>

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών θέτουμε

$$A=\left\{t\in\overline{R}:\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \ \upsilon\pi\alpha\kappa o\lambda o\upsilon\theta\acute{\iota}\alpha\ \left(a_{\kappa_n}\right)\ \ \tau\eta\varsigma\left(a_n\right)\ \ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ \lim_{n\to\infty}a_{\kappa_n}=t\right\}$$

Πρέπει να είναι σαφές (χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano) ότι το A είναι μη κενό υποσύνολο του $\overline{R}$.

Ορίζουμε ως <u>ανώτερο όριο</u> της (a_n) συμβολικά $\limsup a_n$ το $\sup A$. Δηλαδή θέτουμε

$$\limsup a_n=\sup A.$$

Ανάλογα ορίζουμε το <u>κατώτερο όριο</u> της (a_n). Δηλαδή θέτουμε

$$\liminf a_n=\inf A.$$

<u>Παρατήρηση 3.4.1</u>

Είναι μάλλον εύκολο να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες των εννοιών ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

1) $-\infty\le\liminf a_n\le\limsup a_n\le+\infty$, όπου $(a_n)\subseteq R$.

2) Η $(a_n)\subseteq R$ είναι συγκλίνουσα στο $\overline{R}\Leftrightarrow\limsup a_n=\liminf a_n$.

3) Αν $(a_n)\subseteq R$, $(\beta_n)\subseteq R$ ώστε $a_n\le\beta_n$ για κάθε $n\ge1$.

τότε $\liminf a_n\le\liminf\beta_n$, $\limsup a_n\le\limsup\beta_n$ και

$$\limsup(-a_n)=-\liminf a_n.$$

4) Αν $(a_n)\subseteq R$, $(\beta_n)\subseteq R$ ώστε $a_n\ge0$, $\beta_n\ge0$ για κάθε $n\ge1$ και $\lim\beta_n=\beta>0$ τότε

$$\limsup(a_n\cdot\beta_n)=\beta\cdot\limsup a_n.$$

5) Το $\limsup$ μιας (άνω φραγμένης) ακολουθίας πραγματικών (a_n) χαρακτηρίζεται με τον ακόλουθο τρόπο : Έστω $a\in R$ τότε $a=\limsup a_n\Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο

$\{n\in N:a_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\}$ είναι άπειρο και το σύνολο $\{n\in N:a_n\ge a+\varepsilon\}$

είναι πεπερασμένο.

Ανάλογος χαρακτηρισμός ισχύει και για το $\liminf$ μιας (κάτω φραγμένης) ακολουθίας πραγματικών αριθμών.

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών ώστε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$ τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\sigma_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ της (a_n) είναι αύξουσα και άρα είτε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό (αν η (σ_n) είναι άνω φραγμένη) ή απειρίζεται θετικά (αν η (σ_n) δεν είναι άνω φραγμένη). Στην πρώτη περίπτωση θα γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ και στην δεύτερη $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

<u>Πρόταση 3.4.2</u> (Κριτήριο σύγκρισης)

Έστω ότι $0 \leq a_n \leq \beta_n < +\infty$ για κάθε $n \geq 1$.

Τότε ισχύουν:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

(b) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

(c) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$.

(d) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ και υπάρχει $\rho \in N \ : \ a_\rho < \beta_\rho$

τότε
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Απόδειξη. (α) $\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \leq \sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa$ για κάθε $n \geq 1$, άρα $\lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa$

ή
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Από τον ισχυρισμό (α) έχουμε αμέσως τους ισχυρισμούς (b) και (c) .

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό (d) παρατηρούμε ότι, αν $n \geq \rho$ τότε

$$\left(\beta_\rho - a_\rho\right) + \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa \le \sum_{\kappa=1}^{n} \beta_\kappa \le \sum_{\kappa=1}^{\infty} \beta_\kappa \,.$$

Επομένως αφήνοντας το $n \to \infty$ λαμβάνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \left(\beta_\rho - a_\rho\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \,.$$

Παρατήρηση 3.5

Το κριτήριο σύγκρισης έχει και την ακόλουθη χρήσιμη γενίκευση.

(α) Αν $|a_n| \le \beta_n$, για $n \ge N_0$, όπου N_0 θετικός ακέραιος, και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β) Αν $0 \le a_n \le \beta_n$ για $n \ge N_0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ αποκλίνει .

Για την απόδειξη του (α) , εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Ο ισχυρισμός (β) έπεται αμέσως (και) από τον ισχυρισμό (α).

Η **γεωμετρική σειρά** ορίζεται ως η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Και είναι όπως θα διαπιστώσουμε μεγάλης σημασίας για την Μιγαδική Ανάλυση , αφού έχει πολλές και ποικίλες εφαρμογές.

Πρόταση 3.6

Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε $|z| < 1$ και αποκλίνει για κάθε $|z| \ge 1$. Επίσης ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad |z|<1 .$$

Απόδειξη. Έστω $z \in C$ με $|z|<1$. Θέτουμε

$$\sigma_n = 1+|z|+...+|z|^n = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} \Rightarrow \lim \sigma_n = \lim \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|} .$$

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$ για $|z|<1$ και η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απόλυτα (άρα και απλά για $|z|<1$.)

Για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς , θέτουμε

$$s_n = 1+z+...+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \text{ για } |z|<1 .$$

Τότε $$lims_n = \lim \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1 .$$

Κατά συνέπεια $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1 .$$

Τέλος αν $|z| \geq 1$, τότε $|z|^n \geq 1$ για κάθε $n \geq 1$ και άρα $|z|^n$ δεν συγκλίνει στο 0, από όπου έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει.

Τα κριτήρια ρίζας και λόγου που ακολουθούν είναι ουσιαστικά εφαρμογές της γεωμετρικής σειράς .

<u>Πρόταση 3.7</u> (Κριτήριο ρίζας)

Έστω $(a_n) \subseteq C$. Θέτουμε $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ τότε ισχύουν :

(α) Αν $a<1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και

(β) αν $a>1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $\beta \in R$ ώστε $a<\beta<1$. Από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$ μιας ακολουθίας πραγματικών (πρβλ. παρατήρηση 3.3.1 (5)) υπάρχει $N_0 \in N$ ώστε

$$n \geq N_0 \quad \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \quad \text{άρα} \quad |a_n| \leq \beta^n \quad \text{για κάθε} \quad n \geq N_0 .$$

Επειδή $0 < \beta < 1$ η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta^n$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης (και την παρατήρηση 3.5) έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

(β) Έστω ότι $1 < a$. Τότε (πάλι) από τον χαρακτηρισμό του $\limsup$ έπεται ότι υπάρχει $M \subseteq N$ άπειρο σύνολο ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ για κάθε $n \in M$. Άρα $|a_n| > 1$ για κάθε $n \in M$, που έπεται ότι η (a_n) δεν τείνει στο 0 και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

<u>Πρόταση 3.8</u> (Κριτήριο Λόγου)

Έστω $(a_n) \subseteq C \setminus \{0\}$ τότε ισχύουν:

(α) Αν $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και

(β) αν $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη. (α) Θέτουμε $a = \limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ και επιλέγουμε $\beta \in R$ ώστε $a < \beta < 1$.

Όπως προηγουμένως υπάρχει $N_0 \in N$ ώστε $n \geq N_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \beta$.

Έπεται ότι ,

$$|a_{N_0+1}| \leq \beta |a_{N_0}|$$

$$|a_{N_0+2}| \leq \beta |a_{N_0+1}| \leq \beta^2 |a_{N_0}|$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$|a_{N_0+\kappa}| \leq \beta^{\kappa} |a_{N_0}| , \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

Επειδή $0 < \beta < 1$ η γεωμετρική σειρά συγκλίνει και το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

(β) Θέτουμε $a = \liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, τότε $a > 1$ και από τον χαρακτηρισμό του $\liminf$ μιας ακολουθίας πραγματικών , βρίσκουμε $N_0 \in N$ ώστε

$$n \geq N_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \text{ άρα } \left| a_{n+1} \right| > \left| a_n \right| \text{ για κάθε } n \geq N_0$$

Έπεται ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Σημειώνουμε ότι το κριτήριο λόγου (προφανώς) ισχύει και για μια ακολουθία $(a_n) \subseteq C$ για την οποία υπάρχει $N_0 \in N$ ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n \geq N_0$.

__Παραδείγματα 3.8.1__.

(α) Αν $w \in C$ με $|w| \leq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{w^n}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty .$$

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$ συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα. Πράγματι αν $a_n = \frac{(-1)^n}{n+i}$ τότε

$$a_n = \frac{(-1)^n (n-i)}{(n+i)(n-i)} = (-1)^n \frac{n}{n^2+1} - i(-1)^n \frac{1}{n^2+1} .$$

Επειδή οι ακολουθίες $\frac{n}{n^2+1}$ και $\frac{1}{n^2+1}$ είναι φθίνουσες και μηδενικές έπεται από το κριτήριο Leibnitz οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ είναι συγκλίνουσες και έτσι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι επίσης συγκλίνουσα. Επειδή $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{n+1}$, έπεται από το κριτήριο σύγκρισης ότι η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα .

Οι έννοιες της κατά σημείο (απλής) και ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών και σειρών πραγματικών συναρτήσεων μας είναι γνωστές από την Πραγματική Ανάλυση . Οι έννοιες αυτές ορίζονται με τον ίδιο τρόπο και για ακολουθίες και σειρές μιγαδικών συναρτήσεων.

Ορισμός 3.9

Έστω X σύνολο , $f_n : X \to C$, $n \geq 1$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων και $f : X \to C$ συνάρτηση.

(α) Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο επί του X αν

$$f_n(x) \to f(x) \text{ για κάθε } x \in X .$$

Ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in X$ υπάρχει

$$N(\varepsilon, x) \in N : \ n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(β) Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του X αν για κάθε

$$\varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } N(\varepsilon) \in N : \ n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \in X$$

Ισοδύναμα : Αν $\|f_n - f\| \to 0$

Όπου αν $g : X \to C$ συνάρτηση τότε, $\|g\| \underset{o\rho}{=} \sup_{x \in X} |g(x)|$.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα :

1) Αν $X \subseteq C$ (ή γενικότερα αν X μετρικός χώρος) και $f_n : X \to C$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του X , τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

2) Μια ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X σε κάποια συνάρτηση f αν και μόνο αν η (f_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει

$$N(\varepsilon) \in N : \ n > m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \ .$$

Τα δύο παραπάνω αποτελέσματα μας είναι γνωστά από την Πραγματική Ανάλυση για ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων. Οι αποδείξεις προκειμένου για ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων είναι εντελώς όμοιες.

Είναι προφανές ότι: $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του $X \Rightarrow f_n \to f$ κατά σημείο επί του X .

Το αντίστροφο δεν ισχύει . Ένα απλό παράδειγμα είναι η ακολουθία $f_n(z)=z^n$, $n\geq 1$, $|z|<1$. Τότε $f_n(z)=z^n\to 0$ για κάθε $|z|<1$, όμως η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 επί του ανοικτού δίσκου $\Delta(0,1)$ (Γιατί;).

<u>Ορισμός 3.10</u>

Έστω X σύνολο και $f_n : X\to C$, $n\geq 1$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων. Η ακολουθία συναρτήσεων $s_n = f_1+f_2+...+f_n$, $n\geq 1$ ονομάζεται <u>σειρά συναρτήσεων</u> γενικού όρου f_n και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(α) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει <u>κατά σημείο</u> επί του X στην συνάρτηση f αν

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ για κάθε } x\in X.$$

Δηλαδή αν

$$s_n(x)\to f(x) \text{ για κάθε } x\in X.$$

(β) Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει <u>ομοιόμορφα</u> επί του X στην συνάρτηση f αν η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X στην f. Δηλαδή αν

$$\|s_n - f\|\to 0$$

Παρατηρούμε ότι:

(1) Αν $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο επί του X τότε $f_n\to 0$ κατά σημείο επί του X.

(2) Αν $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X τότε $f_n\to 0$ ομοιόμορφα επί του X.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Το κριτήριο του Weierstrass είναι μία χρήσιμη ικανή συνθήκη η οποία εξασφαλίζει την <u>ομοιόμορφη</u> σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

<u>Θεώρημα 3.11</u> (Κριτήριο Weierstrass)

Έστω X τυχόν σύνολο και $f_n : X\to C$, $n\geq 1$ ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty \quad , \quad \text{όπου} \quad \|f_n\| = \sup\left\{ \left| f_n(x) : x \in X \right| \right\} .$$

Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X σε κάποια συνάρτηση $f : X \to C$.

Απόδειξη. Θέτουμε $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$, $n \geq 1$. Θα αποδείξουμε ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy (πρβλ. την παρατήρηση (2) μετά τον ορισμό 3.9).

Έστω τυχόν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $N_0 \in N$ ώστε

$$n > m \geq N_0 \Rightarrow \sum_{\kappa=m+1}^{n} \|f_\kappa\| \leq \varepsilon .$$

(Κριτήριο Cauchy για ακολουθίες πραγματικών αριθμών .)

Αν $n > m \geq N_0$ και $x \in X$ τότε έχουμε

$$\left| s_n(x) - s_m(x) \right| = \left| f_{m+1}(x) + ... + f_n(x) \right| \leq \left| f_{m+1}(x) \right| + ... + \left| f_n(x) \right|$$

$$\leq \|f_{m+1}\| + ... + \|f_n\| \leq \varepsilon .$$

Δηλαδή $\qquad n > m \geq N_0 \Rightarrow \sup_{x \in X} \left| s_n(x) - s_m(x) \right| = \|s_n - s_m\| \leq \varepsilon .$

Έπεται ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy και συνεπώς υπάρχει συνάρτηση $f : X \to C$ ώστε

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{ομοιόμορφα επί του} \quad X .$$

<u>Παράδειγμα 3.11.1</u>

Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του δίσκου $\overline{\Delta(0,r)}$ αν $0 < r < 1$. Πράγματι αν $|z| \leq r$ τότε $\left| \frac{z^n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{r^n}{\sqrt{n}}$. Επειδή , από το κριτήριο ρίζας (ή το κριτήριο του λόγου), η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει , από το κριτήριο Weierstrass έπεται το συμπέρασμα .

<u>3.2 Δυναμοσειρές</u>

<u>Ορισμός 3.12</u>

Έστω ότι δίδονται μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_n) και ένας μιγαδικός a. Τότε η

σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots$ (1)

ονομάζεται <u>δυναμοσειρά</u> κέντρου a με συντελεστές $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

Παρατηρούμε ότι η (1) είναι μια **<u>σειρά συναρτήσεων</u>** , δηλαδή των πολυωνυμικών συναρτήσεων

$$C \ni z \mapsto a_n (z-a)^n \in C .$$

Προφανώς μία δυναμοσειρά συγκλίνει πάντοτε για $z = a$, δηλαδή στο κέντρο της.

Αυτό που ενδιαφέρει είναι: για ποια $z \neq a$ συγκλίνει η (1) και ακόμη αν θέσουμε $A = \left\{ z \in C : \ \eta \ (1) \ \ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota \right\}$, τότε ποια είναι η συνάρτηση (άθροισμα της (1))

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad z \in A$$

και τι είδους ιδιότητες έχει.

<u>Παρατήρηση 3.13</u>

Πρέπει να είναι σαφές ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n$ συγκλίνει για $z \neq a$ αν και μόνο αν η δυναμοσειρά (κέντρου 0) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ συγκλίνει για $w = z - a \neq 0$. Έπεται ότι αν θέσουμε

$$B = \left\{ w \in C : \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \ \ \eta \ \ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota \right\} \quad \text{και} \quad A = \left\{ z \in C : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ \ \sigma\upsilon\gamma\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota \right\}$$

τότε ισχύει $A = a + B$

(Ελέγξτε τις λεπτομέρειες.)

Η παρατήρηση αυτή επιτρέπει να υποθέτουμε ότι το κέντρο της δυναμοσειράς είναι το $a = 0$ στην διατύπωση και απόδειξη διάφορων ιδιοτήτων των δυναμοσειρών.

Η απλούστερη και πλέον σημαντική δυναμοσειρά είναι η <u>γεωμετρική σειρά</u> η οποία παράγεται από την σταθερή ακολουθία $a_n = 1,\ \ n \ge 1$ και τον μιγαδικό $a = 0$.

Η συμπεριφορά της γεωμετρικής σειράς καθόσον αφορά την σύγκλιση (η οποία περιγράφτηκε στην πρόταση 3.6) είναι όπως θα διαπιστώσουμε τυπική για τις δυναμοσειρές. Πράγματι θα αποδείξουμε ότι: αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-a\right)^n$ είναι τυχούσα δυναμοσειρά , τότε σε αυτήν αντιστοιχεί μοναδικός $R \ge 0$ ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει για κάθε $z \in \Delta\left(a.R\right)$ και να αποκλίνει για κάθε $z \in C:\ \left|z-a\right| > R$. Στην απόδειξη αυτή κεντρικό ρόλο παίζουν η γεωμετρική σειρά και το κριτήριο Weierstrass (θεώρημα 3.11).

<u>Λήμμα 3.14 (Abel</u>)

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δυναμοσειρά και $z_0 \in C$ με $z_0 \ne 0$ ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ είναι συγκλίνουσα. Τότε ισχύουν:

(α) η δυναμοσειρά <u>συγκλίνει απόλυτα</u> για κάθε $\left|z\right| < \left|z_0\right|$ και

(β) η δυναμοσειρά <u>συγκλίνει ομοιόμορφα</u> στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta\left(0,r\right)}$ για κάθε r με $0 \le r < \left|z_0\right|$.

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(a_n z_0^n\right)$ είναι μηδενική , άρα είναι φραγμένη.

Έστω $\mathrm{M} > 0:\ \left|a_n z_0^n\right| \le \mathrm{M}$ για κάθε $n \ge 0$.

(α) Έστω $z \in \Delta\left(0,\left|z_0\right|\right) \Leftrightarrow \left|z\right| < \left|z_0\right|$. Παρατηρούμε ότι

$$a_n z^n = \left(a_n z_0^n\right) \cdot \left(\frac{z}{z_0}\right)^n ,n \ge 0.$$

Άρα
$$\left|a_n z^n\right| \le \mathrm{M} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n ,n \ge 0 \qquad (1)$$

όμως $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, άρα η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ συγκλίνει . Από το κριτήριο σύγκρισης και την (1) έπεται ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n z^n\right| < +\infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα.

(β) Έστω $0 < r < |z_0|$. Αν $|z| \le r$ τότε όπως προηγουμένως έχουμε

$$\left|a_n z^n\right| \le \mathrm{M}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le \mathrm{M}\left|\frac{r}{z_0}\right|^n , \qquad n \ge 0$$

και βέβαια η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ συγκλίνει αφού $0 < \frac{r}{|z_0|} < 1$.

Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$.

……………………………………

Το λήμμα του Abel ισχύει και για δυναμοσειρές κέντρου a, θέτοντας $\omega = z - a$ (πρβλ. την παρατήρηση 3.13) με τις προφανείς τροποποιήσεις στην διατύπωσή του. Έτσι οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 3.15</u> .

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά. Ορίζουμε ως <u>ακτίνα σύγκλισης</u> της δυναμοσειράς την μη αρνητική ποσότητα

$$R = \sup_{\text{ορ}} \left\{ \begin{array}{l} r \ge 0 : \;\; \textit{υπάρχει} \;\; z_0 \in C \;\; \textit{με} \;\; |z_0 - a| = r \;\; \textit{ώστε} \\ \eta \;\; \textit{σειρά} \;\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - a)^n \;\; \textit{συγκλίνει.} \end{array} \right\}$$

Προφανώς $0 \le R \le +\infty$.

<u>Θεώρημα 3.16</u> (Cauchy -Hadamard).

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε ισχύουν :

(α) Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα σε κάθε σημείο του ανοικτού δίσκου $\Delta(a,R)$.

(β) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(a,r)}$, για κάθε r με $0 < r < R$.

(γ) Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in C$ με $|z-a| > R$.

(δ) $$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \text{ όπου } \frac{1}{0} = +\infty \text{ και } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Για $|z-a| = r$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = 0$, διαφορετικά θέτουμε $\omega = z - a$ και εργαζόμαστε με την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n$ κέντρου 0 (πρβλ. την παρατήρηση 3.13).

(α) Έστω $z \in \Delta(0,R) \Leftrightarrow |z| < R$. Από τον ορισμό της R υπάρχει $z_0 \in C$ ώστε $|z| < |z_0| \le R$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ είναι συγκλίνουσα . Από το λήμμα του Abel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα.

(β) Έστω r με $0 < r < R$, τότε (όπως πριν) υπάρχει $z_0 \in C$ ώστε $r < |z_0| \le R$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ είναι συγκλίνουσα. Από το λήμμα του Abel συμπεραίνουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$.

(γ) Αν $|z| > R$, τότε (προφανώς) από τον ορισμό της R η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

(δ) Θέτουμε $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Έστω $|z| < \frac{1}{a}$, τότε $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot a < 1$, οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα (Κριτήριο ρίζας).

(ii) Έστω $|z| > \frac{1}{a}$, τότε $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot a > 1$, οπότε η σειρά αποκλίνει (Κριτήριο ρίζας).

Από τους ισχυρισμούς (α) και (γ) έπεται ότι αναγκαία ισχύει

$$R = \frac{1}{a}.$$

Παρατήρηση 3.17

1) Παρατηρούμε ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης (για κάθε $a \in C$) η οποία είναι ίση με $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ και ακόμη ότι οι δίσκοι σύγκλισης τους συνδέονται ως ακολούθως $\Delta(a,R) = a + \Delta(0,R)$.

2) Έστω $(a_n) \subseteq C, \quad a \in C$ και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$ γνήσια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Αποδεικνύεται τότε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{k_n}$, δίνεται από τον τύπο ,

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k_n]{a_n}}.$$

Για την απόδειξη πρβλ. την πρόταση 5.1.6 του [M-X].

3) Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων ($f_n : A \subseteq C \to C, \quad n \geq 1$), συγκλίνει <u>ομοιόμορφα στα συμπαγή</u> υποσύνολα του A στην συνάρτηση $f : A \to C$ αν για κάθε $K \subseteq A$ συμπαγές ισχύει ότι $f_n|_K \to f|_K$ ομοιόμορφα επί του K . Πρέπει να είναι σαφές από τον ισχυρισμό (β) του θεωρήματος 3.16 ότι μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου $\Delta(a,R)$.

4) Το γεγονός ότι το θεώρημα Cauchy- Hadamard δεν μπορεί να αποφανθεί επί του κύκλου σύγκλισης $|z-a| = R$ της δυναμοσειράς διαπιστώνεται (και) από το πρώτο από τα επόμενα παραδείγματα .

Παραδείγματα 3.18

1) Οι δυναμοσειρές (α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, (β) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ έχουν ακτίνα σύγκλισης ίση με 1.

Πράγματι ,

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

και όμοια για τις άλλες δύο.

(α) Στον μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ ισχύει , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$ και έτσι έχουμε απόλυτη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

(Παρατηρούμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $|z|\le 1$. Εξηγήστε το γιατί.)

(β) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει σε κάθε σημείο της $|z|=1$, αφού $|z|^n=1,\quad n\ge 1$

(πρβλ. και την πρόταση 3.6).

(γ) Για την δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ παρατηρούμε ότι: αν $z=1,$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει αφού απειρίζεται θετικά και

αν $z=-1,$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ είναι συγκλίνουσα ως εναλλάσσουσα σειρά αλλά βέβαια δεν συγκλίνει απόλυτα.

2) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z+1)^{2n}$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση 3.17 (2).

Για την πρώτη δυναμοσειρά έχουμε $a_n=1,\ n\ge 1$ και $k_n=2^n$. Κατά συνέπεια $\sqrt[2^n]{|a_n|}=1$, $n\ge 1$ και έτσι $R=1$.

Για την δεύτερη δυναμοσειρά έχουμε

$$\sqrt[2n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}},\quad n\ge 0 \text{ και επειδή } \sqrt[2n]{(2n)!}\to+\infty \text{ ως υπακολουθία της } \left(\sqrt[n]{n!}\right)$$

(ή με απευθείας υπολογισμό $\sqrt[2n]{(2n)!}\ge\sqrt[2n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}\ge\sqrt[2n]{n^n}=\sqrt{n}\to+\infty$) .

Έπεται ότι $\sqrt[2n]{|a_n|}\to 0$. Άρα $R=\frac{1}{0}=+\infty$.

3) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\Delta(0,1)$ αλλά η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^3}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{\Delta(1,1)}$.

Πράγματι ,

η πρώτη είναι η γεωμετρική με ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\Delta(0,1)$, αφού η ακολουθία συναρτήσεων $\varphi_n(z) = z^n$, $n \geq 0$, $z \in \Delta(0,1)$, δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην σταθερά συνάρτηση $\varphi(0) = 0,\ z \in \Delta(0,1)$.

Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει επίσης ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και επειδή $\frac{|z-1|^n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ για $|z-1| \leq 1$, έπεται από το κριτήριο του Weierstrass ότι συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $\overline{\Delta(1,1)}$.

……………………………………

Πρόταση 3.19

Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n \geq 0$. Αν το όριο $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ υπάρχει στο $\overline{R}$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου.

Θέτουμε $a = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ και παρατηρούμε ότι το όριο $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ επίσης υπάρχει στο $\overline{R}$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\alpha}$.

Έστω $z \in C$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις

(α) $0 < |z| < a$, τότε $\limsup \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \cdot \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z| \cdot \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{a} < 1$, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα.

(β) $a<|z|$, τότε $\liminf\left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z|\cdot\liminf\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z|\cdot\lim\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|z|}{a} > 1$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

Από το θεώρημα Cauchy – Hadamard έπεται ότι (αναγκαία) η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς ισούται με τον a .

……………………………………..

<u>Παραδείγματα 3.20</u>

Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών :

(α) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^3+2\right)z^n$, (β) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i}{n!}\left(z+3\right)^n$, (γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n!\right)z^n$, (δ) $\sum_{n=0}^{\infty}3^n\left(z-1\right)^n$, και

(ε) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}z^n$, όπου $0<a<+\infty$.

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα και έχουμε:

(α) $R=\lim\dfrac{n^3+2}{\left(n+1\right)^3+2}=1$.

(β) $R=\lim\left|\dfrac{\frac{i}{n!}}{\frac{i}{\left(n+1\right)!}}\right|=\lim\left(n+1\right)=+\infty$.

(γ) $R=\lim\dfrac{n!}{\left(n+1\right)!}=\lim\dfrac{1}{n+1}=0$.

(δ) $R=\lim\dfrac{3^n}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$.

(ε) $R=\lim\dfrac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^{n+1}}}=\lim\dfrac{a^{n+1}}{a^n}=a$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $R\in\left[0,+\infty\right]$ υπάρχει δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης ίση με R .

……………………………………

Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Θέτουμε

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z\in\Delta(a,R)$. Τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στον ανοικτό δίσκο $\Delta(a,R)$. Πράγματι , αν $z\in\Delta(a,R)$ τότε επιλέγουμε $r>0$ ώστε $|z-a|<r<R$ και το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα Cauchy – Hadamard, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην f επί του δίσκου $\overline{\Delta(a,r)}$. Πρόκειται να αποδείξουμε ένα πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα, ότι δηλαδή η f είναι <u>ολόμορφη</u> στον δίσκο σύγκλισης $\Delta(a,R)$ και επιπλέον η παράγωγός της f' είναι και αυτή δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης και το ίδιο κέντρο. Ιδιαίτερα έπεται ότι μια δυναμοσειρά έχει παραγώγους <u>κάθε τάξης</u> στον δίσκο σύγκλισής της.

<u>Θεώρημα 3.21</u> (Διαφόρισης δυναμοσειρών).

Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε η f είναι ολόμορφη συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $\Delta(a,R)$ και ισχύει

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} ,\ z\in\Delta(a,R).$$

(Αυτό σημαίνει ότι μια δυναμοσειρά διαφορίζεται κατά όρους

$$f'(z)=(a_0)'+\left(a_1(z-a)\right)'+\ldots+\left(a_n(z-a)^n\right)'+\ldots=$$

$$=a_1+2a_2(z-a)+\ldots+na_n(z-a)^{n-1}+\ldots$$

για $|z-a|<R$.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι $a=0$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με R .

Πράγματι , παρατηρούμε ότι

$$z\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n \qquad (1)$$

υπό την έννοια ότι οποτεδήποτε συγκλίνει η μια από τις δύο δυναμοσειρές συγκλίνει και η άλλη και ισχύει η (1) .

Έπεται ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης έστω R'.

Όμως η ακτίνα σύγκλισης της δεύτερης ισούται με

$$R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R \cdot$$

Έστω τώρα $z_0 \in \Delta(0,R)$, θα αποδείξουμε ότι η f έχει παράγωγο στο z_0 και

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} .$$

Έστω $r \in R$ ώστε $|z_0| < r < R$. Θέτουμε $\varphi_1(z) = 1,\ z \in C$ και για κάθε $\kappa \geq 2$

$$\varphi_\kappa(z) = z^{\kappa-1} + z_0 z^{\kappa-2} + \ldots + z_0^{\kappa-2} z + z_0^{\kappa-1},\ \ z \in C$$

Και παρατηρούμε ότι

$$|\varphi_\kappa(z)| \leq |z^{\kappa-1}| + |z_0 z^{\kappa-2}| + \ldots + |z_0^{\kappa-2} z| + |z_0^{\kappa-1}| \leq \kappa r^{\kappa-1},\ \text{ για } |z| \leq r \text{ και } \kappa \geq 2. \qquad (2)$$

Έστω $z \in \overline{\Delta(0,r)}$ τότε έχουμε ,

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0) \varphi_n(z) = (z - z_0) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z). \qquad (3)$$

Από την (2) και το γεγονός ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε $|z| < R$ (ιδιαίτερα για $|z| \leq r < R$) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |\varphi_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1} < +\infty \ \text{ για κάθε } |z| \leq r. \qquad (4)$$

Η (4) σε συνδυασμό με το κριτήριο Weierstrass έχουν ως συνέπεια ότι η σειρά συναρτήσεων $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$ και έτσι η φ είναι συνεχής στον $\overline{\Delta(0,r)}$, ιδιαίτερα είναι συνεχής στο σημείο z_0.

Έπεται τώρα από την (3) και την παρατήρηση Καραθεοδωρή ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 και ακόμη ότι

$$f'(z_0)=\varphi(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(nz_0^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nz_0^{n-1}\ .$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

……………………………

<u>Παρατήρηση 3.22</u>

Έστω $\Omega\subseteq C$ ανοικτό και $f:\Omega\to C$ συνάρτηση. Λέμε ότι η f <u>έχει παράγουσα</u> , αν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F:\Omega\to C$ ώστε $F'(z)=f(z)$ για κάθε $z\in\Omega$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάθε δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ έχει παράγουσα στον ανοικτό δίσκο σύγκλισής της .

Πράγματι έστω $R>0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$, τότε η δυναμοσειρά
$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}=a_0(z-a)+\frac{a_1}{2}(z-a)^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}+\ldots$ έχει ακτίνα σύγκλισης επίσης R (παρατηρήστε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}=(z-a)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^n$ και εφαρμόστε το θεώρημα Cauchy- Hadamard για να υπολογίσετε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-a)^n$). Από το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών έπεται τώρα ότι $F'(z)=f(z)$ για $|z-a|<R$. Σημειώνουμε ότι επειδή ο δίσκος $\Delta(a,R)$ είναι τόπος (ως κυρτό σύνολο) κάθε άλλη παράγουσα της δυναμοσειράς $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ είναι της μορφής $F+c$, όπου c σταθερά.

<u>Πόρισμα 3.23</u>

Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ δυναμοσειρά με κέντρο a και ακτίνα σύγκλισης $R>0$.

Τότε:

(α) Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στον ανοικτό δίσκο $\Delta(a,R)$.

(β) $$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+k)a_{n+k}(z-a)^n, z\in\Delta(a,r),\ k=1,2,\dots \text{ και}$$

(γ) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k=0,1,2,\dots$ και έτσι η f εκφράζεται ως μια σειρά Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,\ z\in\Delta(a,r).$$

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (α) και (β) αποδεικνύονται με επαγωγή και την βοήθεια του θεωρήματος διαφόρισης δυναμοσειρών.

Για τον ισχυρισμό (γ) θέτουμε $z=a$ στην δυναμοσειρά $f^{(k)}(z)$ και βρίσκουμε $f^{(k)}(a)=k!a_k$ άρα

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Παράδειγμα 3.24

Έστω $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=1+z+\dots+z^n+\dots$, $|z|<1$ η γεωμετρική σειρά . Έπεται ότι

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+\dots+nz^{n-1}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$f''(z)=\frac{2}{(1-z)^3}=2+6z+\dots+n(n-1)z^{n-2}+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

για $|z|<1$, και ούτω καθεξής . Επίσης έχουμε $f^{(n)}(0)=n!$ και $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$, $|z|<1$.

Μια παράγουσα της γεωμετρικής σειράς στον δίσκο $\Delta(0,1)$ είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots+\frac{z^{n+1}}{n+1}+\dots .$$

<u>Ορισμός 3.25</u>

Έστω $\Omega \subseteq C$ και $f:\Omega \to C$ συνάρτηση. Η f λέγεται <u>αναλυτική</u> στο Ω, αν για κάθε $a \in \Omega$ η f αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a, δηλαδή υπάρχουν $r = r(a) > 0$ και $a_n = a_n(a) \in C,\ \ n \geq 0$, έτσι ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,\ \ z \in \Delta(a,r).$$

Η απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος είναι προφανής από τα όσα προηγήθηκαν.

<u>Θεώρημα 3.26</u>

Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό και $f:\Omega \to C$ συνάρτηση .

Τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές :

Η f είναι αναλυτική στο Ω. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο Ω. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Ένας από τους κύριους στόχους του μαθήματος είναι να αποδείξουμε ότι και οι αντίστροφες συνεπαγωγές του ανωτέρω θεωρήματος επίσης ισχύουν. Με περισσότερη ακρίβεια : Κάθε ολόμορφη συνάρτηση f στο ανοικτό $\Omega \subseteq C$ είναι αναλυτική στο Ω.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια του θεμελιώδους θεωρήματος του Cauchy που θα αποδειχθεί αργότερα.

Ακόμη σημειώνουμε ότι (όπως θα αποδείξουμε) η αναλυτικότητα μιας συνάρτησης είναι ισοδύναμη με το ότι: Για κάθε $a \in \Omega$ και κάθε $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R \geq r$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in \Delta(a,r)$.

<u>3.3 Εκθετική και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ο μιγαδικός λογάριθμος</u>.

Στην παράγραφο αυτή επεκτείνουμε πολλές από τις συναρτήσεις του Απειροστικού Λογισμού στο μιγαδικό πεδίο. Έστω, για παράδειγμα μια δυναμοσειρά

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ με πραγματικούς συντελεστές a_n, πραγματικό κέντρο a και ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε βέβαια η f συγκλίνει για $x\in(a-R,a+R)$ και αποκλίνει για $x\in R$ με $|x-a|>R$. Είναι τότε σαφές ότι η μιγαδική δυναμοσειρά $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$, έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης και (προφανώς) επεκτείνει την f σε μια ολόμορφη συνάρτηση F στον δίσκο $\Delta(a,R)$. (πρβλ. κεφ. 3)

Λήμμα 3.27.

Οι δυναμοσειρές (α) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, (β) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ και (γ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

έχουν ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$.

Απόδειξη. (α) 1η απόδειξη : Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x\in R$. Από τις εισαγωγικές παρατηρήσεις (ή το λήμμα του Abel) έπεται ότι $R=+\infty$.

2η απόδειξη : Το όριο $\lim\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim\frac{(n+1)!}{n!}=\lim(n+1)=+\infty$.

Συνεπώς $R=+\infty$. (Πρόταση 3.19).

3η απόδειξη : $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}=\lim\sqrt[n]{n!}=+\infty$ (θεώρημα Cauchy – Hadamard).

(β) και (γ) 1η απόδειξη : Γνωρίζουμε ότι

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{και} \quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x\in R .$$

Από τις εισαγωγικές παρατηρήσεις έπεται όπως πριν ότι $R=+\infty$.

2η απόδειξη $\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}<+\infty,\quad z\in C$.

Ανάλογα ισχύουν και για την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

<u>3η απόδειξη</u> : $R=\dfrac{1}{\limsup \sqrt[2n]{\dfrac{1}{(2n)!}}}=\dfrac{1}{\lim \sqrt[2n]{\dfrac{1}{(2n)!}}}=\lim \sqrt[2n]{(2n)!}=+\infty$.

Όμοια και για την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

……………………………………………

Το λήμμα 3.27 μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x,\ \ x\in R$ στο μιγαδικό πεδίο και να εικάσουμε ότι η αντίστοιχη επέκταση της $\mathrm{e}^x,\ \ x\in R$ είναι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

<u>Ορισμός 3.28</u>

Η συνάρτηση <u>συνημίτονο</u> $\cos : C\to C$ είναι η

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad z\in C .$$

Και η συνάρτηση <u>ημίτονο</u> $\sin : C\to C$ η

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in C .$$

<u>Πρόταση 3.29</u>

(α) $\cos' z=-\sin z$ και $\sin' z=\cos z,\ \ z\in C$.

(β) $\cos(-z)=\cos z$ και $\sin(-z)=-\sin z,\ \ z\in C$.

<u>Απόδειξη</u>. (α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots$$

Άρα , $$\cos' z = -\frac{2z}{2!} + \frac{4z^3}{4!} - \frac{6z^5}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}(2n+2)\frac{z^{2n+1}}{(2n+2)!} + \ldots =$$

$$= -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \right) = -\sin z .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\sin' z = \cos z, \quad z \in C$.

(β) $$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z .$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $\sin(-z) = -\sin z$.

……………………………………………………

Θέτουμε $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; z \in C$ και παρατηρούμε ότι $F(x) = e^x, \quad x \in R$. Θα αποδείξουμε ότι $F(z) = e^z, \quad z \in C$, δηλαδή

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \; z \in C .$$

<u>Λήμμα 3.30</u>

(α) $$F'(z) = F(z), \quad z \in C \text{ και}$$

(β) $$F(z+w) = F(z) \cdot F(w), \quad z, \mathrm{w} \in C .$$

Απόδειξη. (α) $$F(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad z \in C,$$

Άρα από το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών έχουμε

$$F'(z) = 1 + \frac{2z}{2!} + \ldots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + (n+1)\frac{z^n}{(n+1)!} + \ldots =$$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = F(z), \quad z \in C .$$

(β) Έστω a τυχόν μιγαδικός αριθμός . Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(z) = F(z) \cdot F(a-z), \quad z \in C.$$

Προφανώς g ολόμορφη στο C και

$$g'(z) = F'(z) \cdot F(a-z) + F(z) \cdot F'(a-z) \cdot (a-z)' =$$

$$= F'(z) \cdot F(a-z) + F(z) \cdot F'(a-z) \cdot (-1) =$$

$$= F'(z) \cdot F(a-z) - F(z) \cdot F'(a-z) = 0 \text{ για κάθε } z \in C.$$

Έπεται ότι g σταθερή στο C και αν $z \in C$ τότε

$$g(z) = g(0) = F(0) \cdot F(a) = 1 \cdot F(a) = F(a).$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $g(z) = F(z) \cdot F(a-z) = F(a)$, για κάθε $z \in C$.

Επειδή το a επελέγη κατά τρόπο αυθαίρετο έχουμε το συμπέρασμα, θέτοντας π.χ. $a = z + w$.

<u>Θεώρημα 3.31</u>

Η εκθετική σειρά αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 ως εξής

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z \in C$$

Δηλαδή ισχύει $F(z) = e^z$ για κάθε $z \in C$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό

$$F(iy) = e^{iy} \text{ για κάθε } y \in R.$$

Πράγματι, έστω y τυχών πραγματικός αριθμός. Τότε έχουμε

$$F(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \left[1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{i^2y^2}{2!}+\ldots+\frac{i^{2n}y^{2n}}{(2n)!}\right)+i\left(y+\frac{i^2y^3}{3!}+\ldots+\frac{i^{2n}y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{y^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]=$$

$=\cos y+i\sin y=e^{iy}$. Έτσι αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

Έστω τώρα $z = x+iy$ με $x, y \in R$, τότε από το λήμμα 3.30 συμπεραίνουμε ότι ,

$$F(x+iy)=F(x)\cdot F(iy)=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy} \text{ ή } F(z)=e^z.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

……………………………………….

Όταν αποδείξαμε τον ισχυρισμό του προηγουμένου θεωρήματος υποθέσαμε ότι $y \in R$, όμως εύκολα ελέγχεται ότι η απόδειξη ισχύει και για $y \in C$. Έτσι έχουμε το ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.32 (Τύπος του Euler)

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \text{ για κάθε } z \in C.$$

Θεώρημα 3.33 (Η περιοδικότητα της εκθετικής συνάρτησης).

(α) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i$, όπου $\kappa\in Z$ και (άρα)

(β) $e^z = e^\omega \Leftrightarrow z-\omega = 2\kappa\pi i$ όπου $\kappa\in Z$.

Απόδειξη. (α) Έστω $z=2\kappa\pi i$, όπου $\kappa\in Z$ τότε

$$e^{2\kappa\pi i}=\cos(2\kappa\pi)+i\sin(2\kappa\pi)=1+i\cdot 0=1.$$

Αντίστροφα : Έστω $e^z=1$, όπου $z = x+yi$, $x, y \in R$. Τότε

$$e^x(\cos y+i\sin y)=1\Leftrightarrow\begin{cases} e^x\cos y=1 & (1) \quad \kappa\alpha\iota \\ e^x\sin y=0 & (2).\end{cases}$$

Από την (2) έπεται ότι $\sin y = 0$ (αφού $e^x>0$) και άρα $y=\lambda\pi$ για κάποιο $\lambda\in Z$ (3).

Από την (1) και την (3) έπεται ότι $e^x\cdot\cos(\lambda\pi)=1$. Επειδή $\cos(\lambda\pi)=(-1)^\lambda$ και

$e^x > 0$ συμπεραίνουμε ότι $\cos(\lambda\pi) = 1$ και $e^x = 1$. Κατά συνέπεια $x = 0,\ \ \lambda = 2\kappa$ και έτσι

$$z = 0 + i2\kappa\pi = 2\kappa\pi i \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathrm{Z}.$$

(β) Από τον ισχυρισμό (α) έχουμε

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z - w = 2\kappa\pi i\text{ , όπου } \kappa \in \mathrm{Z}.$$

……………………………………………

Είναι σαφές ότι κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του μιγαδικού $w = 2\pi i$ είναι μια περίοδος για την εκθετική συνάρτηση . Ιδιαίτερα έπεται ότι η εκθετική (σε αντίθεση με τον περιορισμό της στους πραγματικούς) <u>δεν</u> είναι $1-1$ συνάρτηση.

<u>Πόρισμα 3.34</u>

(α) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in C.$

(β) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1\ , \quad z \in C.$

(γ) $\sin(z + w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$ και

$\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w.$

(δ) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathrm{Z}$ και

$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi, \quad \kappa \in Z.$

Απόδειξη. (α) Από το θεώρημα 3.32 και την πρόταση 3.29 (β) έχουμε ότι

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad \text{και} \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη αυτών των ταυτοτήτων βρίσκουμε τον τύπο για το $\cos z$ και με αφαίρεση κατά μέλη τον τύπο για το $\sin z$.

(β) $$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^z - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4e^{iz}e^{-iz}\right) = 1.$$

(γ) Αποδεικνύουμε τον τύπο για το $\cos(z+w)$ χρησιμοποιώντας (πάλι) τον ισχυρισμό (α) . Έτσι έχουμε

$$4(\cos z\cdot\cos\omega-\sin z\cdot\sin w)=\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)+\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)=$$

$$=2e^{i(z+w)}+2e^{-i(z+w)}=2\left(e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}\right)=4\cos(z+w).$$

Η ταυτότητα για το $\sin(z+w)$ αποδεικνύεται ανάλογα .

Μπορούμε επίσης να την αποδείξουμε διαφορίζοντας την προηγούμενη ταυτότητα π.χ. ως προς z . (Άσκηση).

(δ) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ισχυρισμό (α) και το θεώρημα 3.33

$$\cos z=0\Leftrightarrow\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=0\Leftrightarrow\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)e^{iz}=0\Leftrightarrow e^{2iz}+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2iz}=-1=e^{i\pi}\Leftrightarrow 2iz=i\pi+2\kappa\pi i,\quad \kappa\in Z\Leftrightarrow z\in\left\{\frac{\pi}{2}+\kappa\pi:\kappa\in Z\right\}.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι οι ρίζες της εξίσωσης $\sin z=0$ είναι το σύνολο $\{\kappa\pi:\kappa\in \mathrm{Z}\}$.

…………………………………………………

<u>Παρατήρηση 3.35</u>

Όπως στην τριγωνομετρία , ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις , εφαπτομένη , συνεφαπτομένη , τέμνουσα και συντέμνουσα με τους τύπους

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad z\in C\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi:n\in Z\right\},$$

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad z\in C\setminus\{n\pi:n\in Z\},$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\quad z\in C\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi:n\in Z\right\},$$

$$\csc z=\frac{1}{\sin z},\quad z\in C\setminus\{n\pi:n\in Z\}.$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις μιγαδικές παραγώγους αυτών των συναρτήσεων και να βρούμε τους επόμενους (γνωστούς από τον Απειροστικό Λογισμό) τύπους :

$$\tan' z=\sec^2 z\qquad\qquad \cot' z=-\csc^2 z.$$

$$sec'z = \sec z \cdot \tan z \qquad\qquad \csc' z = -\csc z \cdot \cot z$$

Εύκολα ελέγχουμε την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

οι $\sin z,\ \cos z,\ \sec z$ και $\csc z$ έχουν περίοδο 2π, και οι $\tan z,\ \cot z$ έχουν περίοδο π.

Αργότερα θα αποδείξουμε την ''Αρχή της ταυτότητας'' για ολόμορφες συναρτήσεις:

Αν $D \subseteq C$ τόπος, $f, g : D \to C$ ολόμορφες και $S \subseteq D$ έχει οριακό σημείο στο D ώστε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in S$, τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in D$.

Μια απλή συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι κάθε αλγεβρική ταυτότητα που ισχύει για τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής ισχύει επίσης και για τις επεκτάσεις τους σε (κατάλληλους) τόπους του C.

Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$$

αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η ταυτότητα αυτή ισχύει για z και w πραγματικούς αριθμούς .

Τελικά οι υπερβολικές συναρτήσεις επεκτείνονται και αυτές ως ολόμορφες συναρτήσεις στο μιγαδικό πεδίο. Έτσι ορίζουμε

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in C$$

Οι υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις , $\tanh z,\ \coth z,\ \sec hz,\ \csc hz$ ορίζονται ανάλογα με τις τριγωνομετρικές λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μόνες ρίζες της εξίσωσης

$$\cosh z = 0 \quad \text{είναι} \quad \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i : n \in Z\right\} \quad \text{και της} \quad \sinh z = 0 \quad \text{είναι} \quad \{n\pi i : n \in Z\}.$$

Έτσι για παράδειγμα έχουμε

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad z \in C \setminus \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i : n \in Z\right\}.$$

Οι ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων είναι συνέπεια των ιδιοτήτων της εκθετικής. Έτσι οι $\cosh z$ και $\sinh z$ έχουν περίοδο $2\pi i$ και ισχύει $\cosh' z = \sinh z$ και $\sinh' z = \cosh z$, $z \in C$. Κατά συνέπεια οι συναρτήσεις αυτές είναι ολόμορφες στο C.

Ανάλογα υπολογίζουμε $\tan h' z = \sec h^2 z$, $\coth' z = -\csc h^2 z$, $\sec h' z = -\sec hz \cdot \tanh z$, και $\csc h' z = -\csc hz \cdot \coth z$.

Επίσης εύκολα μπορούμε να εξακριβώσουμε τις ακόλουθες ιδιότητες

(α) $\cosh z = \cos iz$.

(β) $\sinh z = -i \sin iz$.

(γ) $\sin\left(x+iy\right) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

(δ) $\cos\left(x+iy\right) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

Παρατηρούμε ότι από τις (γ) και (δ) συνάγουμε την μορφή των πραγματικών και φανταστικών μερών των συναρτήσεων $\sin z$ και $\cos z$.

Οι ιδιότητες (α) – (δ) και όσες από τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων δεν αποδείχτηκαν αφήνονται ως άσκηση.

…………………………………….

Συνεχίζουμε με δύο ακόμη απλές αλλά χρήσιμες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης.

(1) $\overline{\left(e^z\right)} = e^{\bar{z}}$. (Πράγματι αν $z = x + iy$ τότε ,
$\overline{\left(e^z\right)} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = e^x \cdot \overline{e^{iy}} = e^x\left(\cos y - i \sin y\right) = e^x \cdot e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$.)

(2) $e^z \neq 0$ για κάθε $z \in C$. (Έστω $z = x + iy$ τότε , $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ άρα
$\left|e^z\right| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = e^x \cdot \left|e^{iy}\right| = e^x > 0$.)

Ειδικότερα η δεύτερη ιδιότητα ισχυροποιείται με τον ακόλουθο τρόπο.

<u>Πρόταση 3.36</u>

Η εκθετική συνάρτηση παίρνει όλες τις μιγαδικές τιμές εκτός της τιμής 0. Δηλαδή ισχύει
(θέτοντας $\exp\left(z\right) = e^z$) $\qquad \exp\left(C\right) = C \setminus \left\{0\right\}$.

Απόδειξη. Έστω $\omega \in C$ με $\omega \neq 0$. Θέλουμε να επιλύσουμε ως προς z την εξίσωση $e^z = \omega$. Γράφουμε τον ω σε τριγωνομετρική μορφή

$$\omega = \left|\omega\right| \cdot e^{i\theta}$$

όπου θ ένα όρισμα του ω , π.χ. $\theta = \arg\left(\omega\right)$. Επειδή $\left|\omega\right| = e^{\log\left|\omega\right|}$, ο ω γράφεται

$$\omega = e^{\log\left|\omega\right|} e^{i\theta} = e^{\log\left|\omega\right| + i\theta} .$$

Άρα
$$e^z = e^{\log\left|\omega\right| + i\theta} .$$

Από το θεώρημα 3.33 (περιοδικότητα της εκθετικής) έπεται ότι οι λύσεις της $e^z = \omega$ είναι οι

$$z = \log|\omega| + i\theta + 2\kappa\pi i = \log|\omega| + i(\theta + 2\kappa\pi), \quad \kappa \in \mathrm{Z}$$

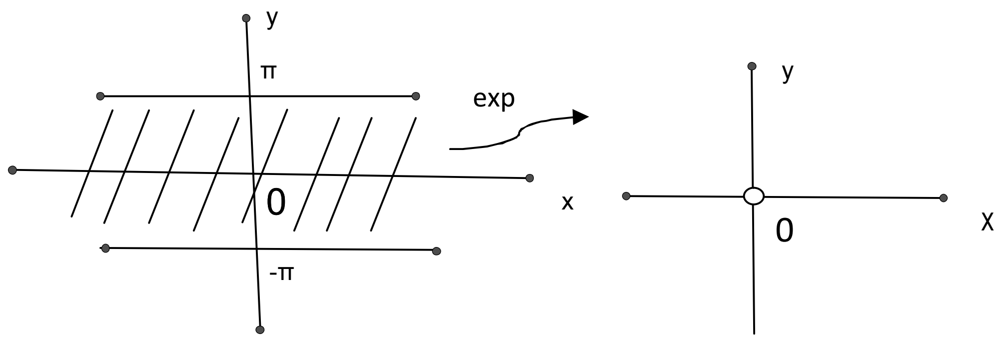
και βέβαια οι αριθμοί $\theta + 2\kappa\pi, \ \kappa \in Z$ είναι όλα τα δυνατά ορίσματα του ω .

……………………………………………

<u>Παρατήρηση 3.37</u>

Είναι σκόπιμο να εξετάσουμε την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης πιο προσεκτικά. Έτσι παρατηρούμε ότι ο μιγαδικός $\omega \neq 0$ έχει μοναδικό όρισμα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (το κύριο όρισμα , $\theta = \arg(\omega)$). Από αυτή την παρατήρηση έπεται εύκολα ότι η εξίσωση $e^z = \omega$ έχει μοναδική λύση $z = x + i\theta$ στην ''ταινία '' $D_\pi = R \times (-\pi, \pi]$ με $x = \log|\omega|$ και $\theta = \arg(\omega)$. Έπεται προφανώς ότι η εκθετική περιορισμένη στο D_π γίνεται $1-1$ και επιπλέον λαμβάνει όλες τις τιμές της, δηλαδή $\exp(D_\pi) = C \setminus \{0\}$.

Περαιτέρω σημειώνουμε ότι τα ίδια ισχύουν αν περιορίσουμε την εκθετική σε υποσύνολα του C της μορφής $D = R \times \mathrm{I}$ όπου I ημιανοικτό διάστημα του R μήκους 2π , π.χ. $\mathrm{I} = (\alpha - 2\pi, \alpha]$ ή $\mathrm{I} = [\alpha - 2\pi, \alpha)$, όπου $\alpha \in R$. Έτσι έχουμε $\exp|_D$ είναι $1-1$ συνάρτηση και $\exp(D) = C \setminus \{0\}$.



Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για να ορίσουμε την έννοια του ''μιγαδικού λογάριθμου'' οφείλουμε να περιορίσουμε την εκθετική συνάρτηση σε υποσύνολα του C (όπως αυτά που περιγράφονται στην παρατήρηση 3.37) στα οποία είναι $1-1$ και λαμβάνει όλες τις τιμές της. Για τους σκοπούς μας θα επιλέξουμε το $D_\pi = R \times (-\pi, \pi]$.

<u>Ορισμός 3.38</u>

Για κάθε $z \in C$ με $z \neq 0$, θέτουμε

$$\log z = \log|z| + i\arg(z)$$

Όπου $\arg(z)$ είναι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z.

Η κατ΄ αυτόν τον τρόπο ορισμένη συνάρτηση $\log : C\setminus\{0\} \to C$ ονομάζεται πρωτεύων ή κύριος κλάδος του λογαρίθμου.

Είναι σαφές ότι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι $1-1$ συνάρτηση και $\log\left(C\setminus\{0\}\right) = D_\pi \quad \left(= R\times(-\pi,\pi]\right)$, με αντίστροφη συνάρτηση την $\exp\big|_{D_\pi}$.

Επομένως $\qquad e^{\log\omega} = \omega \qquad$ και $\qquad \log e^z = z$

για $\omega \neq 0$ και $\qquad z \in D_\pi \Leftrightarrow \operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi]$.

Παρατηρούμε ότι αν z θετικός πραγματικός αριθμός τότε $\arg(z) = 0$ και συνεπώς ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου επεκτείνει τον πραγματικό λογάριθμο

$$x \in (0,+\infty) \mapsto \log x \in R.$$

Παραδείγματα 3.39

1) Να υπολογισθούν οι $\log(-2),\ \log(i),\ \log(-1)$
2) Δείξτε ότι, $\log\left[i(-1+i)\right] \neq \log i + \log(-1+i)$ και $\log(-1)^2 \neq 2\log(-1)$.
3) Να λυθεί η εξίσωση $e^z = -2$.

Λύση. 1) $|-2| = 2$ και $\arg(-2) = \pi$ άρα $\log(-2) = \log 2 + i\pi$

$|i| = 1$ και $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$, άρα $\log i = \log 1 + i\dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{\pi}{2}$

$|-1| = 1$ και $\arg(-1) = \pi$ άρα $\log(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi$.

2) $i(-1+i) = -1-i,\ |-1-i| = \sqrt{2}$ και $\arg(-1-i) = -3\dfrac{\pi}{4}$ επομένως

$$\log\left[i(-1+i)\right] = \log\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}.$$

Επίσης έχουμε $|-1+i| = \sqrt{2},\ \arg(-1+i) = \dfrac{3\pi}{4}$ και έτσι $\log(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\dfrac{3\pi}{4}$.

Ακόμη $\log i = i\dfrac{\pi}{2}$ και συνεπώς $\log(-1+i) + \log i = \log\sqrt{2} + i\left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Συγκρίνοντας τις τιμές που βρήκαμε έχουμε το συμπέρασμα.

Όσον αφορά την σχέση $\log(-1)^2 \neq 2\log(-1)$, παρατηρούμε ότι $\log(-1)^2 = \log 1 = 0$ ενώ $2\log(-1) = i\pi$. Επομένως , δεν έχουμε ισότητα.

Σημειώνουμε ότι: αν $-\pi < \arg(z) + \arg(\omega) \leq \pi$ τότε ισχύει

$$\log(z\omega) = \log z + \log \omega \text{ (Άσκηση).}$$

3) Η εξίσωση $e^z = -2$ επιλύεται εφόσον $-2 \neq 0$ (πρβλ. την πρόταση 3.36) . Έτσι έχουμε

$e^z = -2 \Leftrightarrow e^z = |-2| e^{i\theta}$, όπου $\theta = \arg(-2) = \pi$. Άρα $e^z = e^{\log 2} \cdot e^{i\pi} = e^{\log 2 + i\pi}$

$$\Leftrightarrow z = \log 2 + i\pi + 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathrm{Z}.$$

…………………………………………………

<u>Σημείωση</u> . Όπως προκύπτει από την πρόταση 3.36 και τον ορισμό του κύριου κλάδου του λογαρίθμου οι λύσεις της εξίσωσης $e^z = \omega$, όπου $\omega \in C$ με $\omega \neq 0$ είναι οι

$$z = \log \omega + 2\kappa\pi i, \quad \kappa \in Z$$

όπου $\log \omega = \log|\omega| + i\arg(\omega)$. Οι λύσεις αυτές είναι και το σύνολο των τιμών της πλειονότιμης συνάρτησης μιγαδικός λογάριθμος . Η κύρια τιμή $\log|\omega| + i\arg(\omega)$ λαμβάνεται για $\kappa = 0$.

…………………………………………………

Η συνάρτηση $\log z = \log|z| + i\arg(z), \quad z \neq 0$, είναι βέβαια συνεχής εκεί όπου η συνάρτηση $\arg$ είναι συνεχής (η συνάρτηση $\log|z|$ είναι προφανώς συνεχής σε κάθε $z \neq 0$). Έτσι θα εξετάσουμε την συνέχεια της $\arg$ και θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του τόπου $C_\pi \underset{o\rho}{=} C \setminus \{x \in R : x \leq 0\}$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα $\{t \in R : t < 0\}$.

<u>Πρόταση 3.40</u>

Η συνάρτηση πρωτεύον όρισμα

$$z \in C \setminus \{0\} \mapsto \arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

(α) είναι συνεχής στον τόπο $C_\pi = C \setminus \{t \in R : t \leq 0\}$ και (β) πουθενά συνεχής στο σύνολο $\{t \in R : t < 0\}$.

Απόδειξη. Γεωμετρικά πρέπει να είναι σαφές ότι η συνάρτηση $\arg$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β). Για μια αναλυτική απόδειξη παρατηρούμε ότι :

Αν $z = x + iy \neq 0$ τότε:

(α) $$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \quad \kappa\alpha\iota \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}.$$

Όπου με $\arctan$ συμβολίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης εφαπτομένη περιορισμένης στο ανοικτό διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$x \in R \quad \text{και} \quad \arctan x = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = x \quad \text{και} \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Η συνέχεια της $\arg$ στα σημεία του τόπου C_π έπεται τώρα από την συνέχεια της συνάρτησης $\arctan$ στο καθένα από τα σύνολα $D_1 = \{x + iy : x > 0\}$,

$$D_2 = \left\{x + iy : x < 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad y \geq 0\right\} \quad \text{και} \quad D_3 = \left\{x + iy : x < 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad y < 0\right\}.$$

(β) Έστω $x < 0$. Θα αποδείξουμε ότι η $\arg$ δεν είναι συνεχής στο x. Έστω $z_n = x + \dfrac{1}{n} i$ και $\omega_n = x - \dfrac{1}{n} i, \quad n \geq 1$.

Τότε $\lim z_n = \lim \omega_n = x$, όμως $\lim \arg(z_n) = \pi$ και $\lim \arg(\omega_n) = -\pi$, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη.

....

<u>**Παρατήρηση 3.40.1**</u>

Έπεται από την προηγούμενη πρόταση ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi: C\setminus\{0\}\to C$ ώστε $\varphi(z)=\log z$, για $z\in C_\pi$. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει συνεχής επέκταση του περιορισμού $\log|_{C_\pi}$ στον τόπο $C\setminus\{0\}$. (Δώστε τις λεπτομέρειες και πρβλ. την άσκηση 24 αυτού του κεφαλαίου.)

<u>**Θεώρημα 3.41**</u>

Η συνάρτηση πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου είναι ολόμορφη στον τόπο $C_\pi = C\setminus\{t\in R: t\le 0\}$ και ισχύει $\log' z=\dfrac{1}{z},\quad z\in C_\pi$.

Επίσης ισχύει $$\log(C_\pi)=R\times(-\pi,\pi).$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 2.11.

Από την προηγούμενη πρόταση η συνάρτηση $\log$ είναι συνεχής στον C_π, αφού η $\arg$ είναι συνεχής στον C_π. Η εκθετική συνάρτηση είναι ολόμορφη στο C και

$$\exp'(z)=\exp(z)\neq 0 \text{ για κάθε } z\in C$$

$$C_\pi \xrightarrow{\log} C \xrightarrow{\exp} C\setminus\{0\}.$$

Επίσης ισχύει , $$\exp(\log z)=e^{\log|z|+i\arg(z)}=|z|\cdot e^{i\arg(z)}=z,\quad z\in C_\pi \quad .$$

Από το θεώρημα 2.11 έπεται ότι η $\log$ είναι ολόμορφη στον C_π και ισχύει

$$\log' z=\frac{1}{\exp'(\log z)}=\frac{1}{\exp(\log z)}=\frac{1}{z},\quad z\in C_\pi.$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι προφανής.

<u>Σημείωση.</u> Για μια δεύτερη απόδειξη των ιδιοτήτων των συναρτήσεων $\arg(z)$ και $\log(z)$, δες τις ασκήσεις 31 και 32.

……………………………………………

Από τον Απειροστικό Λογισμό είναι γνωστό ότι

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad |x|<1,\quad x\in R.$$

Όπως είναι αναμενόμενο στον τύπο αυτό μπορούμε να θέσουμε όπου $x \in R$, $z \in C$ με $|z| < 1$.

<u>Πρόταση 3.42</u>

Ισχύει ότι $$\log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \quad |z| < 1.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι αν $|z| < 1$ τότε $\mathrm{Re}(1+z) > 0$ και συνεπώς $1+z \in C_\pi$.

Θέτουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ και έχουμε

$$\limsup \sqrt[n+1]{\left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right|} = \lim \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n+1]{n+1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς είναι $R = 1$. (Πρβλ. και τις παρατηρήσεις στην αρχή της παραγράφου 3.3.)

Επίσης έχουμε ότι αν $|z| < 1$ τότε

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \text{(θέτοντας } \omega = -z \text{)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n = \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{1+z}.$$

Ακόμη παρατηρούμε ότι $$\log'(1+z) = \frac{1}{1+z}, \quad |z| < 1 .$$

Έπεται ότι οι $\log(1+z)$ και $f(z)$, $|z| < 1$ έχουν την ίδια παράγωγο στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $D = \{z \in C : |z| < 1\}$.

Επειδή ο δίσκος D είναι τόπος, συμπεραίνουμε από το θεώρημα 2.9 ότι οι $\log(1+z)$ και $f(z)$, $z \in D$ διαφέρουν κατά μια σταθερά. Όμως $\log(1+0) = 0$ και $f(0) = 0$ άρα η σταθερά ισούται με μηδέν και έτσι συμπεραίνουμε ότι $\log(1+z) = f(z)$, $z \in D$,

δηλαδή την αποδεικτέα σχέση.

....

Η έννοια '' μιγαδικός λογάριθμος '' επιτρέπει να ορίσουμε και την έννοια της δύναμης με βάση και εκθέτη μιγαδικούς αριθμούς.

<u>Ορισμός 3.43</u>

Έστω $z \neq 0, \quad z \in C$ και $\lambda \in C$. Θέτουμε

$$z^{\lambda} = e^{\lambda \log z} \left(= \exp\left(\lambda \log z\right)\right).$$

Η κατά αυτόν τον τρόπο ορισμένη συνάρτηση $z \in C \setminus \{0\} \to z^{\lambda} \in C$ ονομάζεται ο **<u>κύριος κλάδος</u>** της $\lambda -$ δύναμης .

Είναι σαφές ότι η συνάρτηση z^{λ} είναι ολόμορφη στον τόπο C_{π}.

<u>Παραδείγματα 3.44</u>

1) $i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ (i^i = πραγματικός αριθμός !).

2) $\left(-1\right)^i = e^{i \log(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.

3) $2^{3i} = e^{3i \log 2} = e^{i \log 2^3} = e^{i \log 8} = \cos\left(\log 8\right) + i \sin\left(\log 8\right)$

4) $$\left(1+i\right)^{1-i} = \exp\left[\left(1-i\right)\log\left(1+i\right)\right] = \exp\left[\left(1-i\right)\left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right] = \exp\left(\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= e^{\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}\right)\right].$$

<u>Παρατηρήσεις 3.44.1</u>

1) Αν $n \in N$ και $z \neq 0$, τότε η ποσότητα $e^{n \log z}$ όπως ορίσθηκε παραπάνω (ορισμός 3.43) συμπίπτει με το γινόμενο $z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$, ($n -$ παράγοντες) το οποίο ήδη συμβολίζουμε με z^n.

Πράγματι $\quad e^{n \log z} = e^{\log z} \cdot \ldots \cdot e^{\log z} = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = z^n$.

Από τον ορισμό 3.43 έπεται εύκολα ότι $z^{-\lambda} = \dfrac{1}{z^{\lambda}}$. Ιδιαίτερα αν n θετικός ακέραιος τότε $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, άρα η ποσότητα z^{λ} που ορίζεται στον ορισμό 3.43 για $\lambda = -n$, συμπίπτει με την ποσότητα $\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{z}$, (n παράγοντες).

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι αν $z \neq 0$ και $z = |z| \cdot e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, ($\theta = \arg(z)$) και $n \in N$ τότε η ποσότητα $z^{\frac{1}{n}}$ σύμφωνα με τον ορισμό 3.43 ταυτίζεται με την $\sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$.

Η ποσότητα $z^{\frac{1}{n}}$ συμβολίζεται και με $\sqrt[n]{z}$ (πρβλ. την παρατήρηση 1.17.1).

2) Αν $a \in C$, $a \neq 0$, πρέπει να είναι σαφές ότι η συνάρτηση $z \mapsto a^z = e^{z \log a}$ είναι ολόμορφη στο C και $(a^z)' = \log a \cdot a^z$.

3) Έστω $\lambda, \mu \in C$ και $z \in C$ με $z \neq 0$. Τότε $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda \cdot z^\mu$.

Πράγματι , $z^{\lambda+\mu} = \exp\left[(\lambda+\mu)\log z\right] = \exp(\lambda \cdot \log z) \cdot \exp(\mu \cdot \log z) = z^\lambda \cdot z^\mu$

4) Σημειώνουμε ότι γενικά έχουμε , $\log e^z \neq z$, $\left(z^\lambda\right)^\mu \neq z^{\lambda\mu}$ και $(z\omega)^\lambda \neq z^\lambda \cdot \omega^\lambda$.

(Περιγράψτε κατάλληλα παραδείγματα .) Ισότητα στην πρώτη περίπτωση έχουμε όταν $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$, στην δεύτερη αν $\operatorname{Im}(\lambda \log z) \in (-\pi, \pi]$ και στην τρίτη περίπτωση αν

$$-\pi < \arg(z) + \arg(\omega) \leq \pi .$$ (Άσκηση)

Η συνάρτηση $g(z) = z^\lambda$, είναι όπως ήδη παρατηρήσαμε ολόμορφη στο τόπο C_π, μάλιστα

$$g'(z) = \lambda z^{\lambda-1}, \quad z \in C_\pi .$$

Πράγματι $g'(z) = \left(e^{\lambda \log z}\right)' = g(z) \cdot \lambda (\log z)' = g(z) \cdot \dfrac{\lambda}{z} =$

$$= \lambda \frac{e^{\lambda \log z}}{e^{\log z}} = \lambda e^{(\lambda-1)\log z} = \lambda z^{\lambda-1} .$$

Βέβαια αν $\lambda \in N$, τότε η g είναι ολόμορφη στο C και αν λ αρνητικός ακέραιος τότε είναι ολόμορφη στον τόπο $C \setminus \{0\}$.

Αν $\lambda \in C \setminus Z$, τότε κάθε σημείο της του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα είναι σημείο ασυνέχειας της g. (Δες την άσκηση 36.)

Έπεται από ό,τι προηγήθηκε, ότι η συνάρτηση $f(z) = (1+z)^\lambda$ είναι ολόμορφη στον τόπο

$$-1 + C_\pi = \{z - 1 : z \in C_\pi\} = C \setminus \{t \in R : t \leq -1\}$$

και βέβαια $f'(z) = \lambda (1+z)^{\lambda-1}, \quad z \in C \setminus \{t \in R : t \leq -1\}$.

<u>Θεώρημα 3.45</u> (Τύπος των Newton – Abel)

Για κάθε $\lambda \in C$ και κάθε $|z|<1$ ισχύει

$$(1+z)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^n = 1+\lambda z+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}z^2+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}z^3+...$$

Απόδειξη. Πρέπει να είναι σαφές ότι έχουμε θέσει

$$\binom{\lambda}{n}=\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!} \quad \text{για } n\in N \text{ και } \binom{\lambda}{0}=1.$$

Επίσης θέτουμε $$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}z^n .$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ανωτέρω δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$, αν $\lambda \in N\cup\{0\}$ και $R=1$, αν $\lambda\in C\setminus\{N\cup\{0\}\}$.

Πράγματι στην πρώτη περίπτωση η δυναμοσειρά συμπίπτει με το πολυώνυμο

$$g(z)=1+\lambda z+\binom{\lambda}{2}z^2+...+\binom{\lambda}{\lambda-1}z^{\lambda-1}+z^{\lambda}$$

και συνεπώς $R=+\infty$.

Αν $\lambda\in C\setminus\{N\cup\{0\}\}$, θέτουμε $c_n=\binom{\lambda}{n}$, $n\geq 0$ και παρατηρούμε ότι $c_n\neq 0$ για κάθε $n\geq 0$.

Επίσης έχουμε

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)(\lambda-n)}=\frac{n+1}{\lambda-n}.$$

Άρα $\lim\frac{c_n}{c_{n+1}}=\lim\frac{n+1}{\lambda-n}=1$. Από όπου έπεται ότι $R=1$. (πρβλ. την πρόταση 3.19)

Έπεται ότι σε κάθε περίπτωση η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\Delta(0,1)$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $g'(z)=\frac{\lambda}{1+z}g(z),\ \ |z|<1$ (1).

Πράγματι , από το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών

Έχουμε $$g'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\binom{\lambda}{n} z^{n-1}=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n} z^{n}, \qquad |z|<1 .$$

Έπεται ότι για να αποδείξουμε την (1) αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(1+z)\left[\lambda\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n} z^{n}\right]=\lambda\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^{n}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n} z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n} z^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^{n}$$

ή ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n} z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda-1}{n-1} z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^{n} .$$

Όμως η τελευταία σχέση έπεται από το ότι (όπως εύκολα αποδεικνύεται) ισχύει η ταυτότητα

$$\binom{\lambda-1}{n}+\binom{\lambda-1}{n-1}=\binom{\lambda}{n}, \quad n\geq 1 .$$

Θέτουμε τώρα $$h(z)=\frac{g(z)}{f(z)}=\frac{g(z)}{(1+z)^{\lambda}}, \quad |z|<1 .$$

Από την (1) έπεται ότι $h'(z)=0, \quad |z|<1$, συνεπώς η h είναι σταθερή συνάρτηση στον δίσκο $|z|<1$. Έτσι έχουμε ότι για $|z|<1$ είναι $h(z)=h(0)=1$ και άρα ο προς απόδειξη τύπος του θεωρήματος ισχύει.

……………………………………………………

<u>Παρατηρήσεις 3.46</u>

1) Αν $\lambda\in R$ τότε βέβαια ο τύπος (του Abel) $(1+z)^{\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} z^{n}, \ |z|<1, \ z\in C$ είναι επέκταση του γνωστού από τον Απειροστικό τύπου (του Newton) ,

$$(1+x)^{\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n} x^{n}, \ |x|<1, \ x\in R .$$

2) Το θεώρημα 3.45 μπορεί να αποδειχθεί συντομότερα αν χρησιμοποιήσουμε το σημαντικό αποτέλεσμα ότι μια ολόμορφη συνάρτηση f σε ένα ανοικτό σύνολο Ω είναι αναλυτική. (Πρβλ. τον ορισμό 3.25 και τις παρατηρήσεις μετά το θεώρημα 3.26 .).

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$: $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$, έπεται ότι υπάρχει δυναμοσειρά κέντρου a και ακτίνας σύγκλισης $\geq r$ ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r.$$

Πράγματι η $f(z) = (1+z)^{\lambda}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\Omega = C \setminus \{t \in R : t \leq -1\}$ και βέβαια $\Delta(0,1) \subseteq \Omega$. Επομένως υπάρχει δυναμοσειρά κέντρου 0 ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1.$$

Παρατηρούμε ότι $f'(z) = \lambda(1+z)^{\lambda-1}$, $f''(z) = \lambda(\lambda-1)(1+z)^{\lambda-2}$ και με επαγωγή

$$f^{(n)}(z) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)(1+z)^{\lambda-n}, \quad z \in \Omega, \quad n \geq 0.$$

Έπεται ότι ,
$$f^{(n)}(0) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1), \quad n \geq 0.$$

Άρα
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} = \binom{\lambda}{n}, \quad n \geq 0.$$

<u>Παράδειγμα</u> <u>3.47</u> .

Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\binom{i}{n}(i-1)^n$.

Παρατηρούμε ότι, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\binom{i}{n}(i-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{i}{n}\left(\frac{i-1}{2}\right)^n$ και ακόμη ότι αν $\omega = \dfrac{i-1}{2}$ τότε

$$|\omega| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι το ανάπτυγμα του

$$(1+\omega)^i = \left(1 + \frac{i-1}{2}\right)^i = \left(\frac{1+i}{2}\right)^i = e^{i\log\left(\frac{1+i}{2}\right)}.$$

Έτσι υπολογίζουμε

$$\log\left(\frac{1+i}{2}\right)=\log\left|\frac{1+i}{2}\right|+i\arg\left(\frac{1+i}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\pi}{4}$$

και (κατά συνέπεια)

$$(1+\omega)^i=e^{i\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\log\frac{\sqrt{2}}{2}}=e^{-\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

<u>Τελικές παρατηρήσεις 3.48</u>.

Είναι σκόπιμο να εξετάσουμε από γενικότερη σκοπιά το όρισμα και τον μιγαδικό λογάριθμο. Ας εξετάσουμε πρώτα με περισσότερη προσοχή την τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού $z=|z|e^{i\theta}$ (με $z\neq 0$). Η τιμή $r=|z|$ είναι μοναδική , όμως υπάρχουν (όπως έχουμε παρατηρήσει στο κεφ. 1) άπειρες τιμές για το θ , οι οποίες διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Έπεται ότι κάθε ημιανοικτό διάστημα I του R μήκους 2π περιέχει ακριβώς μια τιμή θ ώστε $z=|z|e^{i\theta}$. (Αν $I=(-\pi,\pi]$ τότε βέβαια $\theta=\arg(z)$.)

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση

$$\varphi: z\in C\setminus\{0\}\mapsto\theta\in I .$$

Το I (ως ημιανοικτό διάστημα μήκους 2π) θα είναι είτε μορφής $(a-2\pi,a]$ ή $[a-2\pi,a)$ για κάποιο $a\in R$.

Θεωρούμε την ημιευθεία

$$R_a=\{r\cdot e^{ia}: r\geq 0\}$$

και θέτουμε

$$C_a=C\setminus R_a .$$

Προφανώς το σύνολο C_a είναι τόπος στο C .

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση φ που ορίσθηκε πριν είναι συνεχής στον τόπο C_a και ασυνεχής σε κάθε σημείο της ημιευθείας $\{r\cdot e^{ia}: r>0\}$. Ο περιορισμός της φ επί του C_a συμβολίζεται με $\arg_\alpha$ και έχουμε για ένα $z\neq 0$

$$z\in C_a \text{ και } \arg_a(z)=\theta \Leftrightarrow z=|z|\cdot e^{i\theta} \text{ και } \theta\in(a-2\pi,a) .$$

(Στα σημεία της ημιευθείας R_a έχουμε $\varphi\left(re^{ia}\right)=a$, αν $I=\left(a-2\pi,a\right]$ και $\varphi\left(re^{ia}\right)=a-2\pi$, αν $I=\left[a-2\pi,a\right)$.)

Αποδεικνύεται περαιτέρω ότι η συνάρτηση

$$\log_a(z)=\log|z|+i\arg_a(z),\quad z\in C_a$$

είναι ολόμορφη και

$$\log'_a(z)=\frac{1}{z},\quad z\in C_a.$$

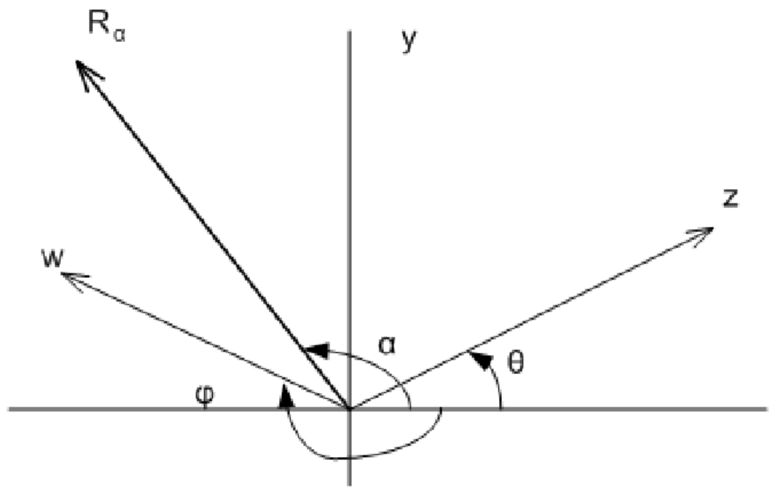
(Αν $a=\pi$ τότε $I^0=(-\pi,\pi)$ και $\log_\pi(z)=\log z$ είναι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου.)

Οι ιδιότητες των $\arg_a(z)$ και $\log_a(z)$ αφήνονται ως άσκηση.

Έτσι έχουμε ορίσει ‘ κλάδους ‘ του λογαρίθμου σε κάθε τόπο της μορφής $C\setminus\left\{r\cdot e^{ia}:r\geq 0\right\}$ όπου $a\in R$. Οι κλάδοι αυτοί του λογαρίθμου είναι χρήσιμοι για τον υπολογισμό

(αλλά και την απόδειξη των ιδιοτήτων) του δείκτη στροφής που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο (πρβλ. την παρατήρηση 4.39 (1) και το παράδειγμα 4.40 (2).)

Στο κατωτέρω σχήμα ερμηνεύεται γεωμετρικά η συνάρτηση $\arg_a$.



$$\theta=\arg_a(z)\quad\text{και}\quad\varphi=\arg_a(w).$$

Ειδικότερα , αν $a=2\pi$, τότε το όρισμα $\arg_{2\pi}$ παίρνει τιμές στο $\left[0,2\pi\right)$ και έχουμε τον κλάδο του λογαρίθμου $\log_{2\pi}(z)=\log|z|+i\arg_{2\pi}(z)$ ο οποίος περιορισμένος στον τόπο $C_0=C\setminus\{t\in R: t\geq 0\}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση με $\log'_{2\pi}(z)=\frac{1}{z},\ \ z\in C_0$.

(Οι ιδιότητες των $\arg_a(z)$ και $\log_a(z)$ αφήνονται ως ασκήσεις. Δες επίσης και την άσκηση 37.)

Ασκήσεις

1) Αν η σειρά μιγαδικών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\left|\arg(a_n)\right|\leq\theta<\frac{\pi}{2},\ \ n\geq 1$, αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$

2) Έστω $(a_n)\subseteq C$ ώστε $\operatorname{Re}a_n\geq 0$, για $n\geq 1$. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνουν , αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<+\infty$. Ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty$;

3) Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$, (δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)^2 z^n$, (ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$

(στ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{n!}$, (ζ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+3}(z-i)^{2n+1}$, (η) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3-2i)^n}{n!}$, (θ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^{\frac{1}{3}}}(z-2i)^n$,

(ι) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} i^n (z-2)^n$.

4) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης των ακόλουθων δυναμοσειρών . Σε κάθε περίπτωση εντοπίστε , αν υπάρχουν , σημεία στον κύκλο σύγκλισης $|z-a|=R$ όπου η σειρά συγκλίνει και σημεία όπου αποκλίνει.

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}z^n$, (β) $\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}(z-i)^n$, (γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}(z+2i)^n$, (δ) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$.

5) Αποδείξτε ότι αν $\left|z-1\right|<1$ τότε $\dfrac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\left(z-1\right)^{n}$. Χρησιμοποιείστε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z^{2}}$ σε δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta\left(1,1\right)$.

6) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το $a=0$ την συνάρτηση $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z+1\right)\left(z+2\right)}$.

Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς .

[<u>Υπόδειξη:</u> $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{1-\left(-z\right)}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{z}{2}\right)}$.]

7) Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(z-4\right)^{n}$ να συγκλίνει για $z=-1$ και να αποκλίνει για $z=0$;

8) Αν $\left|a_{n}\right|\le n,\quad n\ge 1$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$ είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(0,1)$ και ικανοποιεί την ανισότητα

$$\left|f\left(z\right)\right|\le\frac{|z|}{\left(1-\left|z\right|\right)^{2}},\quad \text{για } \left|z\right|<1.$$

[<u>Υπόδειξη:</u> $|f(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n}|\cdot|z|^{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}n\,|z|^{n}$ και αν $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n}$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty}n\,z^{n}=z\cdot g'(z),\quad |z|<1$.]

9) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{n}$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R\ge 0$.

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\left|a_{n}\right|\le\delta$, για $n\ge 0$ (δηλαδή , αν η $\left(a_{n}\right)$ είναι φραγμένη) τότε $R\ge 1$.

(β) Αν υπάρχει $\delta>0$ και ένα άπειρο $M\subseteq N$ ώστε $\left|a_{n}\right|\ge\delta$ για κάθε $n\in M$ (δηλαδή , αν η $\left(a_{n}\right)$ δεν είναι μηδενική) τότε $R\le 1$.

10) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδείξτε ότι , αν υπάρχει z_0 με $|z_0-a|=R$ ώστε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0-a)^n$ να συγκλίνει απόλυτα τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε z με $|z-a|=R$.

11) Έστω ότι η δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης:

(α) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$, (β) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\kappa} a_n z^n$, όπου $\kappa \in N$ και (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

Αν $p \neq 0$ είναι μιγαδικό πολυώνυμο τι μπορείτε να πείτε για την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) a_n z^n$;

12) Δώστε ένα παράδειγμα δυναμοσειράς $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$, ώστε η συνάρτηση f να (ορίζεται και) να είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,R)}$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Έστω $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.]

13) Έστω $a,b \in C$. Υποθέτουμε ότι ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος ή το 0. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)} z^n$$

είναι τουλάχιστον 1. Αποδείξτε ότι σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ισχύει $R=+\infty$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Έστω c_n ο συντελεστής του z^n. Αν $a \in Z$ και $a<0$ τότε $c_n=0$, για κάθε $n \geq -a$ και άρα $R=+\infty$. Αν a δεν είναι αρνητικός ακέραιος, τότε $c_n \neq 0$ για $n \geq 1$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο του λόγου.]

14) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ δυναμοσειρές με ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα.

Τι μπορείτε να πείτε για τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$(\alpha) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n \quad \text{και} \quad (\beta) \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n \text{ ;}$$

[<u>Υπόδειξη:</u> (α) $R \geq \min(R_1, R_2)$ και (β) $R \geq R_1R_2$.]

15) Έστω $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in C$ ώστε $|\alpha| < |\beta|$ και $\lambda \neq 0 \neq \mu$. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\alpha^n - \mu\beta^n)z^n \text{ .}$$

[<u>Υπόδειξη:</u> $R = \dfrac{1}{|\beta|}$.]

16) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ και αποδείξτε ότι

$$f''(z) = f(z), \text{ για } |z| < R.$$

17) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(n!)^2}$ και αποδείξτε ότι

$$z^2f''(z) + zf'(z) = 4z^2f(z), \text{ για } |z| < R.$$

18) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{z-a}{a}\right)^{n+1}$, όπου $a \in C,\ a \neq 0$ και αποδείξτε ότι $f(z) = \log\left(\dfrac{z}{a}\right)$, για $z \in \Delta(a, R)$.

19) Αποδείξτε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους.

(α) Κάθε πολυώνυμο $p(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m}a_nz^n$

(β) Οι συναρτήσεις e^z, $\cos z$ και $\sin z$.

(γ) Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{\beta - z}$, $z \neq \beta$, όπου $\beta \in C$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Έστω $a \in C$. Για το (α) γράφουμε $z^n = \left[\left(z-a\right)+a\right]^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} a^{n-\kappa}\left(z-a\right)^{\kappa}$

και άρα $p\left(z\right) = \sum_{n=0}^{m} b_n \left(z-a\right)^n$ για κάποια $b_n \in C$. Για την e^z παρατηρούμε ότι

$e^z = e^a \cdot e^{z-a}$ και άρα $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}\left(z-a\right)^n$. Για την $\cos z$ γράφουμε την ταυτότητα

$\cos z = \cos\left[\left(z-a\right)+a\right] = \cos a \cdot \cos\left(z-a\right) - \sin a \cdot \sin\left(z-a\right)$ και συνεχίζουμε όπως

για την e^z. Για την συνάρτηση $f\left(z\right) = \dfrac{1}{\beta - z}$ υποθέτουμε ότι $a \in C \setminus \left\{\beta\right\}$ και

παρατηρούμε ότι αν $z \in \Delta\left(a, \left|\beta - a\right|\right)$ τότε $\left|\dfrac{z-a}{\beta - a}\right| < 1$ και άρα

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-a}{\beta-a}\right)^n = \dfrac{\beta - a}{\beta - z}$].

20) Αποδείξτε ότι για κάθε $z \in C,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Παρατηρούμε ότι αν $\varphi\left(n\right) = n\log\left(1+\dfrac{z}{n}\right)$ τότε $e^{\varphi(n)} = \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ και ακόμη ότι

$$\varphi\left(n\right) = \frac{\log\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to z \quad \text{καθώς το } n \to +\infty \text{ .]}$$

21) Ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ολόμορφες στο C;

$$z^{\frac{2}{3}},\ i^z,\ \left(\sqrt{3}\right)^z,\ z^{\sqrt{3}},\ \left(-1\right)^z,\ \left(1-i\right)^{z^3},\ \left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(1+2i\right)^{f(z)},$$

όπου $f : C \to C$ ολόμορφη συνάρτηση .

22) Έστω $f\left(z\right) = e^{2\pi i z},\ z \in C$ και $H = \left\{x + iy : y > 0\right\}$ το άνω ημιεπίπεδο . Να βρεθεί η εικόνα $f\left(H\right)$ του H.

[<u>Υπόδειξη:</u> $f\left(H\right) = \left\{z \in C : 0 < \left|z\right| < 1\right\}$.]

23) Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{y\to 0}\left[\log\left(a+iy\right)-\log\left(a-iy\right)\right]$$

όταν $a>0$ και ακόμη όταν $a<0$. (Όπου $\log$ συμβολίζει ως συνήθως τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου.)

24) Έστω $D\subseteq C$ τόπος ώστε $0\notin D$. Μια συνάρτηση $f:D\to C$ λέγεται κλάδος του λογαρίθμου αν είναι συνεχής και $e^{f(z)}=z$ για κάθε $z\in D$. Αποδείξτε ότι :

(α) Αν f κλάδος του λογαρίθμου στον τόπο D, τότε είναι ολόμορφη συνάρτηση και $f'(z)=\dfrac{1}{z},\ \ z\in D$.

(β) Αν f,g είναι κλάδοι του λογαρίθμου στον τόπο D τότε υπάρχει ακέραιος κ ώστε

$g(z)-f(z)=2\kappa\pi i$ για κάθε $z\in D$.

(γ) Δεν υπάρχει κλάδος του λογαρίθμου στον τόπο $C\setminus\{0\}$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Για το (α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα 2.11. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν $h(z)=f(z)-g(z)$ τότε $e^{h(z)}=1$ και άρα η συνάρτηση $h(z)$ παίρνει τιμές στο σύνολο $2\pi iZ$. Για το (γ) παρατηρούμε ότι η ύπαρξη κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $C\setminus\{0\}$ θα σήμαινε ότι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου επεκτείνεται συνεχώς στον $C\setminus\{0\}$ και αυτό δεν ισχύει. (Πρβλ. την πρόταση 3.40 και το θεώρημα 3.41.)]

25) Αποδείξτε ότι : (α) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$, (β) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ και (γ) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z-1}{z}=0$.

26) Αποδείξτε ότι αν $0<|z|<1$ τότε :

(α) $\dfrac{|z|}{4}<\left|e^z-1\right|<\dfrac{7}{4}|z|$ (β) $|\cos z|<2$ και (γ) $|\sin z|<\dfrac{13}{10}|z|$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Για το (α) παρατηρούμε ότι $e=2,718...<2+\dfrac{3}{4}$. Για τα (β) και (γ) χρησιμοποιείστε τις ανισότητες $2^n<(2n)!$ και $2^{2n}<(2n+1)!$.]

27) Αποδείξτε ότι, αν $z=x+iy$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

(α) $|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y=-\cos^2 x+\cosh^2 y$, (β) $|\sin x| \le |\sin z|$,

(γ) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y = -\sin^2 x + \cosh^2 y$,

(δ) $|\cos x| \le |\cos z|$,

(ε) $|\sin z| \le \cosh y$ και $|\sin z| \ge |\sinh y|$,

(στ) $|\cos z| \le \cosh y$ και $|\cos z| \ge |\sinh y|$.

28) Αποδείξτε ότι :

(α) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, (β) $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$,

(γ) $\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z$, (δ) $\sinh\left(i\frac{\pi}{2} - z\right) = i\cosh z$.

29) Αποδείξτε ότι :

(α) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$ (β) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

(γ) $\cos(\pi - z) = -\cos z$ (δ) $\sin(\pi - z) = \sin z$

(ε) $\tan(\pi + z) = \tan z$ (στ) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \tan z$.

30) Αποδείξτε ότι : (α) για $z = x + iy \ne \frac{\pi}{2} + n\pi,\quad n \in Z$,

$$\tan z = \frac{\sin 2x + i\sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

(β) Έχει η εξίσωση $\tan z = z$ πραγματική ρίζα ; Τι μπορείτε να πείτε για την εξίσωση

$z\tan z = 1$;

31) Αποδείξτε για το κύριο όρισμα ότι:

α) Αν $z = x + iy \in C_\pi = C \setminus \{t \in R : t \le 0\}$ τότε

$$\arg(z) = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \ .$$

β) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της $\arg(z)$ και συμπεράνετε ότι είναι C^1 συνάρτηση στον τόπο C_π.

[Υπόδειξη: Για το (α) χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$, όπου $\theta = \arg(z)$.]

32) Αποδείξτε, με απευθείας υπολογισμό, ότι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy – Riemann και συμπεράνατε ότι είναι ολόμορφη συνάρτηση στον C_π.

33) Έστω $f(z) = |z| + i\arg(z), \quad z \in C_\pi$.

α) Αποδείξτε ότι η f είναι C^1 και 1-1 στον τόπο C_π ώστε $f(C_\pi) = D$, όπου $D = (0,+\infty)\times(-\pi,\pi)$. Βρείτε την αντίστροφη $g = f^{-1} : D \to C_\pi$ και αποδείξτε ότι είναι και αυτή C^1.

β) Υπολογίστε τους πίνακες Jacobi των f και g και αποδείξτε ότι είναι αντιστρέψιμος σε κάθε σημείο.

[Υπόδειξη: Η συνάρτηση g είναι ο πολικός μετασχηματισμός

$$g(r,\theta) = r(\cos\theta + i\,r\sin\theta) \ .]$$

34) Έστω $z \in C\setminus\{0\}$ και $\left(z_n\right) \subseteq C$ ώστε $z_n \to z$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\left(k_n\right) \subseteq \{0,1\}$ ώστε

$$\arg(z_n) + 2k_n\pi \to \arg(z) .$$

[Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις $z \in C_\pi$ και $z \in R$ με $z < 0$.]

35) Έστω $\lambda \in C$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(z) = e^{i\lambda\arg(z)}, \quad z \neq 0$. Αποδείξτε ότι:

α) Αν $\lambda \in Z$ τότε η φ είναι συνεχής στο $C\setminus\{0\}$.

β) Αν $\lambda \notin Z$ τότε η φ είναι συνεχής στο C_π και ασυνεχής σε κάθε σημείο $z \in R$ με $z < 0$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Για τον ισχυρισμό (α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την άσκηση 34, είτε να παρατηρήσετε ότι για $\lambda = 1, \quad \varphi(z) = \dfrac{z}{|z|} = e^{i\arg(z)}, \quad z \neq 0.$]

36) Θεωρούμε τον κύριο κλάδο της λ-δύναμης. Δηλαδή τη συνάρτηση $g(z) = z^{\lambda}, \quad z \neq 0$. Αποδείξτε ότι, αν $\lambda \in C \setminus Z$, τότε η g είναι ολόμορφη στον τόπο C_π και ασυνεχής σε κάθε σημείο $z \in R$ με $z < 0$.

[<u>Υπόδειξη:</u> Χρησιμοποιήστε την άσκηση 35 (β).]

37) Έστω για $z \neq 0, \quad \log_{2\pi} z = \log|z| + i\arg_{2\pi}(z)$, όπου $\arg_{2\pi}(z) = \theta \Leftrightarrow z = |z| \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$ και $\theta \in [0, 2\pi)$. (Πρβλ. την 3.48). Αποδείξτε ότι

$$\log_{2\pi} z = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n} + i\pi, \quad z \in \Delta(-1,1).$$

(Ισοδύναμα: $\log_{2\pi}(w-1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{w^n}{n} + i\pi, \quad w \in \Delta(0,1)$.)

[<u>Υπόδειξη:</u> Θέτουμε $f(\mathrm{z}) = \log_{2\pi} z$ και $\mathrm{g(z)} = \dfrac{1}{z}, \quad z \in C_0 = C \setminus \{t \in R : t \geq 0\}$. Τότε $f'(\mathrm{z}) = \mathrm{g(z)}, \quad \mathrm{z} \in \mathrm{C}_0$ και $\mathrm{g}^{(n)}(\mathrm{z}) = (-1)^n \dfrac{n!}{z^{n+1}}, \ z \neq 0, \ n \geq 0$.]

4. Μιγαδική Ολοκλήρωση

Η μιγαδική ολοκλήρωση είναι κεντρικό θέμα ενός εισαγωγικού μαθήματος Μιγαδικής Ανάλυσης. Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι το εργαλείο με το οποίο θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες των ολομόρφων συναρτήσεων. Τις ιδιότητες αυτές θα τις αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ θα εισαγάγουμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, θα συζητήσουμε τις στοιχειώδεις ιδιότητές του όπως και τις στοιχειώδεις ιδιότητες των καμπυλών του επιπέδου, θα ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τη μιγαδική παράγωγο και τέλος θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με τη σημαντική έννοια του δείκτη στροφής καμπύλης.

4.1 Ολοκλήρωση συναρτήσεων της μορφής $f:[a,b]\to\mathbb{C}$.

Ορισμός 4.1 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση ($a,b\in\mathbb{R},\ a<b$). Αν $f=u+iv$ ($u=\operatorname{Re} f,\ v=\operatorname{Im} f$), θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$, αν οι $u\ \kappa\alpha\iota\ v$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Ορίζουμε τότε

$$\int_a^b f(x)dx \underset{o\rho.}{=} \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx .$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\int_a^b f(x)dx$ θα ονομάζεται το ολοκλήρωμα Riemann της f και κάποιες φορές θα συμβολίζεται και ως $\int_a^b f\,dx$.

Στο εξής μια κατά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση θα αναφέρεται ως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι από τον παραπάνω ορισμό, οι βασικές ιδιότητες των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές είναι εύκολη συνέπεια των αντίστοιχων ιδιοτήτων των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων με πραγματικές τιμές και έτσι παρατίθενται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.2 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. (Γενικότερα αν η f είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένο ή ακόμη και αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών, τότε είναι ολοκληρώσιμη.)

<u>Θεώρημα 4.3</u> (Γραμμικότητα του ολοκληρώματος). Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f\, dx + \mu \int_a^b g\, dx \,.$$

<u>Σημείωση</u> Αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Πρόταση 4.4</u> Έστω $c \in [a,b]$ και $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx \,.$$

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα του ολοκληρώματος είναι η λεγόμενη <u>«τριγωνική ανισότητα»</u>.

<u>Θεώρημα 4.5</u> Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η πραγματική συνάρτηση $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\left| \int_a^b f\, dx \right| \le \int_a^b |f|\, dx \,.$$

Απόδειξη. Έστω $f = u + iv$. Πρέπει να είναι σαφές ότι η $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ είναι ολοκληρώσιμη. Για την απόδειξη της ανισότητας θέτουμε

$$\lambda = \frac{\left| \int_a^b f\, dx \right|}{\int_a^b f\, dx} \,.$$

(Υποθέτουμε ότι $\int_a^b f\, dx \neq 0$, διαφορετικά η ανισότητα είναι προφανής.)

Είναι προφανές ότι $|\lambda|=1$. Τότε έχουμε

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \lambda\int_a^b f\,dx = \mathrm{Re}\left[\lambda\int_a^b f\,dx\right] = \mathrm{Re}\left[\int_a^b \lambda f\,dx\right] = \int_a^b \mathrm{Re}(\lambda f)\,dx \le \int_a^b |\lambda f|\,dx = \int_a^b |f|\,dx .$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ $(a<b)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε θέτουμε

$$\int_b^a f\,dx \underset{o\rho.}{=} -\int_a^b f\,dx \ .$$

Θεώρημα 4.6 (Αλλαγής μεταβλητής) Έστω $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε η g' είναι ολοκληρώσιμη (ιδιαίτερα η g' είναι συνεχής στο $[c,d]$). Θέτουμε $I=g([c,d])$. Αν η συνάρτηση $f:I\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt \qquad (g(t)=x)\,.$$

Σημείωση: Η συνάρτηση g του Θεωρ. 4.6 μπορεί να είναι κατά τμήματα C^1.

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, $f=u+iv$ λέγεται ότι είναι διαφορίσιμη στο $t\in[a,b]$ αν και μόνο αν οι u $\kappa\alpha\iota$ v είναι διαφορίσιμες στο t. Τότε ισχύει $f'(t)=u'(t)+iv'(t)$ (Παράβαλε την παρατήρηση 2.8(1) .)

Θεώρημα 4.7 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F:[a,b]\to\mathbb{C}$ με $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$. Τότε:

(α) Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.

(β) Αν η f είναι συνεχής στο $t\in[a,b]$, τότε η F είναι διαφορίσιμη στο t και $F'(t)=f(t)$.

Πόρισμα 4.8 (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, τότε η f έχει παράγουσα στο $[a,b]$. Δηλαδή υπάρχει $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ διαφορίσιμη ώστε $g'=f$. Τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b)-g(a)\,.$$

<u>Παραδείγματα 4.9</u>

1) Η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} e^{\frac{i}{t}}, \ t\neq 0 \\ 0, \ \ t=0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής (μόνο) στο $t=0$, αφού το όριο

$\lim\limits_{t\to 0} e^{\frac{i}{t}}$ δεν υπάρχει (γιατί;). Εν τούτοις είναι φραγμένη και (αφού έχει μόνο ένα σημείο ασυνέχειας) ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές διάστημα $[a,b]\subseteq \mathbb{R}$.

2) $\int\limits_0^{2\pi} e^{\,\text{int}}\, dt = 0$, αν $n\in\mathbb{Z}$ και $n\neq 0$.

Πράγματι, η συνάρτηση $g(t)=\dfrac{e^{\,\text{int}}}{in}, t\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσα της $e^{\,\text{int}}, t\in\mathbb{R}$ αφού $g'(t)=e^{\,\text{int}}, t\in\mathbb{R}$.

Άρα $\int\limits_0^{2\pi} e^{\,\text{int}}\, dt = \left[\dfrac{e^{\,\text{int}}}{in}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{e^{2\pi i n}-1}{in} = 0$.

Αν $n=0$ τότε $e^{\,\text{int}} = e^0 = 1,\ t\in\mathbb{R}$. Άρα $\int\limits_0^{2\pi} e^{\,\text{int}}\, dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

<u>Παρατήρηση 4.10</u> Το ολοκλήρωμα Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ μπορεί να ορισθεί ισοδύναμα -σε αναλογία με τις πραγματικές συναρτήσεις- με τη χρήση ενδιάμεσων αθροισμάτων Riemann: αν $\wp = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$, τότε ένα <u>άθροισμα Riemann</u> της f που ορίζεται από την $\wp$ είναι κάθε άθροισμα της μορφής

$$S(f,\wp)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1}),$$

όπου $x_k \in [t_{k-1}, t_k],\ k=1,2,\ldots,n$ είναι τυχούσα επιλογή ενδιαμέσων σημείων. Επίσης ορίζουμε ως <u>λεπτότητα</u> της $\wp$ τον αριθμό $\|\wp\| = \max\{t_k - t_{k-1} : k=1,2,\ldots,n\}$.

Η f λέγεται ότι είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, αν υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός I ώστε:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0$: $\wp$ διαμέριση του $[a,b]$ και $\|\wp\|\leq\delta$ τότε

$$|S(f,\wp) - I| \leq \varepsilon. \qquad (1)$$

(Εννοείται ότι η (1) ισχύει για όλες τις επιλογές ενδιαμέσων σημείων της $\wp$.)

Ο μιγαδικός αριθμός I συμβολίζεται με $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Έπεται προφανώς από τον ορισμό αυτό του ολοκληρώματος ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. αν είναι συνεχής) και $(\wp_n)$ είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $\|\wp_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\wp_n) = \int_a^b f(x)\,dx \ . \tag{2}$$

Από τη (2) έπεται ιδιαίτερα θεωρώντας τη διαμέριση $\wp_n = \{a < a + \frac{b-a}{n} < \cdots < a + \frac{n-1}{n}(b-a) < b\}$ (δηλ. $t_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0,1,\dots,n$) ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (x_k = t_k,\ k = 1,2,\dots,n) \tag{3}$$

ή $$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (x_k = t_{k-1},\ k = 1,2,\dots,n)\,. \tag{4}$$

Για την καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt$, για το οποίο ήδη γνωρίζουμε ότι ισούται με μηδέν (παράδειγμα 4.9 (2)).

Για κάθε $n \geq 2$ ορίζουμε τη διαμέριση $\wp_n$ του $[0,2\pi]$ η οποία αποτελείται από τα σημεία $t_k^n = \frac{2\pi k}{n},\ k = 0,1,\dots,n$. Επίσης θέτουμε $x_k^n = t_{k-1}^n,\ k = 1,2,\dots,n$. Παρατηρούμε ότι, αν $n \geq 2$ τότε

$$S(f,\wp_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^n)(t_k - t_{k-1}) = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^n) = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \frac{k-1}{n}} =$$

$$= \frac{2\pi}{n}\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + \cdots + e^{2\pi i\frac{n-1}{n}}\right) = \frac{2\pi}{n}\cdot 0 = 0\,,$$

εφόσον το άθροισμα των n-οστών ριζών της μονάδας που εμφανίζεται στην παρένθεση ισούται (ως γνωστόν) με μηδέν. Από τον τύπο (4) έπεται προφανώς το συμπέρασμα.

Σημειώνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{int}}\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,dt + i\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,dt \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$,

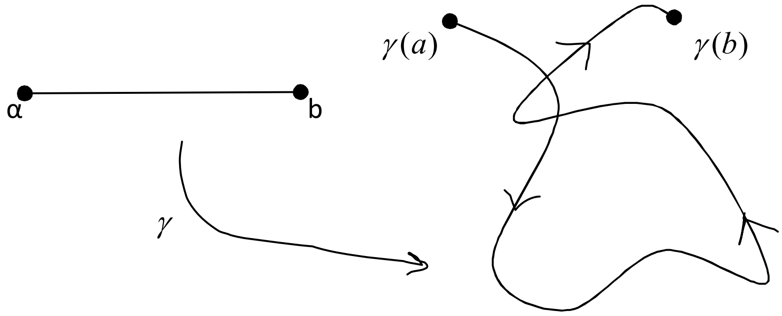
μπορεί να υπολογισθεί παρατηρώντας ότι τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $\cos(nt)$ και $\sin(nt)$ στο $[0,2\pi]$ είναι ίσα με μηδέν.

4.2 Καμπύλες του επιπέδου

Ορισμός 4.11 Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ($a,b\in\mathbb{R},\ a<b$) ονομάζεται καμπύλη του $\mathbb{C}$. Η εικόνα ή ίχνος της γ είναι το σύνολο $[\gamma]=\gamma\big([a,b]\big)$. Το $\gamma(a)$ θα ονομάζεται αρχικό και το $\gamma(b)$ τελικό σημείο της γ.

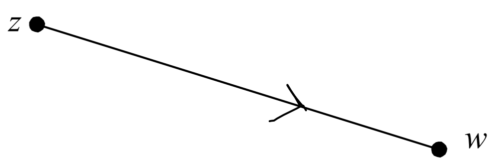
Συνήθως σκεπτόμαστε το t ως τον «χρόνο» ο οποίος αυξάνει από το a στο b και το $\gamma(t)$ ως ένα υλικό σημείο το οποίο διατρέχει την καμπύλη από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$.

Καθώς ο παραπάνω ορισμός είναι πολύ γενικός, επιτρέπει καμπύλες οι οποίες έχουν μεγάλη πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα καμπύλες οι οποίες «γεμίζουν» ένα τετράγωνο, δηλ. $[\gamma]=[0,1]\times[0,1]$ (πρβλ. [Du] σελ. 104). Έτσι απαιτούνται κατάλληλες συνθήκες διαφορισιμότητας επί της γ ώστε να ανταποκρίνεται στη διαίσθησή μας. Αυτές οι συνθήκες θα τεθούν αργότερα σ' αυτή την παράγραφο.



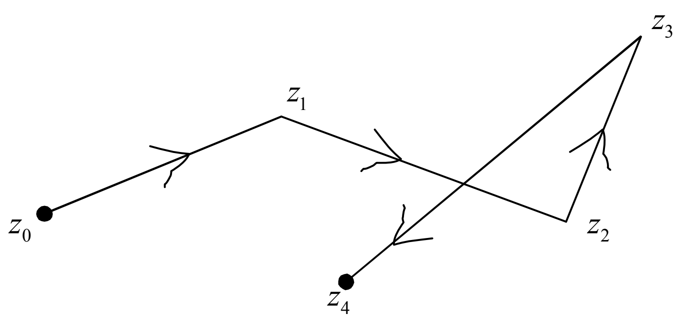
Παραδείγματα 4.12 Τα ακόλουθα παραδείγματα καμπυλών με τις παραμετρήσεις και τις ονομασίες τους θα χρησιμοποιηθούν πολύ συχνά σ' αυτές τις σημειώσεις.

1) Έστω $z,w\in\mathbb{C}$. Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το z στο w, συμβολιζόμενο με $[z,w]$ είναι η καμπύλη $\gamma(t)=(1-t)z+tw,\ t\in[0,1]$. Το ίχνος αυτής της καμπύλης θα συμβολίζεται επίσης με $[z,w]$.



2) Έστω $z_0,z_1,\ldots,z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0,z_1,\ldots,z_n$ είναι η καμπύλη $\gamma:[0,n]\to\mathbb{C}$ ώστε

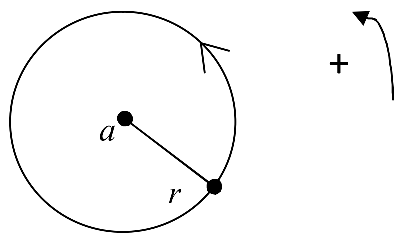
$$\gamma(t)=(k+1-t)z_k+(t-k)z_{k+1},\ \ t\in[k,k+1],\ \ k=0,1,\ldots,n-1.$$



Η καμπύλη αυτή και το ίχνος της θα συμβολίζεται με $[z_0, z_1]+\cdots+[z_{n-1}, z_n]$ ή με $\gamma_0+\gamma_1+\cdots+\gamma_{n-1}$ όπου $\gamma_k=[z_k, z_{k+1}],\ k=0,1,...,n-1$.

3) Η <u>θετικά ή αντιωρολογιακά προσανατολισμένη περιφέρεια</u> κέντρου $a\in\mathbb{C}$ και ακτίνας $r>0$ είναι η καμπύλη

$$\gamma(t)=a+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$$



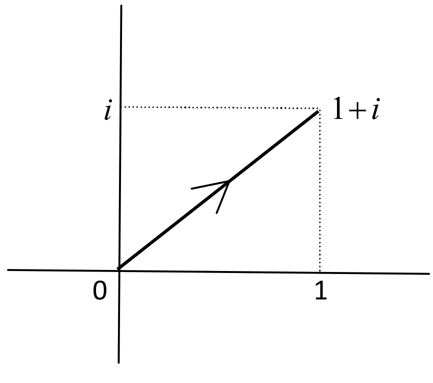
Το ίχνος αυτής της καμπύλης (και η ίδια η καμπύλη) θα συμβολίζεται με $C(a,r)$.

Σημειώνουμε ότι με όρους Μηχανικής τα παραδείγματα (1) και (3) εκφράζουν ευθύγραμμη ομαλή και ομαλή κυκλική κίνηση αντίστοιχα.

Επίσης παρατηρούμε ότι δύο καμπύλες ενδέχεται να έχουν το ίδιο ίχνος (την ίδια γεωμετρική εικόνα) αλλά διαφορετικές παραμετρήσεις. Για παράδειγμα οι καμπύλες

$$\gamma_1(t)=2(t+it),\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \text{ και } \gamma_2(t)=t^2+it^2,\ t\in\left[0,1\right]$$

έχουν ως ίχνος το ευθύγραμμο τμήμα $\{x+ix : x\in[0,1]\}$, αλλά διατρέχονται από τις $\gamma_1(t)$ και $\gamma_2(t)$ με διαφορετικό ρυθμό.



Επίσης οι καμπύλες: $\gamma_1(t)=e^{it},\ t\in[0,4\pi]$, $\gamma_2(t)=e^{2it},\ t\in[0,\pi]$, $\gamma_3(t)=e^{-it},\ t\in[0,2\pi]$ και $\gamma_4(t)=e^{2\pi it},\ t\in[0,1]$ έχουν όλες ως ίχνος τη μοναδιαία περιφέρεια $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$, οι παραμετρήσεις τους όμως διαφέρουν.

Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη. Τότε έχουμε:

(α) Η γ λέγεται κλειστή αν $\gamma(a)=\gamma(b)$.

(β) Η γ λέγεται απλή αν είναι 1-1 συνάρτηση στο $[a,b]$.

(γ) Η γ λέγεται απλή κλειστή καμπύλη αν είναι κλειστή και η γ είναι 1-1 συνάρτηση στο $[a,b)$.

(δ) Η αντίθετη καμπύλη της γ συμβολιζόμενη με $-\gamma$ είναι η καμπύλη $-\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ώστε $-\gamma(t)=\gamma(a+b-t),\ t\in[a,b]$.

Παρατηρούμε ότι καθώς το t αυξάνει από το a στο b, η $-\gamma$ περιγράφει του ίδιου ίχνους καμπύλη ($[\gamma]=[-\gamma]$) αλλά με την αντίθετη φορά.

Τα ακόλουθα παραδείγματα διευκρινίζουν τις παραπάνω έννοιες:

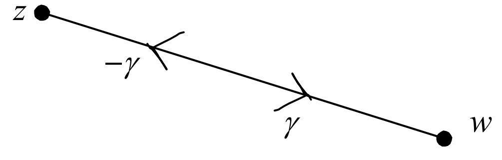
(1) Η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια $\gamma(t)=a+re^{it},\ t\in[0,2\pi]$ είναι απλή κλειστή καμπύλη (προφανές).

(2) Η καμπύλη $\gamma(t)=a+re^{it},\ t\in[0,3\pi]$ (με ίχνος την περιφέρεια κέντρου a και ακτίνας r) δεν είναι κλειστή, αφού $\gamma(0)=a+r\neq a-r=\gamma(3\pi)$, ούτε (προφανώς) απλή.

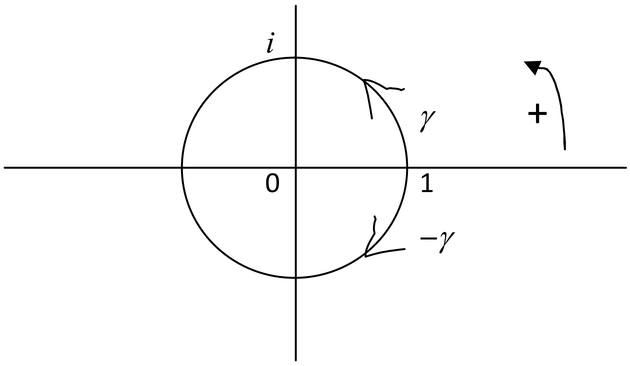
(3) Έστω $z\neq w\in\mathbb{C}$. Η πολυγωνική γραμμή $\gamma=[z,w]+[w,z]$ (με ίχνος $[z,w]$) είναι κλειστή, αφού $\gamma(0)=z=\gamma(2)$, αλλά (προφανώς) δεν είναι απλή.

(4) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η καμπύλη $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ ώστε $\gamma(t)=t+if(t),\ t\in[0,1]$ είναι προφανώς απλή.

(5) (α) Έστω $z\neq w\in\mathbb{C}$. Θέτουμε $\gamma=[z,w]$, τότε $-\gamma=[w,z]$ και βέβαια οι γ και $-\gamma$ είναι απλές αλλά όχι κλειστές καμπύλες.



(β) Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε $(-\gamma)(t) = \gamma(2\pi - t) = e^{2\pi i - it} = e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως η $-\gamma$ είναι η αρνητικά προσανατολισμένη μοναδιαία περιφέρεια (μια απλή κλειστή καμπύλη).



<u>Παρατήρηση 4.13</u> Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $\wp = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k = 1, 2, ..., n$ θέτουμε $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma_k(t) = \gamma(t),\ t \in [t_{k-1}, t_k]$. Γράφουμε τότε

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n .$$

Σημειώνουμε ότι το συμβολισμό αυτό τον έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στην περίπτωση της πολυγωνικής γραμμής $\gamma = [z_0, z_1] + \cdots + [z_{n-1}, z_n]$. Η διαμέριση του $[0, n]$ είναι τότε η $\wp = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ και βέβαια $\gamma_k = [z_{k-1}, z_k],\ k = 1, 2, ..., n$. (Η παραμέτρηση του προσανατολισμένου ευθύγρ. τμήματος $[z_{k-1}, z_k]$ με το διάστημα $[k-1, k]$ είναι, όπως θα διαπιστώσουμε λίγο αργότερα, ισοδύναμη με αυτή που μας δίνει το διάστημα [0,1] και αυτό δικαιολογεί την ταύτιση της γ_k με το $[z_{k-1}, z_k]$.)

Είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω συμβολισμό στην περίπτωση «διαδοχικών» καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$. Με αυτό εννοούμε ότι το τελικό σημείο της γ_{k-1} συμπίπτει με το αρχικό σημείο της γ_k, για κάθε $k = 1, 2, ..., n$. Έστω για απλότητα ότι έχουμε δύο «διαδοχικές» καμπύλες $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$. Τότε θα έχουμε ότι $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Έτσι ορίζουμε το συνδυασμό της γ_1 με τη γ_2 να είναι η $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ έχει την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \le t \le b \\ \gamma_2(t + c - b), & b \le t \le d + b - c \end{cases} .$$

Στην πραγματικότητα αυτό που κάναμε είναι ότι «μετακινήσαμε» το παραμετρικό διάστημα της γ_2 από το $[c, d]$ στο $[b, d + b - c]$, προσθέτοντας σ' όλα τα σημεία του $[c, d]$ τον αριθμό $b - c$ ($[c, d] + (b - c) = [b, d + b - c]$.)

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι αν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ είναι διαδοχικές καμπύλες, τότε:

$$(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 = \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3) \qquad \text{(Δώστε τις λεπτομέρειες.)}$$

Η παρατήρηση αυτή επιτρέπει να παραλείψουμε τις παρενθέσεις σ' ένα τέτοιο άθροισμα και να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n ,$$

στη γενικότερη περίπτωση διαδοχικών καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ($n \geq 3$).

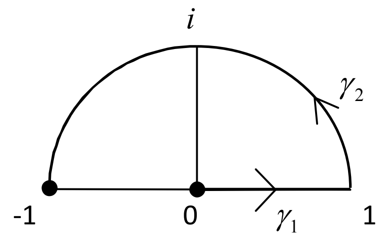
(Πρέπει τότε να είναι σαφές ότι: $[\gamma] = [\gamma_1] \cup [\gamma_2] \cup \cdots \cup [\gamma_n]$.)

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω διαδικασία θα εξηγηθεί καλύτερα όταν θα συζητήσουμε αναπαραμετρήσεις καμπυλών. Επί του παρόντος παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Έστω $\gamma_1(t) = t,\ t \in [0,1]$ και $\gamma_2(t) = e^{it},\ t \in [0,\pi]$, τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ έχει την παραμέτρηση

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ e^{i(t-1)}, & t \in [1, 1+\pi] \end{cases}$$

$\gamma(0) = 0$ και $\gamma(1+\pi) = -1$.

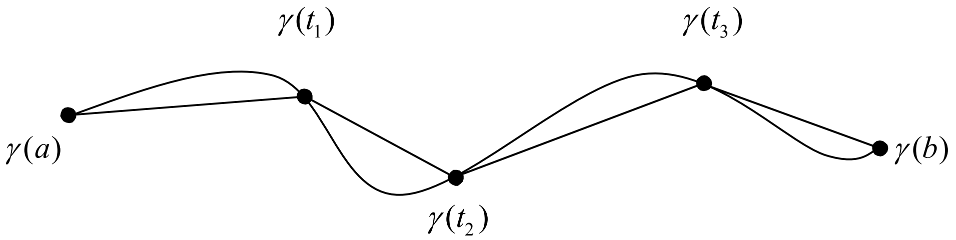


<u>Ορισμός 4.14</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $\wp = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Θέτουμε

$$L(\wp) = \sum_{k=1}^{n} | \gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k) | .$$

Θα λέμε ότι η καμπύλη γ έχει <u>μήκος</u> αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $L(\wp) \leq M$ για κάθε διαμέριση $\wp$ του $[a,b]$. Αν η καμπύλη έχει μήκος, θα ορίζουμε ως μήκος της γ τον αριθμό

$$\ell(\gamma) = \sup\{L(\wp) : \wp \text{ διαμέριση του } [a,b]\} .$$



Δηλαδή ως μήκος της γ ορίζουμε το supremum των μηκών όλων των εγγεγραμμένων πολυγωνικών γραμμών στην καμπύλη γ.

Σημειώνουμε ότι δεν έχει κάθε καμπύλη μήκος. Ένα παράδειγμα καμπύλης η οποία δεν έχει μήκος είναι το ακόλουθο:

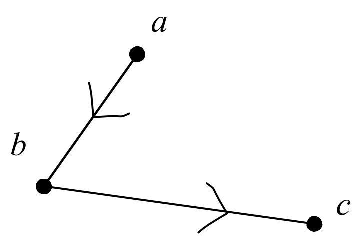
$$\gamma(t) = \begin{cases} t + it\sin\left(\dfrac{\pi}{t}\right), & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Για μια απόδειξη των ιδιοτήτων αυτού του παραδείγματος παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία (πρβλ. τα βιβλία [S-T] σελ. 102 και [M-X] σελ. 347.)

Μια σημαντική κλάση καμπυλών οι οποίες έχουν μήκος και επιπλέον υπάρχει τύπος ο οποίος να υπολογίζει το μήκος τους, είναι οι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες καμπύλες.

Ορισμός 4.15 Μια καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λέγεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη ή κατά τμήματα C^1, αν $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ και κάθε γ_k είναι συνεχώς διαφορίσιμη. (Δηλαδή υπάρχει διαμέριση $\wp=\{t_0=a<t_1<\cdots<t_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε για κάθε $k=1,2,...,n$ η $\gamma_k=\gamma/[t_{k-1},t_k]$ έχει συνεχή παράγωγο (είναι C^1) στο $[t_{k-1},t_k]$.

Σημειώνουμε ότι σε κάποια από τα σημεία $t_1,t_2,...,t_{n-1}$ της διαμέρισης ενδέχεται οι πλευρικές παράγωγοι να διαφέρουν και άρα εκεί η γ να μην διαφορίζεται. Πράγματι οι πολυγωνικές γραμμές είναι τυπικά παραδείγματα καμπυλών οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες, όμως στις κορυφές ενδέχεται η παράγωγος να μην υπάρχει. Για παράδειγμα αν a,b,c είναι τρία μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου, τότε η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα a,b,c, δηλαδή η $\gamma=[a,b]+[b,c]$ δεν παραγωγίζεται (όπως εύκολα διαπιστώνεται) στο σημείο $t=1$ ($\gamma(1)=b$).



Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα για τον υπολογισμό του μήκους μια κατά τμήματα C^1 καμπύλης, παραθέτουμε το ακόλουθο στοιχειώδες λήμμα.

<u>Λήμμα 4.16</u> Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη ώστε $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

α) Η γ έχει μήκος.

β) Οι $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n$ έχουν μήκος και ισχύει $\ell(\gamma)=\ell(\gamma_1)+\cdots+\ell(\gamma_n)$.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για $n=2$ (Γιατί;)

Έστω λοιπόν $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ και έστω $c\in(a,b)$ ώστε

$$\gamma_1=\gamma/[a,c] \quad \text{και} \quad \gamma_2=\gamma/[c,b].$$

$(\alpha)\Rightarrow(\beta)$ Η γ έχει μήκος, συνεπώς $\ell(\gamma)<+\infty$. Επειδή κάθε διαμέριση Q του $[a,c]$ επεκτείνεται σε διαμέριση του $[a,b]$ (π.χ. θέτοντας $\wp=Q\cup\{b\}$) έχουμε

$$\ell(\gamma_1)=\sup\{L(Q):Q \text{ διαμέριση του } [a,c]\}\leq$$

$$\sup\{L(Q\cup\{b\}):Q \text{ διαμέριση του } [a,c]\}\leq\ell(\gamma)<+\infty.$$

Έπεται ότι η γ_1 έχει μήκος και όμοια η γ_2 έχει μήκος.

$(\beta)\Rightarrow(\alpha)$ Έστω $\wp$ τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$, τότε οι $\wp_1=(\wp\cup\{c\})\cap[a,c]$ και $\wp_2=(\wp\cup\{c\})\cap[c,b]$ είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα.

Έτσι θα έχουμε

$$L(\wp)\leq L(\wp\cup\{c\})=L(\wp_1)+L(\wp_2)$$

για κάθε διαμέριση $\wp$ του $[a,b]$. Έπεται ότι $\ell(\gamma)\leq\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)$ (1).

Επίσης έχουμε

$$\ell(\gamma)=\sup\{L(\wp):\wp \text{ διαμέριση του } [a,b]\}\geq$$

$$\geq\sup\{L(\wp_1\cup\wp_2):\wp_1 \text{ διαμέριση του } [a,c],\quad \wp_2 \text{ διαμέριση του } [c,b]\}=$$

$$=\sup\{L(\wp_1)+L(\wp_2):\wp_1 \text{ διαμέριση του } [a,c],\quad \wp_2 \text{ διαμέριση του } [c,b]\}=$$

$$=\sup\{L(\wp_1):\wp_1 \text{ διαμέριση του } [a,c]\}+\sup\{L(\wp_2):\wp_2 \text{ διαμέριση του } [c,b]\}=$$

$$=\ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2).$$

Έτσι αποδείξαμε ότι $\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$ (2).

Από τις (1) και (2) έπεται ότι η γ έχει μήκος και μάλιστα $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$.

Θεώρημα 4.17 Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε:

α) Η γ έχει μήκος και

β) $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο τον ισχυρισμό (α), για τον (β) παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία (πρβλ. [Μ-Χ], Θεώρημα 6.1.4.)

Υποθέτουμε πρώτα ότι η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έστω $\wp = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ τυχούσα διαμέριση του $[a,b]$. Τότε

$$L(\wp) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t)\,dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \ .$$

Έπεται ότι $\ell(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ (ο ισχυρισμός (β) μας λέει ότι ισχύει ισότητα) και έτσι η γ έχει μήκος.

Υποθέτουμε τώρα ότι η γ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη και άρα υπάρχει διαμέριση $Q = \{x_0 = a < \cdots < x_m = b\}$ του $[a,b]$ ώστε κάθε $\gamma_k = \gamma / [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$ να είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε έχουμε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m$ και ο ισχυρισμός έπεται από το Λήμμα 4.16 και το πρώτο μέρος της απόδειξης.

Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $t \in [a,b] \mapsto |\gamma'(t)| \in \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών (ενδεχομένως στα x_k, $1 \leq k \leq n-1$) και βέβαια είναι φραγμένη (αφού κάθε $|\gamma_k{}'|$ είναι συνεχής). Επομένως το ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$ υπάρχει και ισχύει $\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\gamma'(t)|\,dt \geq \sum_{k=1}^{n} \ell(\gamma_k) = \ell(\gamma)$.

(Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $\gamma\,'$ ορίζεται αυθαίρετα στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ και αυτό δεν επηρεάζει την ολοκληρωσιμότητα της $|\gamma\,'|$. Εξηγείστε το γιατί.)

<u>Παραδείγματα 4.18</u> 1) Έστω $z \neq w \in \mathbb{C}$, θεωρούμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το z στο w, δηλ. $\gamma(t) = (1-t)z + tw,\ t \in [0,1]$. Τότε

$\gamma'(t) = -z + w, \quad t \in [0,1]$ και η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Από το Θεώρημα 4.17 έχουμε

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 |z-w|\, dt = |z-w|.$$

2) Γενικότερα έστω $\gamma = [z_0, z_1] + \cdots + [z_{n-1}, z_n]$, μια πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$. Από τον ορισμό της η γ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη (πρβλ. το παράδειγμα 4.12 (2)) και

$$\ell(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\gamma'(t)|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |z_{k+1} - z_k|\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$$

$$= |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \cdots + |z_n - z_{n-1}|.$$

3) Έστω $\gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$, η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r > 0$.

Τότε $\gamma'(t) = ire^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$ και η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έπεται ότι

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Παρατηρούμε ότι και στα τρία παραδείγματα βρήκαμε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.17, τις αναμενόμενες τιμές για τα μήκη των δεδομένων καμπυλών.

Από εδώ και στο εξής με τον όρο <u>καμπύλη</u> θα εννοούμε (εκτός και αν αναφέρουμε κάτι διαφορετικό) μία <u>κατά τμήματα C^1</u> καμπύλη.

<u>Αναπαραμέτρηση καμπυλών 4.19</u>

Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [\mathrm{c}, \mathrm{d}] \to \mathbb{C}$ καμπύλες. Θα λέμε ότι η γ_1 είναι μια <u>αναπαραμέτρηση</u> της γ_2 αν $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$, όπου $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ είναι μια συνεχής 1-1 απεικόνιση με $\sigma(a) = c$ και $\sigma(b) = d$, η οποία είναι επιπλέον C^1.

Παρατηρούμε ότι η σ είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση (άρα $\sigma'(t) \geq 0$) και ότι οι γ_1, γ_2 έχουν τον ίδιο προσανατολισμό ($\gamma_1'(t) = \gamma_2'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t), \quad t \in [a,b]$). Μερικές φορές λέμε ότι οι γ_1, γ_2 είναι παραμετρήσεις της «καμπύλης» $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. (Προφανώς $[\gamma_1] = [\gamma_2]$

και οι γ_1, γ_2 έχουν το ίδιο αρχικό και το ίδιο τελικό σημείο). Αν επιπλέον η απεικόνιση σ^{-1} είναι C^1, θα λέμε ότι οι γ_1, γ_2 είναι <u>ισοδύναμες</u> καμπύλες (τότε $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma^{-1}$ με την σ^{-1} να είναι C^1).

$$\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{\sigma} & [c,d] \\ & \searrow^{\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma} & \downarrow \gamma_2 \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Η απεικόνιση σ του παραπάνω ορισμού συνιστά ουσιαστικά μία «αλλαγή μεταβλητής» και μερικές φορές επιτρέπουμε να είναι κατά τμήματα C^1.

<u>**Παραδείγματα 4.20**</u> 1) Έστω $\gamma_1(t) = t^2 + it^2$ και $\gamma_2(t) = t + it, \quad t \in [0,1]$.

Αν $\sigma(t) = t^2, \quad t \in [0,1]$ τότε η σ είναι γνήσια αύξουσα και επί του $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο $\sigma'(t) = 2t$. Παρατηρούμε ότι $(\gamma_2 \circ \sigma)(t) = \gamma_2(\sigma(t)) = \gamma_1(t), \quad t \in [0,1]$. Επομένως η γ_1 είναι μια <u>αναπαραμέτρηση</u> της γ_2. (Οι γ_1, γ_2 δεν είναι ισοδύναμες, αφού η αντίστροφη της σ είναι η συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0,1]$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0,1]$ και $\varphi'(0) = +\infty$).

2) Έστω $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}, \quad t \in [0,1]$ και $\gamma_2(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. Θέτουμε $\sigma(t) = 2\pi t, \quad t \in [0,1]$. Τότε $\gamma_1(t) = \gamma_2 \circ \sigma(t)$, $\sigma'(t) = 2\pi, \quad t \in [0,1]$, $\varphi(x) = \sigma^{-1}(x) = \dfrac{x}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi]$ και $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\pi}, \quad x \in [0, 2\pi]$. Έπεται ότι η γ_1 είναι <u>αναπαραμέτρηση</u> της γ_2 (μάλιστα οι γ_1, γ_2 είναι ισοδύναμες καμπύλες).

3) Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τυχούσα καμπύλη. Τότε υπάρχει αναπαραμέτρηση της γ ορισμένη στο διάστημα [0,1]. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ με $\sigma(t) = (1-t)a + tb, \quad t \in [0,1]$, η οποία είναι 1-1 και επί του [0,1], συνεχώς διαφορίσιμη με $\sigma'(t) = b - a > 0$ και με αντίστροφη επίσης συνεχώς διαφορίσιμη. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ με $\Gamma = \gamma \circ \sigma$ είναι μια αναπαραμέτρηση της γ (μάλιστα οι γ και Γ είναι ισοδύναμες καμπύλες). Σημειώνουμε ότι η γ μπορεί να (ανα)παραμετρικοποιηθεί με <u>οποιοδήποτε</u> συμπαγές διάστημα $[c,d]$, θεωρώντας την απεικόνιση $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ με $\sigma(t) = \dfrac{(b-a)t + ad - bc}{d - c}, \quad t \in [c,d]$.

<u>Το άθροισμα $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ 4.21</u>

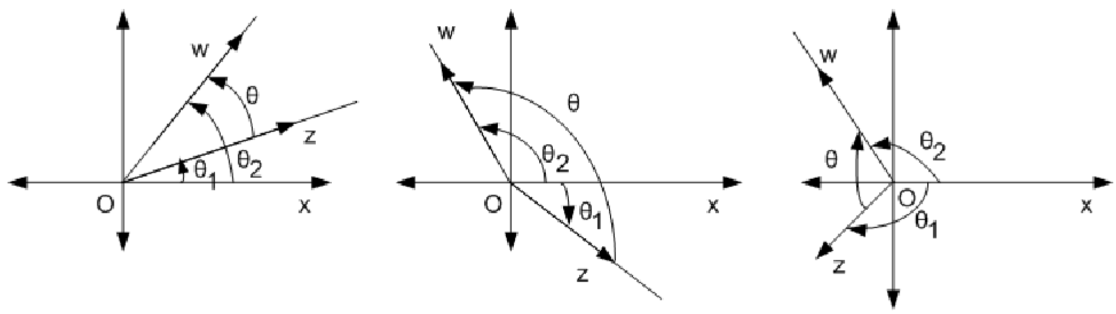
Θεωρούμε διαδοχικές καμπύλες $\gamma_k:[a_k,b_k]\to\mathbb{C},\quad k=1,2,...,n$, ώστε $\gamma_{k-1}(b_{k-1})=\gamma_k(a_k),\quad k=2,...,n$ (πρβλ. την παρατήρηση 4.13). Τότε μια παραμέτρηση του «αθροίσματος» $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ μπορεί να ορισθεί ως εξής: παραμετρικοποιούμε με το διάστημα $[k-1,k]$ κάθε γ_k, σύμφωνα με το παράδειγμα 4.20 (3), δηλαδή θέτουμε $\Gamma_k(t)=\gamma_k((k-t)a_k+(t-k+1)b_k),\quad t\in[k-1,k]$ και κατόπιν ορίζουμε $\gamma:[0,N]\to\mathbb{C}$ **με** $\gamma(t)=\Gamma_k(t),\quad t\in[k-1,k],\quad k=1,2,...,n$.
Γράφουμε τότε $\gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\cdots+\Gamma_n$ (ή και $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$) και παρατηρούμε ότι $[\Gamma_k]=[\gamma_k],\quad k=1,2,\ldots,n$.

<u>Γεωμετρική ερμηνεία της μιγαδικής παραγώγου 4.22</u>

1) Έστω z,w μιγαδικοί αριθμοί ώστε $z\neq 0\neq w$. Τότε η <u>προσανατολισμένη</u> γωνία (z,w) των διανυσμάτων z,w ορίζεται ως το <u>πρωτεύον όρισμα</u> του $\dfrac{w}{z}$, δηλαδή

$$(z,w)\underset{o\rho.}{=}\arg\left(\frac{w}{z}\right).$$

Γεωμετρικά η γωνία αυτή είναι η <u>προσανατολισμένη κυρτή γωνία</u> με πρώτη πλευρά την ημιευθεία Oz και δεύτερη πλευρά την ημιευθεία Ow, μερικές φορές η γωνία αυτή συμβολίζεται με (Oz,Ow).



$$\theta=\arg\left(\frac{w}{z}\right)$$

Ο ανωτέρω ορισμός δικαιολογείται με την παρατήρηση ότι

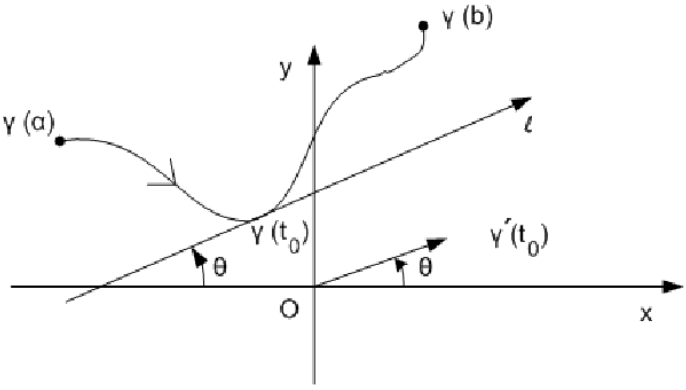
$$\frac{w}{z}=\frac{|w|e^{i\theta_2}}{|z|e^{i\theta_1}}=\frac{|w|}{|z|}e^{i(\theta_2-\theta_1)},\quad \theta_1=\arg(z),\ \theta_2=\arg(w).$$

2) Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη και $t_0\in[a,b]$ ώστε η παράγωγος $\gamma'(t_0)\neq 0$. Τότε η εφαπτομένη της γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ ορίζεται ως η ευθεία με εξίσωση

$$\ell(t)=\gamma(t_0)+\gamma'(t_0)(t-t_0),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Το διάνυσμα $\gamma'(t_0)$ ονομάζεται το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης γ στο $\gamma(t_0)$.

Παρατηρούμε ότι η κυρτή προσανατολισμένη γωνία με πρώτη πλευρά την θετική κατεύθυνση του x-άξονα και δεύτερη πλευρά τη θετική κατεύθυνση ($t\to+\infty$) της εφαπτομένης ℓ συμπίπτει με το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού $\gamma'(t_0)$.



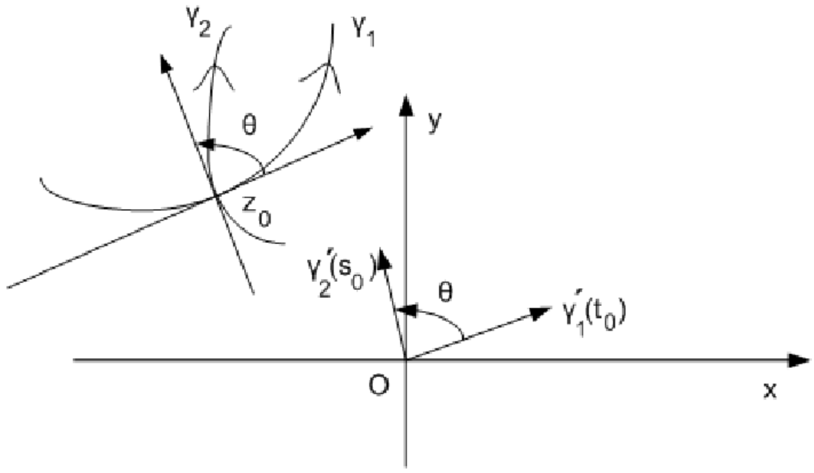
$$\theta=\arg(\gamma'(t_0))$$

Δηλαδή έχουμε ότι $\theta=\arg(\gamma'(t_0))$ και $\gamma'(t_0)=|\gamma'(t_0)|\,e^{i\theta}$.

3) Ας θεωρήσουμε τώρα δύο καμπύλες $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ και $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο $z_0=\gamma_1(t_0)=\gamma_2(s_0)$, όπου $t_0\in(a_1,b_1),\quad s_0\in(a_2,b_2)$ και $\gamma_1'(t_0)\neq 0\neq\gamma_2'(s_0)$. Ορίζουμε τότε τη γωνία (γ_1,γ_2,z_0) μεταξύ των δύο καμπυλών στο z_0 ως τη γωνία $(\gamma_1'(t_0),\gamma_2'(s_0))$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων τους, δηλαδή

$$(\gamma_1,\gamma_2,z_0)=\arg\left(\frac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right).$$

Γεωμετρικά, η γωνία (γ_1,γ_2,z_0) είναι η κυρτή προσανατολισμένη γωνία με πρώτη πλευρά τη θετική κατεύθυνση της εφαπτομένης της γ_1 στο z_0 και δεύτερη πλευρά τη θετική κατεύθυνση της εφαπτομένης της γ_2 στο z_0 .



$$\theta=\arg\left(\frac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά την μιγαδική παράγωγο $f'(z_0)$ μιας ολόμορφης συνάρτησης f , υπό την προϋπόθεση ότι $f'(z_0) \neq 0$.

Πρόταση 4.23 Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f'(z_0) \neq 0$. Τότε η f διατηρεί τις γωνίες στο z_0. Δηλαδή αν γ_1, γ_2 είναι C^1 καμπύλες στο Ω οι οποίες τέμνονται στο z_0, δηλαδή $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$, ώστε $\gamma_1'(t_0) \neq 0 \neq \gamma_2'(s_0)$, τότε

$$(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = (f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, w), \quad w = f(z_0).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\rho_1 = f \circ \gamma_1$ και $\rho_2 = f \circ \gamma_2$. Τότε οι καμπύλες ρ_1 και ρ_2 τέμνονται στο $w = f(z_0)$, αφού

$$\rho_1(t_0) = f(\gamma_1(t_0)) = f(\gamma_2(s_0)) = \rho_2(s_0) \quad (= f(z_0)).$$

Παρατηρούμε ότι:

$\rho_1'(t_0) = f'(\gamma_1(t_0))\gamma_1'(t_0) = f'(z_0)\gamma_1'(t_0) \neq 0$ και

$\rho_2'(s_0) = f'(\gamma_2(s_0))\gamma_2'(s_0) = f'(z_0)\gamma_2'(s_0) \neq 0$.

Έπεται ότι,

$$(\rho_1, \rho_2, w) = \arg\left(\frac{\rho_2'(s_0)}{\rho_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(z_0)\gamma_2'(s_0)}{f'(z_0)\gamma_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right) = (\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$

και η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Παρατήρηση 4.24 Τονίζουμε ότι η διατήρηση των γωνιών αφορά τόσο το μέτρο, όσο και τον προσανατολισμό των γωνιών. Για παράδειγμα η απεικόνιση $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$, στο σημείο 0, διατηρεί το μέτρο αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό των γωνιών (Γιατί;)

Σχετικά με το προηγούμενο αποτέλεσμα, όπου υποθέσαμε ότι $f'(z_0) \neq 0$, παρατηρούμε ότι: η f στρέφει κατά γωνία $\theta = \arg(f'(z_0))$ τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών του Ω οι οποίες διέρχονται από το z_0 και πολλαπλασιάζει το μήκος τους κατά $|f'(z_0)|$.

Αν το z είναι πολύ κοντά στο z_0, τότε λόγω συνέχειας της f' (κάθε ολόμορφη συνάρτηση έχει, όπως θα αποδείξουμε, μιγαδικές παραγώγους κάθε τάξης οι οποίες είναι βέβαια συνεχείς) και της συνάρτησης $\arg$, οι αριθμοί $\arg(f'(z))$ και $|f'(z)|$ είναι πολύ κοντά στους αριθμούς $\arg(f'(z_0))$ και $|f'(z_0)|$. Έπεται από την παρατήρηση αυτή ότι η εικόνα $f(V)$ μιας μικρής περιοχής V του z_0 έχει (περίπου) την ίδια μορφή με τη V. Έτσι δικαιολογείται και ο όρος <u>σύμμορφη</u> απεικόνιση για τις ολόμορφες συναρτήσεις $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $f'(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \Omega$. Προφανή παραδείγματα συμμόρφων απεικονίσεων είναι οι $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ καθώς και η εκθετική στο $\mathbb{C}$. Βέβαια αυτές οι απεικονίσεις δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού τους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ολόμορφες απεικονίσεις οι οποίες είναι 1-1, καθώς τότε αποδεικνύεται ότι είναι σύμμορφες. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι αν $D \subseteq \mathbb{C}$ είναι τόπος και $f:D \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και 1-1 τότε $f(D)$ είναι επίσης τόπος του $\mathbb{C}$ και η αντίστροφη της f ορισμένη στον τόπο $f(D)$ είναι επίσης σύμμορφη απεικόνιση. Οι τόποι D και $f(D)$ λέγονται τότε <u>σύμμορφα ισοδύναμοι</u> (Πρβλ. τα θεωρήματα 7.8.4 και 7.8.5, την παράγραφο 7.8.6 καθώς και τις παραγράφους 4.6 και 4.7 του [Μ-Χ].) Για παράδειγμα οι τόποι $D = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ και $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ είναι σύμμορφα ισοδύναμοι μέσω της εκθετικής συνάρτησης, αφού η $\exp : D \to \mathbb{C}_\pi$ είναι ολόμορφη 1-1 και επί (με αντίστροφη τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου).

Στην περίπτωση όπου η f είναι ολόμορφη μη σταθερή ορισμένη σε έναν τόπο Ω και $z_0 \in \Omega$ ώστε $f'(z_0) = 0$, θεωρούμε τον ελάχιστο ακέραιο $n \geq 2$ ώστε $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(m)}(z_0) \neq 0$). Αποδεικνύεται τότε ότι, αν γ_1, γ_2 είναι καμπύλες του Ω διερχόμενες από το z_0 ώστε $(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = \theta$ τότε έχουμε ότι $(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = n\theta$.

<u>4.3 Μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα</u>

Έστω $\gamma : [a,b] \to D$ συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη όπου D είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ο στόχος μας είναι να ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο την έννοια μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ. Ένας καλός συμβολισμός για την έννοια αυτή είναι ο $\int_\gamma f(z)dz$. Για συντομία συμβολίζουμε με $\int_\gamma f\, dz$ ή και $\int_\gamma f$.

Ας υποθέσουμε περαιτέρω ότι η f έχει παράγουσα στο D, δηλαδή ότι υπάρχει $F : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$. Επιθυμούμε να ορίσουμε την έννοια αυτή έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad .$$

Δηλαδή ο αριθμός $\int_\gamma f(z)dz$ να είναι ανεξάρτητος από την καμπύλη γ του D η οποία συνδέει τα σημεία $z=\gamma(a)$ και $w=\gamma(b)$ του D.

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση $F\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ισχύει

$(F\circ\gamma)'(t)=F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t),\quad t\in[a,b]$ και βέβαια η $t\in[a,b]\mapsto f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ είναι συνεχής.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

Έτσι καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.25 Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη και $f:[\gamma]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ως μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$$

το οποίο συμβολίζεται με $\int_\gamma f(z)dz$.

Επομένως $\int_\gamma f(z)dz \underset{\text{ορ.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο, εφ' όσον οι f,γ είναι συνεχείς, η γ' έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών και επιπλέον είναι φραγμένη (Πρβλ. την απόδειξη του θεωρήματος 4.17.)

Παρατήρηση 4.26 Έστω f και γ όπως στον προηγούμενο ορισμό. Τότε, όπως γνωρίζουμε από τα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού III, μπορεί να ορισθεί και το πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ. Το ολοκλήρωμα αυτό αναφέρεται συνήθως ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους της f κατά μήκος της γ και ορίζεται (με έναν τυπικά παρόμοιο τρόπο με αυτόν του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος) ως εξής:

$$\int_\gamma f\bullet ds \underset{\text{ορ.}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\bullet\gamma'(t)dt,$$

όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεξιά είναι τώρα το εσωτερικό γινόμενο $f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)$ των διανυσματικών συναρτήσεων $f(\gamma(t))$ και $\gamma'(t), \quad t \in [a,b]$.

Για διάφορους λόγους είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των δύο επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων (μιγαδικού και πραγματικού). Έστω $f = u + iv$ και $\gamma = x + iy$. Τότε (αναλύοντας το μιγαδικό γινόμενο των $f(\gamma(t))$ και $\gamma'(t)$) έχουμε

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \big(u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \big) \cdot \big(x'(t) + iy'(t) \big) =$$

$$= \big(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) \big) + i \big(u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t) \big).$$

Κατά συνέπεια από τους ορισμούς των: πραγματικού και μιγαδικού ολοκληρώματος συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx), \qquad (1)$$

όπου στα δεξιά της (1) έχουμε τα πραγματικά επικαμπύλια ολοκληρώματα των διανυσματικών συναρτήσεων $(u, -v)$ και (v, u) κατά μήκος της καμπύλης γ.

Τυπικά ο τύπος (1) –ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εναλλακτικός ορισμός του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος- λαμβάνεται ως εξής:

$$f(z)dz = (u + iv) \cdot (dx + idy) = (udx - vdy) + i(udy + vdx).$$

Παρατηρούμε ότι το $\int_\gamma f \bullet ds = \int_\gamma (udx + vdy)$.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Αν και οι ιδιότητες αυτές μπορούν εύκολα να συναχθούν από τις αντίστοιχες ιδιότητες του πραγματικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος (σε συνδυασμό με τον τύπο (1) της προηγούμενης παρατήρησης) θα προτιμήσουμε να δώσουμε απ' ευθείας αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων.

Πρόταση 4.27 (α) (Γραμμικότητα του επικαμπύλιου Ολοκληρώματος)

Έστω γ καμπύλη, $f, g : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, τότε

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)dz = \lambda \int_\gamma fdz + \mu \int_\gamma gdz.$$

(β) Αν $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ και $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{\gamma} fdz = \int_{\gamma_1} fdz + \cdots + \int_{\gamma_n} fdz .$$

Απόδειξη. Απλή και έτσι αφήνεται ως άσκηση.

Η ακόλουθη αξιοσημείωτη ιδιότητα του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος είναι συνέπεια της «τριγωνικής ανισότητας» (Θεωρ. 4.5).

Πρόταση 4.28 Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \| f \| \cdot \ell(\gamma)$$

όπου $\| f \| = \sup\{ | f(\zeta) | : \zeta \in [\gamma] \}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, εφ' όσον η $| f |$ είναι συνεχής πραγματική συνάρτηση επί του συμπαγούς συνόλου $[\gamma]$, έπεται ότι η $| f |$ είναι φραγμένη και συνεπώς $\| f \| < +\infty$. Έτσι έχουμε,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_a^b | f(\gamma(t)) | \cdot | \gamma'(t) | \; dt \leq$$

$$\leq \| f \| \cdot \int_a^b | \gamma'(t) | \; dt \leq \| f \| \cdot \ell(\gamma) .$$

Πόρισμα 4.29 Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη, $f_n : [\gamma] \to \mathbb{C},\ n \geq 1$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε

$$\int_{\gamma_n} f_n \, dz \to \int_{\gamma} f \; dz .$$

Απόδειξη. Επειδή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και κάθε f_n είναι συνεχής, έπεται ότι και η f είναι συνεχής συνάρτηση. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$$\left| \int_{\gamma} (f_n - f)\, dz \right| \leq \| f_n - f \| \cdot \ell(\gamma) \qquad (1).$$

Το γεγονός ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σημαίνει ότι $\|f_n - f\| \to 0$ (πρβλ. ορισμό 3.9). Από την ανισότητα (1) (και τη γραμμικότητα του επικαμπυλίου ολοκληρώματος) έπεται ότι

$$\left| \int_\gamma f_n\, dz - \int_\gamma f\, dz \right| \to 0 \;\Rightarrow\; \int_\gamma f_n\, dz \to \int_\gamma f\, dz\,.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα μας υποδεικνύει την «ευαισθησία» του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος ως προς τον προσανατολισμό της καμπύλης, υπό την έννοια ότι έχουμε αλλαγή του προσήμου του ολοκληρώματος αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό της καμπύλης. (Ανάλογα συμπεριφέρεται και το πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους).

<u>Πρόταση 4.30</u> Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη. Τότε έχουμε:

(α) $[-\gamma]=[\gamma]$ και $\ell(-\gamma)=\ell(\gamma)$,

(β) $\int\limits_{-\gamma} f\, dz = -\int\limits_{\gamma} f\, dz$, αν $f:[\gamma]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $-\gamma=\gamma\circ\sigma$, όπου $\sigma:[a,b]\to[a,b]$ με $\sigma(t)=a+b-t$. Επειδή η σ είναι 1-1 (γνήσια φθίνουσα) και επί του $[a,b]$ και ακόμα συνεχώς διαφορίσιμη ($\sigma'(t)=-1$), έπεται προφανώς ότι η καμπύλη $-\gamma$ είναι κατά τμήματα C^1 (αν η γ έχει την ίδια ιδιότητα) και βέβαια $[-\gamma]=[\gamma]$. Επίσης $\ell(-\gamma)=\ell(\gamma)$ από τον ορισμό του μήκους καμπύλης (ή κάνοντας αλλαγή μεταβλητής όπως στον ισχυρισμό (β) που ακολουθεί).

(β) $\int\limits_{-\gamma} f\, dz = \int\limits_{\gamma\circ\sigma} f\, dz = \int\limits_a^b f\left(\gamma(\sigma(t))\right)\cdot\gamma'(\sigma(t))\sigma'(t)\, dt =$

(θέτοντας $\sigma(t)=x$) $= \int\limits_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x)\, dx = \int\limits_b^a f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x)\, dx =$

$$= -\int\limits_a^b f(\gamma(x))\cdot\gamma'(x)dx = -\int\limits_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι το αρχικό (αντίστ. το τελικό) σημείο της $-\gamma$ ταυτίζεται με το τελικό (αντίστ. το αρχικό) σημείο της γ.

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι το μήκος μιας καμπύλης είναι ανεξάρτητο της αναπαραμέτρησης και ακόμη ότι το ίδιο ισχύει και για την τιμή του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος επ' αυτής.

Πρόταση 4.31 Έστω $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ και $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ καμπύλες. Αν η γ_1 είναι αναπαραμέτρηση της γ_2 τότε έχουμε:

(α) $[\gamma_1]=[\gamma_2]$ και $\ell(\gamma_1)=\ell(\gamma_2)$.

(β) $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$, αν $f:[\gamma_1]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη. Έστω $\gamma_1=\gamma_2\circ\sigma$, όπου $\sigma:[a,b]\to[c,d]$ είναι C^1 γνήσια αύξουσα και επί του $[c,d]$. Είναι τότε σαφές ότι οι γ_1,γ_2 έχουν το ίδιο ίχνος και ακόμη ότι έχουν κοινό αρχικό αλλά και κοινό τελικό σημείο.

Από το Θεώρημα 4.6 έχουμε ότι:

$$\ell(\gamma_1)=\int_a^b|\gamma_1'(t)|\,dt=\int_a^b|\gamma_2'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)|\,dt= \quad \text{(θέτοντας } \sigma(t)=x\text{)}$$

$$=\int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)}|\gamma_2'(x)|\,dx=\int_c^d|\gamma_2'(x)|\,dx=\ell(\gamma_2) \quad \text{και}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt=\int_a^b f(\gamma_2(\sigma(t)))\cdot\gamma_2'(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt=$$

$$\text{(θέτοντας } \sigma(t)=x\text{)} \quad =\int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(\gamma_2(x))\cdot\gamma_2'(x)\,dx=\int_c^d f(\gamma_2(x))\cdot\gamma_2'(x)\,dx=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί ως η γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού στο πλαίσιο του μιγαδικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος.

Θεώρημα 4.32 Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $\gamma:[a,b]\to\Omega$ καμπύλη και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής.

Αν η f έχει παράγουσα στο Ω, δηλαδή υπάρχει $F:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z)=f(z)$ για $z\in\Omega$, τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η γ είναι C^1 καμπύλη. Τότε έχουμε (πρβλ. και τη συζήτηση στην αρχή της παραγράφου 4.3):

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \left(F\circ\gamma\right)'(t)\,dt = \left(F\circ\gamma\right)(b) - \left(F\circ\gamma\right)(a) =$$

$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η γ είναι κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε υπάρχουν σημεία $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ ώστε οι καμπύλες περιορισμοί $\gamma_k = \gamma/[t_{k-1}, t_k], \quad k = 1,2,\ldots,n$ να είναι C^1. Τότε έχουμε ότι $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ και άρα (πρόταση 4.27 (β))

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = \qquad \text{(από το πρώτο μέρος της απόδειξης)}$$

$$= \left(F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))\right) + \left(F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1))\right) + \cdots + \left(F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1}))\right) =$$

$$= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

<u>**Πόρισμα 4.33**</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Όπως θα αποδείξουμε αργότερα η παράγωγος μιας ολόμορφης συνάρτησης είναι συνεχής, έτσι από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0, \text{ αφού } \gamma(b) = \gamma(a).$$

Με το πρώτο από τα ακόλουθα παραδείγματα διαπιστώνουμε ότι μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σ' ένα τόπο δεν έχει αναγκαία παράγουσα.

<u>**Παραδείγματα 4.34**</u> (1) Έστω $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ και $f(z) = \dfrac{1}{z}, \ z \in \Omega$. Τότε η ολόμορφη συνάρτηση f <u>δεν έχει</u> παράγουσα στον τόπο Ω.

<u>1η απόδειξη</u>: Έστω $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$, η γ είναι βέβαια κλειστή καμπύλη και

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0$$

Από το θεώρημα 4.32 έπεται προφανώς το συμπέρασμα.

<u>2η απόδειξη</u>: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F:\Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $F'(z)=\dfrac{1}{z}$ για $z\in\Omega$. Έπεται ιδιαίτερα ότι

$F'(z)=\dfrac{1}{z}=\log' z,\quad z\in\mathbb{C}_\pi=\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}:t\le 0\}$, όπου $\log z$ ο πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου. Κατά συνέπεια υπάρχει σταθερά c ώστε $\log z=F(z)+c,\quad z\in\mathbb{C}$ και αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $F(z)+c,\quad z\in\Omega$ είναι μια ολόμορφη (και άρα συνεχής) επέκταση του πρωτεύοντος κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Το συμπέρασμα όμως αυτό αντιφάσκει με την παρατήρηση 3.40 .1.

(2) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_\gamma (2\overline{z}-1)\,dz$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\gamma=[1,-i]$, είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το 1 στο $-i$.

(β) $\gamma(t)=e^{2\pi i t},\quad t\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

(γ) $\gamma=[0,1]\cup[1,i]\cup[i,0]$, είναι η (αντιωρολογιακά προσανατολισμένη) περίμετρος του τριγώνου με κορυφές τα 0,1 και i.

Λύση. (α) $\gamma(t)=(1-t)1+t(-i)=1+(-1-i)t,\quad t\in[0,1]$. Επομένως $\gamma'(t)=-(1+i)$ και $\overline{\gamma(t)}=1+(i-1)t,\quad t\in[0,1]$. Έτσι έχουμε

$$\int_\gamma (2\overline{z}-1)\,dz=\int_0^1(2\overline{\gamma(t)}-1)\cdot\gamma'(t)dt=\int_0^1(1+2it-2t)(-i-1)dt=$$

$$=\int_0^1(4t-1-i)dt=[2t^2-t(1+i)]_0^1=2-(1+i)=1-i\,.$$

(β) Η καμπύλη γ είναι το 2ο τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου από το i στο -1.
Έχουμε ότι $\overline{\gamma(t)}=e^{-2\pi i t}$ και $\gamma'(t)=2\pi i\cdot\gamma(t),\quad t\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

$$\int_\gamma (2\overline{z}-1)\,dz=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(2\overline{\gamma(t)}-1)\cdot\gamma'(t)dt=1+i(\pi+1)\,.$$

(γ) Έστω $\gamma_1 = [0,1]$, $\gamma_2 = [1,i]$ και $\gamma_3 = [i,0]$ με τις συνήθεις παραμετρήσεις ως προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα. Τότε $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = (1-t)\cdot 1 + ti = 1 - t + ti$ και $\gamma_3(t) = (1-t)i + t\cdot 0 = (1-t)i$ και άρα $\gamma_1'(t) = 1$, $\gamma_2'(t) = -1+i$, $\gamma_3'(t) = -i$, όπου $t \in [0,1]$. Έτσι έχουμε

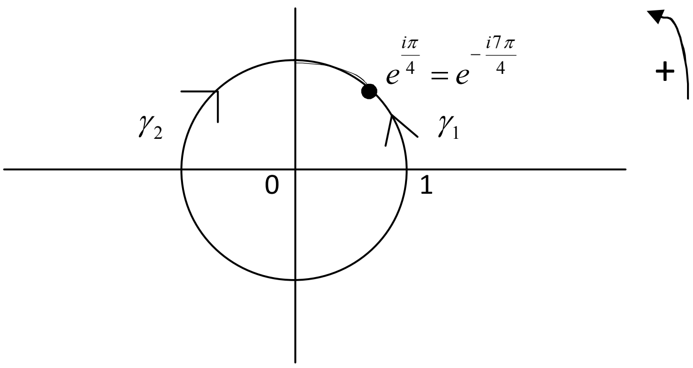
$$\int_\gamma (2\overline{z}-1)\,dz = \int_0^1 (2\overline{\gamma_1(t)}-1)\cdot\gamma_1'(t)dt + \int_0^1 (2\overline{\gamma_2(t)}-1)\cdot\gamma_2'(t)dt + \int_0^1 (2\overline{\gamma_3(t)}-1)\cdot\gamma_3'(t)dt =$$

$$= 0 + (1+i) + (-1+i) = 2i\,.$$

(3) Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1(t) = e^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $\gamma_2(t) = e^{-it}$, $t \in \left[0, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Βρείτε την καμπύλη $\gamma_1 + (-\gamma_2)$.

Λύση.



Οι γ_1 και γ_2 είναι τόξα του μοναδιαίου κύκλου. Η πρώτη είναι προσανατολισμένη με αρχικό σημείο το 1 και τελικό το $e^{\frac{i\pi}{4}}$ (τόξο $\frac{\pi}{4}$ ακτινίων) και η δεύτερη αρνητικά προσανατολισμένη με αρχικό σημείο το 1 και τελικό το $e^{-\frac{i7\pi}{4}}$ (τόξο $\frac{-7\pi}{4}$ ακτινίων).

Παρατηρούμε για την αντίθετη καμπύλη $-\gamma_2$ της γ_2 ότι

$-\gamma_2(t) = \gamma_2\left(\frac{7\pi}{4} - t\right) = e^{-i\left(\frac{7\pi}{4}-t\right)} = e^{-i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}\cdot e^{it} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\cdot e^{it} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}$, επομένως έχει όπως αναμέναμε αρχικό σημείο το $e^{\frac{i\pi}{4}}$ και τελικό το 1. Έτσι η $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος με αρχικό και τελικό σημείο το 1, ο οποίος διαγράφεται μια φορά κατά τη θετική φορά περιστροφής. Μάλιστα μπορούμε να αναπαραμετρικοποιήσουμε την $-\gamma_2$ με την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\pi}{4} + t \Leftrightarrow t = x - \frac{\pi}{4}$, δηλαδή να θέσουμε

$\sigma(x) = x - \frac{\pi}{4}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ και $\gamma = (-\gamma_2) \circ \sigma$.

Τότε $\gamma(x) = (-\gamma_2)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = e^{ix}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ και συνεπώς

$\gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 + \gamma = e^{ix}, \quad x \in [0, 2\pi]$. Ένα παρόμοιο παράδειγμα περιγράφεται και στην παρατήρηση 4.13.

(4) Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη με αρχικό σημείο $z_1 = \gamma(a)$ και τελικό $z_2 = \gamma(b)$. Υπολογίστε το $\int_\gamma f(z)\,dz$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $f(z) = e^z$, (β) $f(z) = \cos z$, (γ) $f(z) = \sin z$, (δ) $f(z) = z \log z$, $z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \le 0\}$, υποθέτοντας στην περίπτωση αυτή ότι $[\gamma] \subseteq \mathbb{C}_\pi$ και

(ε) $f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \ n \ne -1$, υποθέτοντας ότι αν $n \le -2$, τότε $\gamma(t) \ne 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

Λύση. Σε όλες οι περιπτώσεις η συνάρτηση f (είναι συνεχής και) έχει παράγουσα στο πεδίο ορισμού της. Έτσι από το Θεώρημα 4.32 έχουμε

(α) $\int_\gamma e^z\,dz = e^{z_2} - e^{z_1}$, (β) $\int_\gamma \cos z\,dz = \sin z_2 - \sin z_1$

(γ) $\int_\gamma \sin z\,dz = \cos z_1 - \cos z_2$

(δ) Μια παράγουσα της $z \log z$ στο $\mathbb{C}_\pi$ είναι η $F(z) = \frac{z^2}{2}\log z - \frac{z^2}{4}$, επομένως

$\int_\gamma z \log z\,dz = F(z_2) - F(z_1)$.

(ε) Μια παράγουσα της z^n $(n \ne -1)$ στο πεδίο ορισμού της είναι $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$,

επομένως $\int_\gamma z^n\,dz = F(z_2) - F(z_1) = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}$.

(5) Έστω $\gamma : [a,b] \to \Omega$ καμπύλη με αρχικό σημείο $z_1 = \gamma(a)$ και τελικό $z_2 = \gamma(b)$. Τότε έχουμε:

(α) Αν $\Omega = \mathbb{C}_\pi$ τότε $\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \log z_2 - \log z_1$.

(β) Αν $\Omega = \mathbb{C}_{2\pi} = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ τότε $\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \log_{2\pi} z_2 - \log_{2\pi} z_1$, όπου για $z \neq 0,$

$\log_{2\pi} z = \log|z| + i\arg_{2\pi}(z)$ και $\arg_{2\pi}(z) = \theta \Leftrightarrow \theta \in [0, 2\pi)$ και $z = |z|e^{i\theta}$.

Λύση. (α) Όπως γνωρίζουμε στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι μία παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{z}$.

(β) Σύμφωνα με την παρατήρηση 3.48 στον τόπο $\mathbb{C}_{2\pi}$ η συνάρτηση $z \mapsto \log_{2\pi} z$ είναι μια παράγουσα της $\frac{1}{z}$. Έτσι σε κάθε περίπτωση έχουμε το συμπέρασμα.

(Η ίδια παρατήρηση μας λέει ότι σε τόπους της μορφής $\mathbb{C}_a = \mathbb{C} \setminus \{re^{ia} : r \geq 0\}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή της μορφής $\mathbb{C}$ με την εξαίρεση μιας ημιευθείας με κορυφή το 0, η $\frac{1}{z}$ έχει παράγουσα). Σημειώνουμε ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$ όπου γ κλειστή καμπύλη η οποία δε διέρχεται από το 0, θα τα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο.

(6) Έστω $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ $(n \geq 2)$, πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα σημεία $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Αν $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \int\limits_0^1 f\big((1-t)z_k + t\, z_{k+1}\big)\,dt .$$

Λύση. Σύμφωνα με το παράδειγμα 4.12 (2) η γ παραμετρικοποιείται ως εξής:

$$\gamma(t) = (k+1-t)\, z_k + (t-k)\, z_{k+1}, \quad t \in [k, k+1], \ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

και τότε $\gamma = \gamma_0 + \cdots + \gamma_{n-1}$ όπου $\gamma_k = \gamma / [k, k+1], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Παρατηρούμε ότι $\gamma_k{}'(t) = z_{k+1} - z_k, \quad t \in [k, k+1]$. Έπεται ότι

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f\big((k+1-t)z_k + t\, z_{k+1}\big)(z_{k+1} - z_k)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \int_k^{k+1} f\left((k+1-t)z_k + t\, z_{k+1}\right) dt \qquad (1).$$

Έστω $\sigma_k(t) = t - k, \quad t \in [k, k+1]$. Τότε η σ_k είναι C^1 απεικόνιση με αντίστροφη επίσης C^1, $\sigma_k{}'(t) = 1$ και $\sigma_k\left([k, k+1]\right) = [0,1]$. Θέτουμε $\delta_k(t) = (1-t)\, z_k + t\, z_{k+1}, \quad t \in [0,1]$, τότε $\gamma_k(t) = \delta_k \circ \sigma_k \Leftrightarrow \delta_k = \gamma_k \circ \sigma_k{}^{-1}$.

Αυτό σημαίνει ότι οι καμπύλες δ_k και γ_k είναι ισοδύναμες και άρα

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\delta_k} f(z)dz = (z_{k+1} - z_k)\int_0^1 f\left((1-t)z_k + t\, z_{k+1}\right) dt \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) έπεται το συμπέρασμα (πρβλ. και την παράγραφο 4.21).

<u>Σχέση ολομόρφων συναρτήσεων και διδιάστατων διανυσματικών πεδίων 4.35</u>

Ένα διδιάστατο <u>διανυσματικό πεδίο</u> (δ.π.) είναι μια συνεχής συνάρτηση $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου Ω ανοικτό σύνολο. Έστω $F = (F_1, F_2)$, το F λέγεται <u>αστρόβιλο</u> αν είναι C^1 και ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad (1)$$

και λέγεται <u>συντηρητικό</u> αν υπάρχει $f : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση ώστε

$$F = \nabla f \qquad \left(= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right)$$

(δηλαδή η F ισούται με την κλίση κάποιας C^1 πραγματικής συνάρτησης).

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι κάθε C^1 συντηρητικό δ.π. είναι αστρόβιλο.

Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα 4.32 έχει το αντίστοιχό του στο πλαίσιο των δ.π. το οποίο είναι το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση και $\gamma : [a,b] \to \Omega$ καμπύλη του (ανοικτού) Ω τότε

$$\int_\gamma \nabla f \bullet ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Μάλιστα μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 4.32 χρησιμοποιώντας το ανωτέρω αποτέλεσμα και βέβαια τη σχέση μιγαδικού και πραγματικού επικαμπυλίου ολοκληρώματος.

Είναι σαφές ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv$ ορισμένη στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ένα C^1 (στην πραγματικότητα C^∞) δ.π. Λόγω των εξισώσεων Cauchy-Riemann ισχύει η (1) για τα δ.π. $F = (v, u)$ και $G = (u, -v)$ τα οποία επομένως είναι αστρόβιλα. Περαιτέρω αποδεικνύεται ότι αν ο τόπος Ω είναι <u>απλά συνεκτικός</u> τότε τα F, G είναι συντηρητικά δ.π. (Ένας τόπος Ω λέγεται απλά συνεκτικός αν κάθε απλή κλειστή καμπύλη του Ω εγκλείει μόνο σημεία του Ω, δηλαδή αν ο Ω δεν έχει «τρύπες». Παραδείγματα τέτοιων τόπων είναι τα ανοικτά κυρτά και γενικότερα τα ανοικτά αστρόμορφα σύνολα. Το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ δεν είναι απλά συνεκτικός τόπος).

Το παράδειγμα 4.34 (1) της ολόμορφης συνάρτησης $f(z) = \dfrac{1}{z}$ η οποία δεν έχει παράγουσα στον τόπο $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έχει ως συνέπεια την ύπαρξη αστρόβιλου δ.π. το οποίο δεν είναι συντηρητικό. Πράγματι $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy \neq 0$. Άρα σύμφωνα με τις ανωτέρω παρατηρήσεις, το δ.π. $F(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2} \right)$ είναι αστρόβιλο στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Όμως αν $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε υπολογίζουμε εύκολα ότι $\int_\gamma F \bullet ds = 2\pi$, και έτσι από το θεώρημα στο οποίο αναφερθήκαμε παραπάνω, το F δεν είναι συντηρητικό.

Για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις, παραπέμπουμε στο [M₂] (στις παραγράφους: Επικαμπύλια ολοκληρώματα και Διανυσματικά πεδία).

<u>4.4 Ο δείκτης στροφής κλειστής καμπύλης</u>

Η έννοια του δείκτη στροφής κλειστής καμπύλης είναι πολύ σημαντική για τη θεωρία των ολομόρφων συναρτήσεων και όχι μόνο. Η έννοια αυτή έχει να κάνει με τον υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_\gamma \dfrac{d\zeta}{\zeta}$, όταν γ είναι κλειστή καμπύλη , με $0 \notin [\gamma]$ (και γενικότερα του $\int_\gamma \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$ με $z \notin [\gamma]$), υπολογισμό τον οποίο θίξαμε κατά την εξέταση του παραδείγματος 4.34 (5). Η τιμή αυτού του ολοκληρώματος όταν διαιρεθεί με τον αριθμό

$2\pi i$, μας δίνει <u>ακέραιο</u> αριθμό ο οποίος γεωμετρικά εκφράζει (και αυτό θα φανεί από την απόδειξη, αλλά και τα παραδείγματα που θα παραθέσουμε) τον αριθμό των περιστροφών του $\gamma(t)$ γύρω από το σημείο 0 (αντίστοιχα γύρω από το σημείο z).

Στην περίπτωση του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$, με την παραμέτρηση $\gamma(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}-\{0\}$ (και για το σημείο $z=0$) η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία εξακριβώνεται εύκολα, αφού ένας απλός υπολογισμός μας δίνει:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=\frac{1}{2\pi i}2\pi n i=n.$$

Και βέβαια ο ακέραιος n εκφράζει τον αριθμό των περιστροφών του $\gamma(t)$ (καθώς το t μεταβάλλεται από το 0 στο $2\pi n$) γύρω από το σημείο 0.

<u>**Ορισμός 4.36**</u> Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ κλειστή καμπύλη με $z\notin[\gamma]$. Ο αριθμός

$$\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

ονομάζεται ο <u>δείκτης στροφής</u> της γ ως προς το σημείο z.

Πρόκειται να αποδείξουμε, μεταξύ άλλων, ότι ο αριθμός $\delta_\gamma(z)$ είναι ακέραιος, για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε κάποιες απλές παρατηρήσεις.

<u>**Παρατήρηση 4.37**</u> (1) Για κάθε κλειστή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ και κάθε $z\notin[\gamma]$, ο υπολογισμός του $\delta_\gamma(z)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $\delta_\Gamma(0)$ για κάποια κατάλληλη κλειστή καμπύλη Γ.

Πράγματι, θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma(t)=\gamma(t)-z,\quad t\in[a,b]$ (η οποία είναι παράλληλη μεταφορά της γ). Η Γ είναι προφανώς κλειστή και $0\notin[\Gamma]$, επίσης έχουμε

$$\delta_\Gamma(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\delta_\gamma(z).$$

(2) Έστω $A\subseteq\mathbb{C}$ φραγμένο σύνολο. Τότε το σύνολο $\Omega=\mathbb{C}\setminus A$ έχει <u>μία μόνο</u> μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα. Πράγματι, έστω $R>0$ ώστε $A\subseteq\overline{\Delta(0,R)}$, τότε το $D=\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta(0,R)}$ είναι ανοικτό συνεκτικό μη φραγμένο και βέβαια $D\subseteq\mathbb{C}\setminus A=\Omega$.

Έστω C η συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το D, τότε η C είναι προφανώς μη φραγμένη και είναι η ζητούμενη συνεκτική συνιστώσα. Για να αποδείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό, ας υποθέσουμε ότι C' είναι κάποια μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του Ω, τότε $C' \cap D \neq \varnothing$ και άρα $C' \cap C \neq \varnothing$, από όπου έπεται ότι $C = C'$.

Θεώρημα 4.38 Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κλειστή καμπύλη. Τότε έχουμε:

(α) Ο αριθμός $\delta_\gamma(z)$ είναι ακέραιος για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

(β) Αν z, w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ τότε $\delta_\gamma(z) = \delta_\gamma(w)$.

(γ) Αν z ανήκει στην (μοναδική) μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$, τότε $\delta_\gamma(z) = 0$.

Απόδειξη. (α) Ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι $z = 0 \notin [\gamma]$ (παρατήρηση 4.37 (1)). Τότε έχουμε

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \qquad (1).$$

Επειδή ο $\dfrac{\omega}{2\pi i}$ είναι ακέραιος αν και μόνο αν $e^\omega = 1$, το γεγονός ότι ο $\delta_\gamma(0)$ είναι ακέραιος είναι ισοδύναμο με το ότι $\varphi(b) = 1$ όπου

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \right), \quad x \in [a,b] \qquad (2).$$

Η γ είναι κατά τμήματα C^1 καμπύλη, έτσι υπάρχουν σημεία $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$, ώστε η $\gamma / [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1,2,\dots,n$ να είναι C^1. Επομένως διαφορίζοντας τη (2) ευρίσκουμε

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \cdot \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \Rightarrow \left(\frac{\varphi(x)}{\gamma(x)} \right)' = 0, \quad x \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,2,\dots,n.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\dfrac{\varphi}{\gamma}$ είναι σταθερή στο καθένα από τα υποδιαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$ και άρα

$$\frac{\varphi(t_k)}{\gamma(t_k)} = \frac{\varphi(t_{k-1})}{\gamma(t_{k-1})}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Ιδιαίτερα έχουμε ότι , $\frac{\varphi(a)}{\gamma(a)}=\frac{\varphi(b)}{\gamma(b)}$ και επειδή η γ είναι κλειστή $\gamma(a)=\gamma(b)$, άρα $\varphi(a)=\varphi(b)$. Επειδή $\varphi(a)=e^0=1$, συμπεραίνουμε ότι $\varphi(b)=1$ και αυτό, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω, σημαίνει ότι ο $\delta_\gamma(0)$ είναι ακέραιος.

(β) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]\mapsto\delta_\gamma(z)\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{C}$$

είναι συνεχής. Αρκεί γι' αυτό να αποδείξουμε ότι αν $(z_n)\subseteq\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ είναι τυχούσα συγκλίνουσα ακολουθία με $z_n\to z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ τότε η ακολουθία συναρτήσεων $g_n(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z_n},\quad n\geq 1$, συγκλίνει ομοιόμορφα επί του συμπαγούς συνόλου $[\gamma]$ στη συνάρτηση $g(\zeta)=\frac{1}{\zeta-z}$. Επειδή $z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ και το $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ είναι ανοικτό, υπάρχει $r>0$ ώστε $\overline{\Delta(z,r)}\subseteq\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ και συνεπώς $\overline{\Delta(z,r)}\cap[\gamma]=\varnothing$. Υπάρχει τότε $N\in\mathbb{N}$ ώστε $n\geq N\Rightarrow z_n\in\Delta\left(z,\frac{r}{2}\right)$. Αν $\zeta\in[\gamma]$ και $n\geq N$ τότε $|\zeta-z_n|>\frac{r}{2}$ και $|\zeta-z|>r$.

Άρα θα έχουμε $|g_n(\zeta)-g(\zeta)|=\left|\frac{1}{\zeta-z_n}-\frac{1}{\zeta-z}\right|=\frac{|z_n-z|}{|\zeta-z_n|\cdot|\zeta-z|}\leq 2\frac{|z_n-z|}{r^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Έπεται ότι, πράγματι η (g_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[\gamma]$ στην g και άρα

$$\delta_\gamma(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_n(\zeta)\,d\zeta\to\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta=\delta_\gamma(z).$$

Έτσι αποδείξαμε ότι η $z\mapsto\delta_\gamma(z)$ είναι συνεχής επί του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ και άρα, αφού παίρνει ακέραιες τιμές, είναι σταθερή σε κάθε συνεκτικό υποσύνολο αυτού του συνόλου. (Υπενθυμίζεται ότι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι τα μονοσύνολα).

(γ) Το ίχνος της καμπύλης γ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ως συμπαγές. Έστω C η μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$, για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει $R>0$ ώστε $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta(0,R)}\subseteq C$ (παρατήρηση 4.37 (2)). Έστω $(z_n)\subseteq\mathbb{C}$ ώστε $z_n\to\infty$, τότε υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $z_n\in C$ για κάθε $n\geq N$ (3).

Ισχυριζόμαστε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $g_n(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z_n}, \quad n\geq 1$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[\gamma]$ στη σταθερή συνάρτηση $g(\zeta)=0$. Πράγματι, επειδή $z_n\to\infty$ η απόσταση $d(z_n,[\gamma])=\inf\limits_{\zeta\in[\gamma]}|\zeta-z_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$, άρα

$$\sup_{\zeta\in[\gamma]}|g_n(\zeta)|=\frac{1}{\inf\limits_{\zeta\in[\gamma]}|\zeta-z_n|}=\frac{1}{d(z_n,[\gamma])}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad (4).$$

(Υπενθυμίζουμε ότι, αν $A\subseteq\mathbb{C}$ και $z\in\mathbb{C}$ τότε ορίζουμε ως απόσταση του z από το A την ποσότητα $d(z,A)=\inf\{|z-\zeta|:\zeta\in A\}$). Από την (4) έπεται ότι

$$\delta_\gamma(z_n)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g_n(\zeta)\,d\zeta\to 0\,.$$

Επειδή η $\left(\delta_\gamma(z_n)\right)$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία ακεραίων συμπεραίνουμε ότι είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $\delta_\gamma(z_n)=0$ για κάθε $n\geq N_1$. Όμως η (z_n), από την (3), περιέχεται τελικά στη συνεκτική συνιστώσα C, έτσι από τον ισχυρισμό (β) έχουμε ότι $\delta_\gamma(z)=0$ για κάθε $z\in C$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 4.39 (1) Ας συμβολίσουμε με $\lambda(x)$ το ολοκλήρωμα στη σχέση (2), δηλ. $\lambda(x)=\int_a^x\dfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt, \quad x\in[a,b]$. Η απόδειξη του ισχυρισμού (α) υποδεικνύει ότι ο αριθμός $2\pi\delta_\gamma(0)$ είναι η ολική μεταβολή του φανταστικού μέρους του $\lambda(x)$, καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο b, και αυτή η ποσότητα είναι ίδια με την ολική μεταβολή του ορίσματος του $\gamma(x)$. Αν διαιρέσουμε αυτή τη μεταβολή με το 2π βρίσκουμε «τον αριθμό των περιστροφών της γ γύρω από το 0» και έτσι έχουμε τη γεωμετρική ερμηνεία του δείκτη στροφής. (πρβλ. το παράδειγμα 4.34 (5)).

Πλεονεκτήματα της παραπάνω απόδειξης (η οποία ανήκει στον L. Ahlfors) είναι η συντομία της και το ότι δεν χρησιμοποιεί την έννοια του ορίσματος μιγαδικού αριθμού. Η απόδειξη των ιδιοτήτων του δείκτη στροφής με χρήση του ορίσματος και των κλάδων του λογαρίθμου είναι μακρύτερη, αλλά περισσότερο διαφωτιστική όσον αφορά τη γεωμετρική φύση αυτού. Για μια τέτοια απόδειξη παραπέμπουμε στο [S-T] και στις ασκήσεις 16-18 της παραγρ. 6.7 του [M-X]. Την δεύτερη αυτή μέθοδο θα τη δούμε να εφαρμόζεται σ' ένα από τα παραδείγματα (4.40 (2)) που ακολουθούν.

(2) Ένα βαθύ θεώρημα της τοπολογίας του επιπέδου το οποίο ανήκει στον Jordan (Jordan curve theorem) ισχυρίζεται ότι:

«Κάθε απλή κλειστή καμπύλη γ του επιπέδου <u>αποσυνδέει</u> το επίπεδο». Δηλαδή,

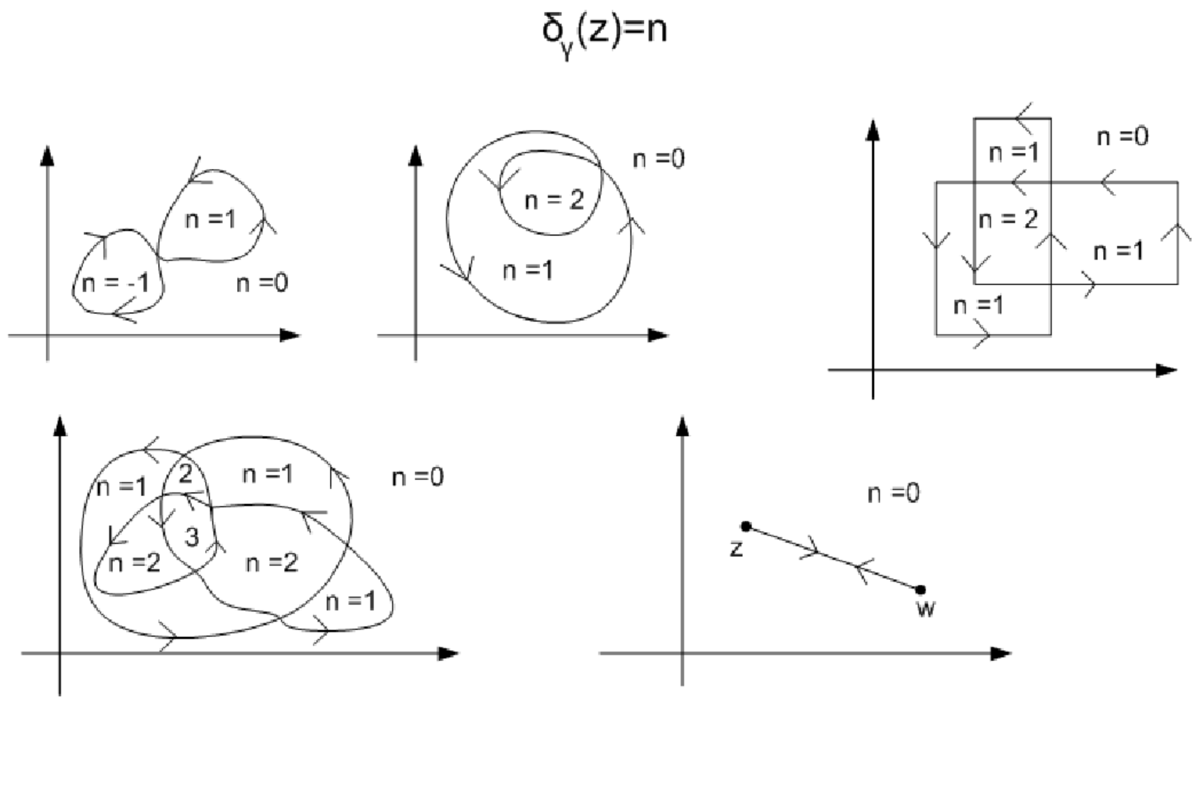
(α) Το $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, την μία φραγμένη και την άλλη μη φραγμένη, με κοινό σύνορο το ίχνος $[\gamma]$ της γ, και

(β) $\delta_\gamma(z)=\begin{cases}\pm 1, & \textit{αν το z ανήκει στη φραγμένη συνιστώσα}\\ 0\ , & \textit{αν το z ανήκει στη μη φραγμένη συνιστώσα}\end{cases}$

Η φραγμένη συνιστώσα ορίζεται ως το <u>εσωτερικό της</u> γ. Βέβαια σ' όλα τα παραδείγματα στα οποία θα έχουμε να εξετάσουμε απλές κλειστές καμπύλες, θα είμαστε σε θέση να ελέγξουμε απευθείας ότι $\delta_\gamma(z)=0$ ή $\delta_\gamma(z)=\pm 1$, για $z\notin[\gamma]$. Μάλιστα, επιλέγοντας τον «κατάλληλο» προσανατολισμό, θα έχουμε $\delta_\gamma(z)=0$ ή 1 για $z\notin[\gamma]$. (Ο «κατάλληλος» προσανατολισμός είναι αυτός που καθώς «κινούμαστε» επί της γ, η φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ είναι προς τα αριστερά μας).

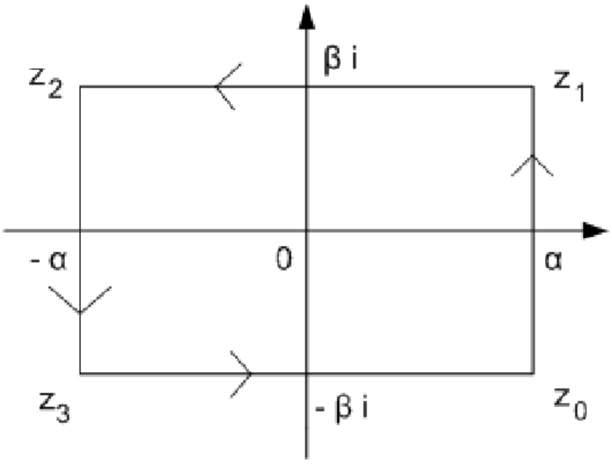
Σημειώνουμε ότι κατά τον υπολογισμό του δείκτη στροφής καμπύλης, κάθε «θετική» περιστροφή συνεισφέρει $+1$ στον ακέραιο $\delta_\gamma(z)$ και κάθε «αρνητική» περιστροφή συνεισφέρει -1.

<u>Παραδείγματα 4.40</u> 1) Παραθέτουμε πρώτα κάποια παραδείγματα όπου ο δείκτης στροφής υπολογίζεται «με το μάτι» (διαισθητικά).



2) Έστω $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Θεωρούμε την κλειστή πολυγωνική γραμμή
$\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_0]$ με κορυφές τα σημεία
$z_0 = \alpha - \beta i, \quad z_1 = \alpha + \beta i, \quad z_2 = -\alpha + \beta i, \quad z_3 = -\alpha - \beta i$ και z_0.
Να υπολογισθεί ο $\delta_\gamma(0)$.

Λύση.



Πρόκειται για τη θετικά προσανατολισμένη περίμετρο του παραλληλογράμμου με κορυφές z_0, z_1, z_2, z_3. Διαισθητικά είναι σαφές ότι $\delta_\gamma(0) = 1$. Προχωρούμε στον «αυστηρό» υπολογισμό του $\delta_\gamma(0)$. Χωρίζουμε την γ στις καμπύλες δ_1 και δ_2, όπου
$\delta_1 = [-\beta i, z_0] + [z_0, z_1] + [z_1, \beta i]$ και $\delta_2 = [\beta i, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, -\beta i]$.
Έπεται ότι $\gamma = \delta_1 + \delta_2$ και έτσι έχουμε

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Επειδή η $\dfrac{1}{z}$ έχει παράγουσα στον τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \le 0\}$ τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου και $[\delta_1] \subseteq \mathbb{C}_\pi$, έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}[\log(\beta i) - \log(-\beta i)] = \frac{i}{2\pi i}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

Από την άλλη μεριά, $[\delta_2] \subseteq \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \ge 0\}$ και η $\dfrac{1}{z}$ έχει παράγουσα στον $\mathbb{C}_0$ τον κλάδο του λογαρίθμου $\log_{2\pi}$ που ορίζεται σ' αυτόν τον τόπο (πρβλ. παραδ. 4.34 (5)).
Έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}[\log_{2\pi}(-\beta i) - \log_{2\pi}(\beta i)] = \frac{i}{2\pi i}\left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Εναλλακτικά μπορούμε να θέσουμε $\gamma_1 = [z_3, z_0] + [z_0, z_1] + [z_1, z_2]$, $\gamma_2 = [z_2, z_3]$ και να υπολογίσουμε τα $\int_{\gamma_1}\frac{d\zeta}{\zeta}$ και $\int_{\gamma_2}\frac{d\zeta}{\zeta}$ (Άσκηση).

3) Έστω $r > 0$ και $\gamma : [a,b] \to \overline{\Delta(a,r)}$ κλειστή καμπύλη. Τότε $\delta_\gamma(z) = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| > r$.

Λύση. Η μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $\Omega = \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ περιέχει το ανοικτό σύνολο $D = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta(a,r)}$. Επομένως, από το θεώρημα 4.38 (γ), $\delta_\gamma(z) = 0$, για όλα τα z.

<u>Ασκήσεις</u>

1) Θεωρούμε τις ακόλουθες καμπύλες με αρχικό σημείο το 0 και τελικό σημείο το $1+i$:

$\gamma_1 = [0, 1+i]$, $\gamma_2(t) = (1-\cos t) + i\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (τεταρτοκύκλιο κύκλου) και $\gamma_3 = [0,1] + [1, 1+i]$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) $\int_{\gamma_1} x\, dz = \frac{1+i}{2}$ (b) $\int_{\gamma_2} x\, dz = \frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\int_{\gamma_3} x\, dz = \frac{1}{2} + i$ (d) $\int_{\gamma_1} y\, dz = \frac{1+i}{2}$

(e) $\int_{\gamma_2} y\, dz = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}$ (f) $\int_{\gamma_3} y\, dz = \frac{i}{2}$

(g) $\int_{\gamma_1} z\, dz = \int_{\gamma_2} z\, dz = \int_{\gamma_3} z\, dz = i$

(h) $\int_{\gamma_1} \overline{z}\, dz = 1$ (i) $\int_{\gamma_2} \overline{z}\, dz = 1 + i\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$ και (j) $\int_{\gamma_3} \overline{z}\, dz = 1+i$

2) Υπολογίστε το $\int_\gamma z^4\, dz$, όπου $\gamma = [0, 1+i]$ χρησιμοποιώντας τον τύπο,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \, .$$

Αν $\gamma_1 = [0,1] + [1, 1+i]$, ποια είναι η τιμή του $\int_{\gamma_1} z^4\, dz$;

3) Αν $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$, υπολογίστε το $\int_\gamma f(z)\, dz$ στις ακόλουθες περιπτώσεις όπου η $f(z)$ ισούται με:

(α) $\dfrac{1}{z^2}$ (β) $\dfrac{1}{z}$ (γ) $\sinh z$ (δ) $\cos z$ (ε) $\tan z$ και (στ) $(\exp(z))^3$.

4) Έστω $\gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, \theta]$, όπου $0 < \theta \le 2\pi$ ($a \in \mathbb{C}, \quad r > 0$).

Αποδείξτε ότι $L(\gamma) = \theta \cdot r$.

5) <u>Ολοκλήρωση κατά μέρη</u>. Έστω f, g ολόμορφες συναρτήσεις στον τόπο D και γ μια καμπύλη του D με αρχικό σημείο το z_1 και τελικό σημείο το z_2 . Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma f \cdot g' dz = f(z_2) \cdot g(z_2) - f(z_1) \cdot g(z_1) - \int_\gamma f' \cdot g dz$$

[<u>Υπόδ.</u> Θεωρείστε ως γνωστό ότι οι f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις .]

6) Έστω $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{4+3z} \right| \le \frac{\pi}{100}$$

[<u>Υπόδ.</u> $\dfrac{1}{4+3z} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{z - \left(-\dfrac{4}{3}\right)}$.]

7) Έστω $\gamma(t) = e^{-4\pi i t}, \quad t \in [0,1]$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}, \qquad \int_\gamma \frac{dz}{z^n}, \quad n \geq 2 \qquad \text{και} \qquad \int_\gamma \frac{dz}{|z|}$$

8) Έστω γ μια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν Α του (φραγμένου) τόπου που περικλείει η γ δίνεται από τον τύπο

$$A = \frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z}\, dz .$$

Αποδείξτε ακόμη ότι: $A = -\int_\gamma y\, dz = \frac{1}{i}\int_\gamma x\, dz$ και βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma y\, dz$, όπου $\gamma(t) = 2 + 3e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

[<u>Υπόδ.</u> Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Green. Επίσης πρβλ. την Πρόταση 25.5 και την παράγραφο <u>Παραδείγματα και εφαρμογές</u> του [M_2].]

9) Έστω $a > 0$. Να βρεθεί το όριο:

$$I = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} \left(\frac{1}{t + ia} - \frac{1}{t - ia} \right) dt$$

[<u>Απάντηση:</u> $I = -2\pi i$.]

10) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma z\, e^{z^2} dz$, όπου γ είναι:

α) $\gamma = [2i, 2 - i]$ και

β) γ είναι η παραβολή $y = x^2$, από το 0 στο $1 + i$.

11) Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Αν $0 < r < R$ και $\gamma_r(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz .$$

12) α) Αποδείξτε ότι η αντιστοιχία

$$f \xrightarrow{\Phi} \frac{f'}{f}$$

απεικονίζει γινόμενα σε αθροίσματα. (Οι συναρτήσεις f υποτίθεται ότι είναι ολόμορφες με κοινό πεδίο ορισμού και βέβαια όχι ταυτοτικά μηδέν).

β) Αν $P(z)=(z-a_1)\cdots(z-a_n)$, όπου $a_1,\ldots,a_n$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(z)$, ποιά είναι η ρητή συνάρτηση $\frac{P'}{P}$;

γ) Έστω γ κλειστή καμπύλη ώστε $[\gamma]\subseteq \mathbb{C}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz=\delta_\gamma(a_1)+\cdots+\delta_\gamma(a_n).$$

δ) Αν η $\gamma(t)=\mathrm{Re}^{it}$, $\quad t\in[0,2\pi], R>0$, ώστε $|a_k|<1, \quad \forall k=1,2,\ldots,n$ τότε

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz=2\pi i n.$$

[<u>Υπόδ.</u> Για το (α) έχουμε ότι, $\frac{(f\cdot g)'}{f\cdot g}=\frac{f'\cdot g}{f\cdot g}+\frac{f\cdot g'}{f\cdot g}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}$. Με επαγωγή έχουμε το αποτέλεσμα $\forall n\geq 2$. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν $f_k(z)=z-a_k$, τότε $\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}=\frac{1}{z-a_k}$ και επομένως από τον ισχυρισμό (α) $\Phi(P)(z)=\frac{P'(z)}{P(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-a_k}$.]

13) Έστω γ κλειστή καμπύλη και f ολόμορφη σ' ένα ανοικτό σύνολο Ω ώστε $[\gamma]\subseteq\Omega$ και $f(\zeta)\neq 0 \quad \forall\zeta\in[\gamma]$. Αποδείξτε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\in\mathbb{Z}.$$

[<u>Υπόδ.</u> Έστω $\sigma=f\circ\gamma$, θεωρήστε τον $\delta_\sigma(0)$.]

14) Έστω $a\in\mathbb{R}$ με $|a|\neq 1$. Θέτουμε $I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2}dt$ και $J(a)=\int_0^{2\pi}\frac{1-a\cos t}{1-2a\cos t+a^2}dt$. Αποδείξτε ότι:

(α) $I(a)=0$ και (β) $J(a)=2\pi$, αν $0<|a|<1$, ενώ $J(a)=0$, αν $|a|>1$.

[<u>Υπόδ.</u> Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $\int\limits_{|z|=1}\frac{d\zeta}{\zeta-a}$.]

15) α) Δώστε ένα παράδειγμα κλειστής καμπύλης γ ώστε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k υπάρχει $z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ ώστε $\delta_\gamma(z)=k$.

β) Γενικεύστε με ένα παράδειγμα κλειστής καμπύλης γ ώστε για κάθε ακέραιο k υπάρχει $z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ ώστε $\delta_\gamma(z)=k$.

[<u>Υπόδ. για το (α):</u> Έστω $\gamma_0(t)=t^3\cdot e^{2\pi i\frac{1}{t}}$, $0<t\leq 1$ και $\gamma_0(0)=0$. Η γ_0 είναι σπειροειδής απλή C^1 καμπύλη η οποία περιστρέφεται άπειρες φορές γύρω από το 0. Θέσατε $\gamma=-\gamma_0+\gamma_1$, όπου $\gamma_1(t)=t-1$, $t\in[1,2]$.]

5. Το Θεώρημα του Cauchy και οι συνέπειές του

Το Θεώρημα του Cauchy είναι το κεντρικό θεώρημα της Θεωρίας των Ολομόρφων συναρτήσεων. Το θεώρημα αυτό ισχυρίζεται ότι, αν ο τόπος $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ πληρεί κατάλληλες τοπολογικές ιδιότητες (π.χ. δεν έχει «τρύπες») τότε κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{C}$ έχει παράγουσα. Εμείς, για τους σκοπούς μας, θα αποδείξουμε το θεώρημα Cauchy όταν ο Ω είναι κυρτός τόπος (και γενικότερα όταν είναι αστρόμορφος τόπος). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy μπορούμε να συναγάγουμε πολλές από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των ολομόρφων συναρτήσεων· ως παραδείγματα αναφέρουμε: Κάθε ολόμορφη συνάρτηση σ' έναν τόπο Ω είναι αναλυτική (δηλ. τοπικά δυναμοσειρά) και συνεπώς έχει παραγώγους κάθε τάξης. Κάθε αρμονική συνάρτηση σ' έναν τόπο Ω είναι C^∞ διαφορίσιμη. Οι τιμές μιας ολόμορφης συνάρτησης ορισμένης σε τόπο Ω καθορίζονται μοναδικά από τις τιμές της σ' ένα υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ το οποίο έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω. Σημειώνουμε επίσης ότι πολλά (και ενδιαφέροντα) πραγματικά ολοκληρώματα υπολογίζονται ευκολότερα με τη χρήση μεθόδων μιγαδικής ολοκλήρωσης.

5.1 Το θεώρημα Cauchy και ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Το πρώτο και βασικό βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος του Cauchy είναι το θεώρημα του Goursat (ή θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα). Για την απόδειξη του θεωρήματος Goursat θα χρειασθούμε κάποιες προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

Έστω (a,b,c) μία διατεταγμένη τριάδα μιγαδικών. Συμβολίζουμε με $T = T(a,b,c)$ το <u>κλειστό</u> τρίγωνο με κορυφές a,b,c, δηλαδή

$$T = \{\kappa a + \lambda b + \mu c : \ \kappa, \lambda, \mu \geq 0, \ \kappa + \lambda + \mu = 1\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το T είναι το <u>μικρότερο κυρτό</u> σύνολο που περιέχει τα σημεία a,b,c (δηλ. το εσωτερικό μαζί με την περίμετρο του τριγώνου). Θεωρούμε το σύνορο ∂T του T (την περίμετρο του T) ως την κλειστή πολυγωνική γραμμή με κορυφές a,b,c (πρβλ. παραδ. 4.12 (2)).

Έτσι $\partial T = [a,b]+[b,c]+[c,a]$. Αν $f:\partial T \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz$$ (πρβλ. παράδ. 4.34 (6)).

<u>Θεώρημα 5.1</u> (Goursat) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $p \in D$ και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{p\}$. Τότε για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$,

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0.$$

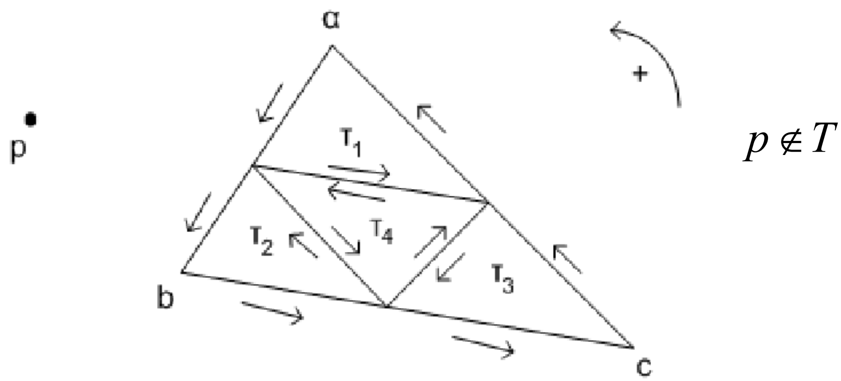
Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ με κορυφές a,b,c. Υποθέτουμε (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) ότι ο προσανατολισμός του T (τον οποίο καθορίζει η κλειστή πολυγωνική $\partial T = [a,b]+[b,c]+[c,a]$) συμπίπτει με τον θετικό προσανατολισμό του επιπέδου. Ακόμη υποθέτουμε ότι τα σημεία a,b,c δεν ευρίσκονται στην ίδια ευθεία.

(Αν τα a,b,c είναι συνευθειακά, τότε από τη συνέχεια της f έπεται ότι $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. Εξηγήστε το γιατί.)

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις σε σχέση με το p και το T.

(I) Το σημείο $p \notin T$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι ολόμορφη σε ανοικτή περιοχή του τριγώνου T. Θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του T και συνδέοντάς τα μεταξύ τους, χωρίζουμε το T σε τέσσερα ίσα τρίγωνα $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, προφανώς όμοια με τα αρχικό, με λόγο ομοιότητας ίσο με $\frac{1}{2}$. Αν θεωρήσουμε τα τρίγωνα αυτά ως θετικά προσανατολισμένα (όπως το αρχικό T) τότε εύκολα έπεται ότι

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial \tau_1} f(z)\,dz + \int_{\partial \tau_2} f(z)\,dz + \int_{\partial \tau_3} f(z)\,dz + \int_{\partial \tau_4} f(z)\,dz \tag{1}$$



Από την (1) έπεται ότι

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le \left|\int_{\partial \tau_1} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial \tau_2} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial \tau_3} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial \tau_4} f(z)\,dz\right| \qquad (2).$$

Όμως μία από τις τέσσερις απόλυτες τιμές στη δεξιά πλευρά της (2) θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από τις υπόλοιπες, συνεπώς

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial \mathrm{T}_1} f(z)\,dz\right|$$

όπου T_1 είναι κάποιο από τα τρίγωνα $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Επίσης

$$\ell(\partial T_1) = \frac{1}{2}\ell(\partial T) \qquad \text{και} \qquad d(T_1) = \frac{1}{2} d(T).$$

(Όπου, αν $A \subseteq \mathbb{C}$ τότε η διάμετρος $d(A)$ του A ορίζεται ως $d(A) = \sup\{|z-w|:\ \ z,w \in A\}$ και αν γ είναι καμπύλη, τότε ως συνήθως $\ell(\gamma)$ συμβολίζει το μήκος της καμπύλης.)

Επαναλαμβάνουμε τώρα το επιχείρημα με το τρίγωνο T_1 στη θέση του T και συνεχίζοντας με επαγωγή λαμβάνουμε μια ακολουθία ομοίων τριγώνων

$$T = T_0 \supseteq T_1 \supseteq \cdots \supseteq T_n \supseteq \cdots$$

έτσι ώστε για κάθε $n = 0,1,2,...$

$$\left| \int_{\partial T_n} f(z)\, dz \right| \le 4 \left| \int_{\partial T_{n+1}} f(z)\, dz \right|, \quad \ell(\partial T_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(\partial T_n) \quad \text{και} \quad d(T_{n+1}) = \frac{1}{2} d(T_n).$$

Έπεται ότι για κάθε $n = 1,2,...$

$$\left| \int_{\partial T} f(z)\, dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial T_n} f(z)\, dz \right|, \quad \ell(\partial T_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial T) \quad \text{και} \quad d(T_n) = \frac{1}{2^n} d(T) \qquad (3).$$

Η ακολουθία (T_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων (συμπαγών) υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ με $d(T_n) \to 0$. Επομένως η τομή όλων αυτών των τριγώνων θα είναι μονοσύνολο, έστω $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \{z_0\}$ (Θεώρημα Cantor, πρβλ. την ασκ. 18 του Κεφαλαίου I.)

Για να αποδείξουμε το ότι $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Επειδή η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\Delta(z_0, \delta) \subseteq \Omega \quad \text{και} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \qquad (4).$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T_N) = \frac{1}{2^N} d(T) < \delta$.

Τότε για $z \in \partial T_N$ έχουμε ότι $|z - z_0| \le d(T_N) < \delta$, αφού $z, z_0 \in T_N$ και συνεπώς από την (4) έπεται ότι

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon |z - z_0| \le \varepsilon \cdot d(T_N), \quad z \in \partial T_N \qquad (5).$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\int_{\partial T_N} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz = \int_{\partial T_N} f(z)\, dz,$$

αφού η συνάρτηση $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$, ως πολυώνυμο (πρώτου βαθμού) έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.

Έπεται από την (5) και την τριγωνική ανισότητα για το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρόταση 4.28) ότι

$$\left| \int_{\partial T_N} f(z)\, dz \right| \le \varepsilon \cdot d(T_N) \cdot \ell(\partial T_N),$$

η οποία λόγω της (3) έπεται ότι,

$$\frac{1}{4^N}\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\cdot\frac{d(T)}{2^N}\cdot\frac{\ell(\partial T)}{2^N}\,.$$

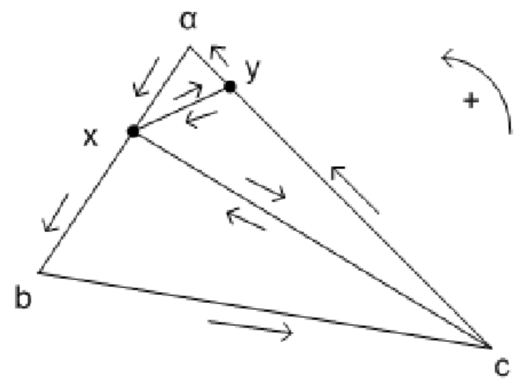
Κατά συνέπεια

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\cdot d(T)\cdot\ell(T)$$

και αφού το ε μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε μικρό, συμπεραίνουμε ότι $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

(II) Υποθέτουμε ότι το p είναι κορυφή του τριγώνου T και έστω $p=a$. Θεωρούμε σημεία x, y επί των πλευρών $[b,a]$ και $[c,a]$ του τριγώνου T και πλησίον του σημείου a. Τότε

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial T(a,x,y)} f(z)\,dz + \int_{\partial T(x,b,c)} f(z)\,dz + \int_{\partial T(x,c,y)} f(z)\,dz \qquad (6).$$



$p=a$ κορυφή του T

Επειδή η f είναι ολόμορφη σε περιοχή των τριγώνων $T(x,b,c)$ και $T(x,\mathrm{c},\mathrm{y})$, από την πρώτη περίπτωση έπεται ότι

$$\int_{\partial T(x,b,c)} f(z)\,dz = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\partial T(x,\mathrm{c},\mathrm{y})} f(z)\,dz = 0$$

και συνεπώς από την (6) έπεται ότι

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial T(a,x,y)} f(z)\,dz \qquad (7).$$

Παρατηρούμε ότι (υπενθυμίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $p=a$)

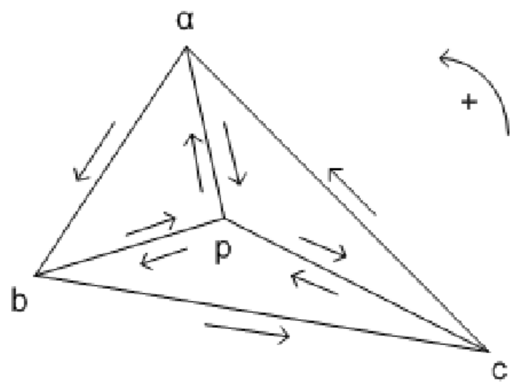
$$\left|\int_{\partial T(a,x,y)} f(z)\,dz\right| \le \|f\|_T\cdot\ell\big(\partial T(a,x,y)\big) = \|f\|_T\cdot(|a-x|+|x-y|+|y-a|)\,.$$

Επειδή $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\big(|\,a-x\,|+|\,x-y\,|+|\,y-a\,|\,\big)=0$, έπεται από την (7) ότι $\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz=0$.

(III) Το σημείο p είναι εσωτερικό του τριγώνου. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι

$$\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz=\int\limits_{\partial T(\mathrm{p},\alpha,\mathrm{b})} f(z)\,dz+\int\limits_{\partial T(\mathrm{p},b,c)} f(z)\,dz+\int\limits_{\partial T(\mathrm{p},c,\alpha)} f(z)\,dz \qquad (8).$$

Από την περίπτωση (II) τα τρία ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της (8) μηδενίζονται και έτσι έχουμε το συμπέρασμα.



p εσωτερικό σημείο του T

$(\mathrm{I}\,\mathrm{V})$ Το p είναι εσωτερικό σημείο πλευράς του τριγώνου. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη (και ευκολότερη) της προηγούμενης και έτσι η απόδειξη παραλείπεται.

Η απόδειξη του θεωρήματος Goursat είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση 5.2</u> Αν υποθέσουμε ότι η παράγωγος f' κάθε ολόμορφης συνάρτησης f είναι συνεχής, τότε το θεώρημα Goursat είναι απλή συνέπεια του θεωρήματος του Green. Αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση (I) του θεωρήματος. Έστω $f=u+iv$, τότε

$$\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz=\int\limits_{\partial T}(u\,dx-v\,dy)+\mathrm{i}\int\limits_{\partial T}(\mathrm{v}\,dx+u\,dy) \qquad (1).$$

Επειδή $f'=\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}$, οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ είναι συνεχείς. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Green στα ολοκληρώματα δεξιά της (1) και βρίσκουμε

$$\int\limits_{\partial T} f(z)\,dz=-\int\limits_{T}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\int\limits_{T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy\,.$$

Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έπεται ότι τα ολοκληρώματα στη δεξιά πλευρά είναι ίσα με μηδέν.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα του Cauchy για μια κλάση τόπων η οποία είναι ευρύτερη αυτής των κυρτών τόπων. Πρόκειται για την κλάση των αστρόμορφων τόπων (πρβλ. την άσκηση 17 του Κεφ. I). Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται αστρόμορφο ως προς το σημείο $a \in \Omega$, αν για κάθε $z \in \Omega$ ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z] \subseteq \Omega$. Παρατηρούμε ότι:

(α) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο ως προς κάθε σημείο του (προφανές).

(β) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό. (Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1.51 (β).)

Παραδείγματα αστρόμορφων τόπων (ισοδύναμα: ανοικτών και αστρόμορφων συνόλων) που δεν είναι κυρτοί, είναι κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{C} \setminus [z,\infty)$, όπου με $[z,\infty)$ συμβολίζουμε μία κλειστή ημιευθεία με κορυφή το z, και γενικότερα της μορφής $K \setminus [z,\infty)$, όπου $z \in K$ και K ανοικτό και κυρτό. Αν $a \in \mathbb{C}$, τότε το σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ είναι μη αστρόμορφος τόπος. (πρβλ. την άσκηση 17 του Κεφ. I, για περισσότερα παραδείγματα).

Θεώρημα 5.3 (Ύπαρξης παραγουσών σε αστρόμορφους τόπους).

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος (ειδικότερα: Ω κυρτός τόπος) και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αν για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$,

$$\int_{\partial T} f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

τότε η συνάρτηση f έχει παράγουσα στον Ω. Μάλιστα αν ο Ω είναι αστρόμορφος ως προς το $a \in \Omega$ και ορίσουμε

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta, \text{ για } z \in \Omega,$$

τότε η F είναι μια παράγουσα της f στο Ω.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το Ω είναι κυρτό σύνολο, επομένως αστρόμορφο ως προς κάθε σημείο του. Έστω z τυχόν σημείο του Ω, το οποίο σταθεροποιούμε. Θα αποδείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$, δηλαδή

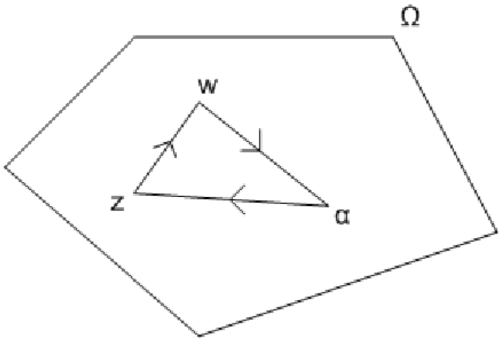
$$\lim_{w \to z} \frac{F(w) - F(z)}{w - z} = f(z) \qquad (1).$$

Από τον ορισμό της F (η οποία είναι καλά ορισμένη, εφ' όσον το Ω είναι κυρτό σύνολο και $a \in \Omega$) έχουμε ότι,

$$\frac{F(w) - F(z)}{w - z} = \frac{1}{w - z}\left[\int_{[a,w]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[a,z]} f(\zeta)\, d\zeta\right], \text{ για } w \in \Omega \text{ με } w \neq z \qquad (2).$$

Από την υπόθεσή μας έχουμε $\int_{\partial T} f(\zeta)\, d\zeta = 0$, για το τρίγωνο $T = T(a,w,z)$, επομένως

$$\int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,\alpha]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[\alpha,z]} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (3).$$



Έτσι η (2) μπορεί να γραφεί (χρησιμοποιώντας την (3))

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \frac{1}{w-z} \cdot \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Επειδή προφανώς ισχύει $f(z) = \dfrac{1}{w-z} \cdot \displaystyle\int_{[z,w]} f(\mathrm{z})\, d\zeta$ (αφού ολοκληρώνουμε την σταθερά συνάρτηση $g(\zeta) = f(z)$ επί της καμπύλης $[z,w]$, συμπεραίνουμε ότι,

$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) = \frac{1}{w-z} \cdot \int_{[z,w]} \left[f(\zeta) - f(z)\right] d\zeta \; .$$

Εφαρμόζοντας τώρα την τριγωνική ανισότητα για τα μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα έχουμε ότι,

$$\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\,w-z\,|} \cdot \sup_{\zeta\in[z,w]} |\, f(\zeta) - f(z)\,| \cdot |\,\mathrm{w}-\mathrm{z}\,| = \sup_{\zeta\in[z,w]} |\, f(\zeta) - f(z)\,| \quad (4).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο z, δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\Delta(z,\delta) \subseteq \Omega$ και $|\,\zeta - z\,| < \delta \Rightarrow |\, f(\zeta) - f(z)\,| < \varepsilon$. Επομένως αν $0 < |\,w - z\,| < \delta$, το δεξί μέλος της (4) είναι $\le \varepsilon$. Έτσι αποδείξαμε την (1).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο Ω είναι αστρόμορφος (ως προς το a) τόπος. Επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(z,\mathrm{r}) \subseteq \Omega$ και άρα, αν $w \in \Delta(z,\mathrm{r}), \mathrm{w} \neq \mathrm{z}$, το ευθύγραμμο τμήμα $[w,z] \subseteq \Omega$. Επειδή ο Ω είναι αστρόμορφος ως προς το a τόπος, έπεται ότι $[\zeta,\alpha] \subseteq \Omega$ για κάθε $\zeta \in [w,z]$. Ιδιαίτερα έπεται ότι το τρίγωνο $\mathrm{T}(\alpha,w,z)$ περιέχεται στον Ω. Η απόδειξη τώρα συνεχίζεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να απόδείξουμε το θεώρημα του Cauchy αλλά και τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy σε <u>αστρόμορφους</u> τόπους.

<u>Θεώρημα 5.4</u> (του Cauchy σε αστρόμορφους τόπους)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε

(α) Η f έχει παράγουσα στο Ω.

(β) Αν $\gamma:[a,b] \to \Omega$ είναι κλειστή καμπύλη του Ω, τότε

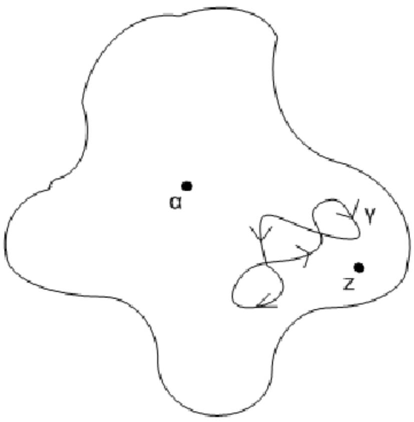
$$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0 \quad \text{και}$$

Επιπλέον αν $z \in \Omega \setminus [\gamma]$, τότε

$$f(z)\cdot\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,.$$

Ο ανωτέρω τύπος είναι γνωστός ως <u>τύπος του Cauchy</u> ή και <u>ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy.</u>

Ω αστρόμορφος ως προς a τόπος



Απόδειξη.

(α) Επειδή η συνάρτηση f είναι ολόμορφη, από το θεώρημα Goursat έπεται ότι $\int_{\partial T} f(\zeta)\,d\zeta = 0$, για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Έτσι, επειδή ο τόπος Ω είναι αστρόμορφος, από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η f έχει παράγουσα στον Ω.

(β) Το πρώτο συμπέρασμα αυτού του ισχυρισμού είναι προφανής συνέπεια του πρώτου ισχυρισμού και του θεωρήματος 4.32, αφού η καμπύλη γ είναι κλειστή. Για την απόδειξη του τύπου του Cauchy, θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\Omega \to \mathbb{C}$ που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$, για $\zeta \in \Omega \setminus \{z\}$ και $g(z)=f'(z)$.

Τότε η g είναι συνεχής στο z, αφού $\lim_{\zeta \to z} g(\zeta)=f'(z)=g(z)$ και ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z\}$ ως πηλίκο ολομόρφων. Από το θεώρημα του Goursat έπεται ότι $\int_{\partial T} \mathrm{g}(\zeta)\, d\zeta = 0$, για κάθε κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ και επειδή ο Ω είναι αστρόμορφος τόπος, η g έχει από το προηγούμενο θεώρημα παράγουσα στο Ω. Έπεται ότι $\int_{\gamma} \mathrm{g}(\zeta)\, d\zeta = 0$. Επειδή $z \notin [\gamma]$, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\mathrm{z})}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

(από τον ορισμό του δείκτη στροφής) $\quad = \; f(z)\cdot 2\pi i \cdot \delta_{\gamma}(z)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Πόρισμα 5.5</u> (Θεώρημα μέσης τιμής) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\overline{\Delta(\alpha,\mathrm{r})} \subseteq \Omega$ και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta .$$

Επίσης, αν $f=u+iv$, τότε ισχύει ο αντίστοιχος τύπος για τις u και v.

Απόδειξη. Θεωρούμε $R>r$, ώστε $\Delta(a,R)\subseteq \Omega$ και θέτουμε $\gamma(\theta)=a+re^{i\theta}, \quad \theta \in [0,2\pi]$. Από τον τύπο του Cauchy για το ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a,R)$ και την καμπύλη γ έχουμε

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta \,, \text{ αφού } \delta_{\gamma}(\alpha)=1$$

και συνεπώς

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})\,\mathrm{i}\, re^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta .$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο π.χ. για τη συνάρτηση v παρατηρούμε ότι

$$v(a)=\operatorname{Im} f(a)=\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\, d\theta\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{v}(a+re^{i\theta})\, d\theta .$$

<u>Παρατηρήσεις 5.6</u> 1) Το θεώρημα του Cauchy (και οι γενικεύσεις του) απεδείχθη από τον Cauchy το 1814 με την επιπλέον υπόθεση ότι η f' είναι συνεχής. Στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα ο Eduard Goursat απέδειξε ότι είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι η f' υπάρχει. Η απόδειξη του θεωρήματος 5.1 ανήκει στον Alfred Pringsheim, και είναι απλούστερη της απόδειξης του Goursat. (Πρβλ. και την παρατήρηση 5.2).

2) Η υπόθεση στο θεώρημα Goursat για το σημείο p, ότι δηλ. η f είναι συνεχής στο p και ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{p\}$ φαίνεται κάπως τεχνητή. Όμως χρειάσθηκε για την απόδειξη του τύπου του Cauchy, όπου ένα τέτοιο σημείο ήταν το $p=z$. Όπως θα διαπιστώσουμε λίγο αργότερα, η υπόθεσή μας για την f και το p έχει ως συνέπεια ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο <u>και στο</u> p, δηλαδή η f είναι ολόμορφη στο Ω.

3) Η σημασία του τύπου του Cauchy έγκειται στο γεγονός ότι αν η συνάρτηση f είναι ολόμορφη σ' ένα αστρόμορφο τόπο Ω και γ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη στο Ω, τότε οι τιμές της f στο εσωτερικό της γ καθορίζονται πλήρως από τις τιμές της f επί της καμπύλης γ, δηλαδή από τις «συνοριακές τιμές» της. Για παράδειγμα, αν $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $\overline{\Delta(\alpha,\mathrm{r})}\subseteq\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη τότε από τον τύπο του Cauchy έχουμε (πρβλ. και την απόδειξη του πορίσματος 5.5) ότι

$$f(\mathrm{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,,\ \text{ για }\ z\in\Delta(a,r).$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές της f για $z\in\Delta(a,r)$ καθορίζονται από τις τιμές της f πάνω στον κύκλο $C(a,r)$.

<u>Παραδείγματα 5.7</u> 1) <u>Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.</u>

Ως μια άμεση και απλή εφαρμογή του τύπου του Cauchy, αποδεικνύουμε το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το οποίο ισχυρίζεται ότι: Αν $\mathrm{p}(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ είναι μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο ($n\geq 1$ και $a_n\neq 0$), τότε το p έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα.

Επειδή το p είναι μη σταθερό έπεται ότι

$$\lim_{z\to\infty}\mathrm{p}(z)=\infty\Leftrightarrow\lim_{|z|\to+\infty}|\mathrm{p}(z)|=+\infty \qquad (1).$$

Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $\mathrm{p}(z)\neq 0\ \ \forall z\in\mathbb{C}$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy (ή το Πορ. 5.5) για το (κυρτό) σύνολο $\Omega=\mathbb{C}$, την καμπύλη $\gamma(\theta)=re^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, όπου $r>0$, το σημείο $z=0$ και τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{p}(z)},\ z\in\mathbb{C}$. Τότε έχουμε

$$f(0)\cdot\delta_\gamma(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\quad\Rightarrow\quad\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=\frac{2\pi i}{P(0)}\neq 0.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε,

$$\left|\int_\gamma \frac{1}{\mathrm{p}(\zeta)\cdot\zeta}\,d\zeta\right| \le 2\pi r\cdot\max_{|\zeta|=r}\left|\frac{1}{\zeta\cdot p(\zeta)}\right| = 2\pi r\cdot\frac{1}{\min\limits_{|\zeta|=r}\left|\zeta\cdot p(\zeta)\right|} = 2\pi r\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\min\limits_{|\zeta|=r}\left|\mathrm{p}(\zeta)\right|} =$$

$= \dfrac{2\pi}{\min\limits_{|\zeta|=r}\left|\mathrm{p}(\zeta)\right|} \underset{r\to+\infty}{\to} 0$. Το τελευταίο όριο ισούται με 0, εφ' όσον $\lim \min\limits_{|\zeta|=r} |\mathrm{p}(\zeta)| = +\infty$. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο.

Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο κύκλος $C(0,r)$ είναι συμπαγές σύνολο και το κλασικό αποτέλεσμα ότι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα συμπαγές $K \subseteq \mathbb{C}$ επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (πρβλ. τις ασκήσεις του Κεφ. I). Έτσι αν $\zeta_r \in C(0,r)$: $|\mathrm{p}(\zeta_r)| = \min\limits_{|\zeta|=r} |\mathrm{p}(\zeta)|$, τότε βέβαια $\zeta_r \underset{r\to+\infty}{\to} \infty$ (αφού $|\zeta_r| = r$), άρα $\mathrm{p}(\zeta_r) \to \infty$.

Σημειώνουμε ότι από το παραπάνω αποτέλεσμα έπεται ότι το πολυώνυμο p βαθμού $n \ge 1$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\mathrm{p}(z) = a_n(z-\rho_1)\cdots(z-\rho_n)$$

όπου $\rho_1,\ldots,\rho_n$ οι ρίζες του. Αυτό έπεται εύκολα από την παρατήρηση ότι, αν a ρίζα του p τότε το $z-a$ διαιρεί το p, άρα $\mathrm{p(z)} = (\mathrm{z}-a)\cdot\mathrm{q(z)}$, όπου q πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

2) <u>Ο μιγαδικός λογάριθμος</u>. Για τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου ισχύει ότι,

$$\log z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \text{όπου} \quad z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus\{t \in \mathbb{R} : t \le 0\} \qquad (1).$$

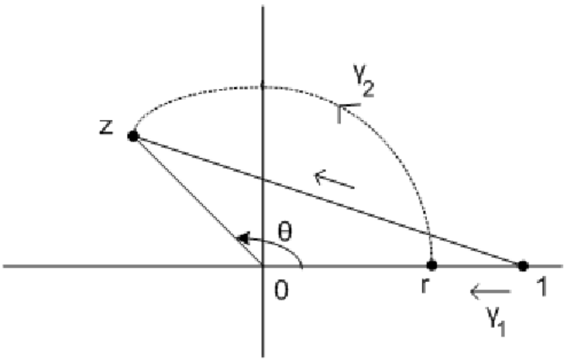
Θέτουμε $\Phi(z) = \displaystyle\int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$. Επειδή ο τόπος $\mathbb{C}_\pi$ είναι αστρόμορφος ως προς το 1 (και κάθε $t > 0$) έπεται από το θεώρημα 5.4 (και το θεώρημα 5.3) ότι η Φ είναι μια παράγουσα της $\dfrac{1}{z}$ στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$. Όπως γνωρίζουμε για τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου ισχύει επίσης $\log' z = \dfrac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$. Έτσι οι συναρτήσεις $\Phi(z)$ και $\log z$ διαφέρουν κατά μία σταθερά, και επειδή $\Phi(1) = \log(1) = 0$, έπεται ότι $\Phi(z) = \log z$, για $z \in \mathbb{C}_\pi$. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τόπος $\mathbb{C}_\pi$ δεν είναι κυρτός.

Περαιτέρω παρατηρούμε ότι ο τύπος (1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτικός ορισμός του <u>πρωτεύοντος</u> κλάδου του λογαρίθμου στον $\mathbb{C}_\pi$. Πράγματι, αρκεί γι' αυτό να υπολογίσουμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\Phi(z)$, $z \in \mathbb{C}_\pi$.

Για τον υπολογισμό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε (πάλι) το θεώρημα 5.4 (του Cauchy). Έστω $z \in \mathbb{C}_\pi$, $z = re^{i\theta}$, όπου $r = |z|$ και $\theta \in (-\pi, \pi)$. Ορίζουμε μία καμπύλη $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ως ακολούθως: $\gamma_1 = [1, r]$ και $\gamma_2(t) = re^{it}$, όπου $t \in [0, \theta]$ αν $\theta > 0$ και $t \in [\theta, 0]$ αν $\theta < 0$. Τότε ισχύει

$$\Phi(z) = \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \log r + i\theta .$$

Ας ελέγξουμε αυτή την ισότητα π.χ. στην περίπτωση όπου $r < 1$ και $\theta > 0$.



$z = re^{i\theta}$

Επειδή η καμπύλη $[r,1] + [1,z] - \gamma_2 = -[1,r] + [1,z] - \gamma_2$ είναι κλειστή και βρίσκεται στον αστρόμορφο τόπο $\mathbb{C}_\pi$, έπεται από το θεώρημα του Cauchy ότι

$$\int_{-[1,r]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{-\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-[1,r]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0 \quad \Rightarrow$$

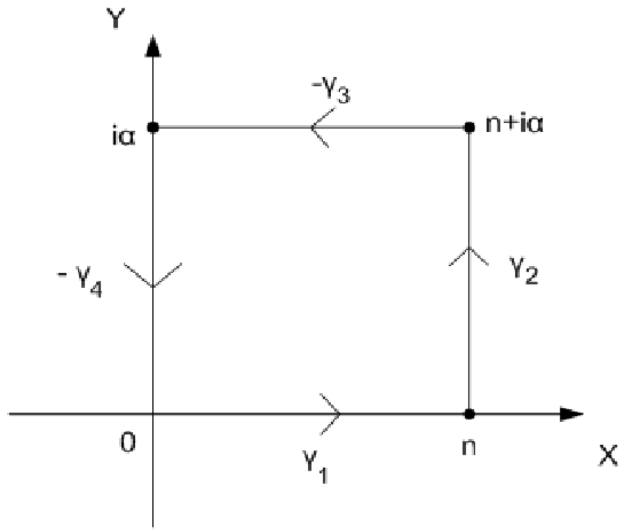
$$\Phi(z) = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{[1,r]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = (\log r - \log 1) + \int_0^\theta \frac{re^{i\theta} \cdot i}{re^{i\theta}}\, d\theta = \log r + i\theta \quad .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται η ισότητα και στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Τέλος σημειώνουμε ότι ο παραπάνω εναλλακτικός ορισμός του πρωτεύοντος κλάδου του λογαρίθμου μας δίνει και μια εναλλακτική απόδειξη της συνέχειας του πρωτεύοντος ορίσματος στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$. (Γιατί;)

3) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ αποδείξτε ότι:

(α) $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2ax)\, dx = e^{-a^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και (β) $\int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2ax)\,dx = e^{-a^2}\int_0^a e^{x^2}\,dx, \quad (a\in\mathbb{R})$.

Λύση. Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $a>0$. Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του σχήματος, με κορυφές $0,\ n,\ n+ia,\ ia$, όπου $n\in\mathbb{N}$.



Για τις πλευρές του ορθογωνίου χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες παραμετρήσεις:

$\gamma_1(x)=x,\ x\in[0,n], \quad \gamma_2(y)=n+iy,\ y\in[0,a], \quad \gamma_3(x)=x+ia,\ x\in[0,n]$ και $\gamma_4(y)=iy,\ y\in[0,a]$.

Θέτουμε $\gamma_n=\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$ και παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια ισοδύναμη παραμέτρηση της πολυγωνικής γραμμής με κορυφές $0,\ n,\ n+ia,\ ia,\ 0$, δηλαδή της περιμέτρου του ορθογωνίου.

Από το θεώρημα του Cauchy για κυρτά σύνολα, την ολόμορφη συνάρτηση $f(z)=e^{-z^2},\quad z\in\mathbb{C}$ και την κλειστή καμπύλη γ_n έχουμε ότι $\int_{\gamma_n} e^{-z^2}dz=0$.

Έπεται ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$0=\int_0^n e^{-x^2}\,dx+\int_0^a ie^{-(n+iy)^2}\,dy-\int_0^n e^{-(x+ia)^2}\,dx-\int_0^a ie^{-(iy)^2}\,dy = J_1+J_2-J_3-J_4 \qquad (1).$$

Παρατηρούμε ότι:

$$J_1 \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$|J_2|\le\int_0^a e^{-n^2+y^2}\,dy=e^{-n^2}\cdot\int_0^a e^{y^2}\,dy \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$J_3 = \int_0^n e^{-x^2-2iax+a^2}\, dx = e^{a^2} \cdot \int_0^n e^{-x^2} (\cos 2ax - i \sin 2ax)\, dx$$

$$= e^{a^2} \cdot \int_0^n e^{-x^2} \cos 2ax\, dx - ie^{a^2} \cdot \int_0^n e^{-x^2} \sin 2ax\, dx$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad e^{a^2} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\, dx - ie^{a^2} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\, dx\,.$$

$$J_4 = i\int_0^a e^{y^2}\, dy = i\int_0^a e^{x^2}\, dx\,.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ στην (1) έχουμε

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx - e^{a^2} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\, dx\right] + i\left[\int_0^a e^{-x^2}\, dx - e^{a^2} \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\, dx\right] = 0\,.$$

Εξισώνοντας το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ισότητας αυτής με το μηδέν, λαμβάνουμε τις ισότητες (α) και (β).

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα υπολογίσθηκαν από τον Cauchy με αυτή τη μέθοδο στις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

5.2 Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy και εφαρμογές

Υπενθυμίζουμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση f ορισμένη στο ανοικτό σύνολο Ω λέγεται αναλυτική, αν για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχουν $r = r(a) > 0$ και μιγαδικοί αριθμοί

$c_n = c_n(a),\ n \geq 0$, ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \Delta(a,r)$.

(Πρβλ. τον ορισμό 3.25).

Είναι σαφές ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολόμορφη, μάλιστα έχει μιγαδικές παραγώγους κάθε τάξης (πρβλ. το θεώρημα 3.26). Ο στόχος μας είναι η απόδειξη του αντιστρόφου, δηλαδή ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική. Άλλες ενδιαφέρουσες συνέπειες του τύπου του Cauchy είναι: οι ανισότητες Cauchy, το Θεώρημα Liouville κτλ.

Λήμμα 5.8 Έστω $\varphi, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θέτουμε $\Omega = \mathbb{C} \setminus g([a,b])$ και ορίζουμε $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με τον τύπο,

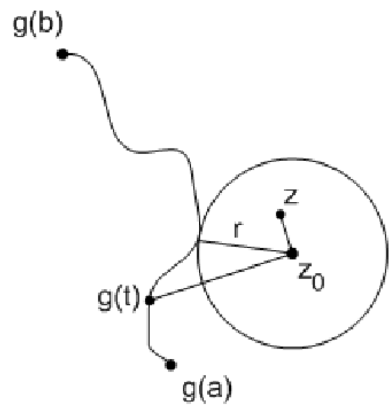
$$f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t) - z} dt, \quad z \in \Omega.$$

Τότε: (α) Η f είναι αναλυτική στο ανοικτό Ω, μάλιστα για κάθε $z_0 \in \Omega$ η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου z_0 και ακτίνας $\geq r = d(z_0, g([a,b]))$.

(β) Οι συντελεστές $c_n = c_n(z_0),\ n \geq 0$ της εν λόγω δυναμοσειράς δίνονται από τον τύπο

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1}}\ dt \qquad (1).$$

Απόδειξη. Η g είναι συνεχής στο συμπαγές διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ και άρα το $g([a,b])$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Έτσι το $\Omega = \mathbb{C} \setminus g([a,b])$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$. Έστω $z_0 \in \Omega$, υπάρχει τότε $r > 0$ ώστε $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$. (Ο μεγαλύτερος θετικός r ώστε $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$ είναι ο $r = d(z_0, g([a,b]))$, εξηγήστε το γιατί.)



Παρατηρούμε ότι αν $z \in \Delta(z_0, r)$ και $\mathrm{t} \in [a,b]$ τότε $|z - z_0| < r$ και $|\mathrm{g(t)} - z_0| \geq r$, επομένως

$$\frac{|z - z_0|}{|g(t) - z_0|} \leq \frac{|z - z_0|}{r} < 1.$$

Έπεται ότι, αν $z \in \Delta(z_0, r)$ και $\mathrm{t} \in [a,b]$ τότε, από τις ιδιότητες της γεωμετρικής σειράς, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{g(t) - z_0}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{z - z_0}{g(t) - z_0}\right)} = \frac{g(t) - z_0}{g(t) - z} \Rightarrow \frac{1}{g(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(g(t) - z_0)^{n+1}}.$$

Άρα,
$$\frac{\varphi(t)}{g(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t)\, \frac{(z - z_0)^n}{(g(t) - z_0)^{n+1}}, \quad t \in [a,b], \quad z \in \Delta(z_0, r) \qquad (2).$$

Η συνάρτηση φ είναι φραγμένη, ως συνεχής σε συμπαγές σύνολο, επομένως υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\varphi(t)| \leq M$, για $\mathrm{t} \in [a,b]$. Αν, προς στιγμήν, σταθεροποιήσουμε το $z \in \Delta(z_0, r)$ έχουμε ότι

$$|\varphi(t)| \cdot \left|\frac{(z - z_0)^n}{(g(t) - z_0)^{n+1}}\right| \leq M \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r} \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^n}, \quad t \in [a,b].$$

Επειδή η (γεωμετρική) σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^n}$ είναι συγκλίνουσα, αφού $\dfrac{|z - z_0|}{r} < 1$, από το Κριτήριο Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά συνεχών συναρτήσεων στη (2) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του $[a,b]$ στη συνάρτηση $\dfrac{\varphi(\mathrm{t})}{g(t) - z}$. Επομένως ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της (2) και εναλλάσσοντας την άθροιση με την ολοκλήρωση (που επιτρέπεται λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης) λαμβάνουμε ότι, για $z \in \Delta(z_0, r)$

$$f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\mathrm{g}(t) - z}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^b \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\left(g(t) - z_0\right)^{n+1}}\, dt\right](z - z_0)^n \qquad (3).$$

Η (3) γράφεται $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in \Delta(\mathrm{z}_0, r)$, όπου

$c_n = \displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(\mathrm{t})}{\left(g(t) - z_0\right)^{n+1}}\, dt$, για $n \geq 0$ και από το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών

έχουμε $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, για $n \geq 0$. Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

Σημείωση 5.8.1 Το παραπάνω λήμμα ισχύει και με την (ασθενέστερη) υπόθεση ότι η συνάρτηση φ είναι Riemann ολοκληρώσιμη (Άσκηση).

Πρόταση 5.9 Έστω $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ καμπύλη και $\varphi:[\gamma]\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $\Omega=\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ και

$$f(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\Omega.$$

Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και αν $z\in\Omega$ τότε

$$f^{(n)}(z)=n!\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n\geq 0.$$

Μάλιστα η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου z και ακτίνας σύγκλισης $r\geq d(z,[\gamma])$, με συντελεστές $\dfrac{f^{(n)}(z)}{n!},\quad n\geq 0$.

Απόδειξη. Αν $z\in\Omega$, τότε

$$f(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_a^b \frac{\varphi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t\in[a,b]\mapsto\varphi(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\in\mathbb{C}$ είναι φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών, έπεται ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έτσι το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 5.8 και τη Σημείωση 5.8.1.

Παραδείγματα 5.10 Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους

(α) $f(z)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{2i-z}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{2i\}$.

(β) $f(z)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{t^3-z}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{t}^3:\mathrm{t}\in[0,1]\}=\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

(γ) $f(z)=\displaystyle\int_a^b\frac{\sqrt{t}+it^2}{\log t-z}\,dt$ όπου $0<a<b$ και $z\in\mathbb{C}\setminus[\log a,\log b]$.

(δ) $f(z)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{t^2}}{\cos t-z}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

(ε) $f(z)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[3]{t^2}+\mathrm{i}\cos t}{e^{it}-z}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\mathrm{e}^{it}:\mathrm{t}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

<u>**Θεώρημα 5.11**</u> (Αναλυτικότητα ολομόρφων συναρτήσεων).

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και αν $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ $(r>0)$, τότε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z\in\Delta(a,r)$ όπου

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n\geq 0.$$

Απόδειξη. Επειδή ο δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι συμπαγής και $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ έπεται ότι υπάρχει $R>r$ ώστε $\Delta(a,R)\subseteq\Omega$ (για παράδειγμα μπορούμε να θέσουμε $R=d(a,\mathbb{C}\setminus\Omega)$). Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Cauchy για την ολόμορφη συνάρτηση f περιορισμένη στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a,R)$ και την καμπύλη $\gamma(t)=a+re^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$ (την οποία ως συνήθως συμβολίζουμε με $\mathrm{C}(a,\mathrm{r})$). Έπεται ότι

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z\in\Delta(a,r).$$

Από την Πρόταση 5.9 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση

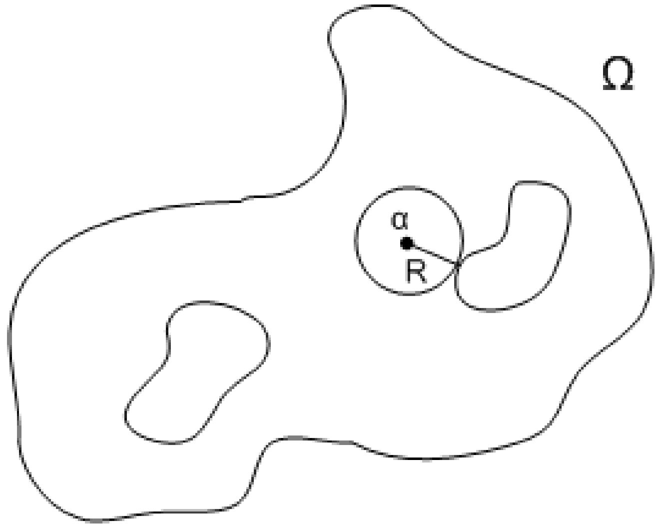
$$\mathrm{g}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z\in\mathbb{C}\setminus C(a,r)$$

είναι μια <u>αναλυτική επέκταση</u> της f στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus C(a,r)$ (προφανώς $\Delta(a,r)\subseteq\mathbb{C}\setminus C(a,r)$). Επομένως η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a, ακτίνα $\geq r$ και με συντελεστές

$$c_n = \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n\geq 0.$$

Επειδή οι συναρτήσεις g και f ταυτίζονται στον δίσκο $\Delta(a,\mathrm{r})$ έπεται ότι $f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)$, για $n\geq 0$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>**Παρατήρηση 5.11.1**</u> Πρέπει να είναι σαφές από την απόδειξη του θεωρήματος 5.11 (επειδή μπορούμε να θεωρούμε το r οσοδήποτε πλησίον της ποσότητας $R=d(a,\mathbb{C}\setminus\Omega)$) ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς κέντρου a στην οποία αναλύεται τοπικά η f είναι $\geq R$. Επομένως για κάθε $a\in\Omega$ η ολόμορφη συνάρτηση f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a <u>στον μεγαλύτερο δίσκο</u> $\Delta(a,\mathrm{r})$ <u>ο οποίος περιέχεται στο</u> Ω.



<u>Παράδειγμα 5.12</u> Έστω (a_n) μία ακολουθία η οποία ορίζεται από την εξίσωση

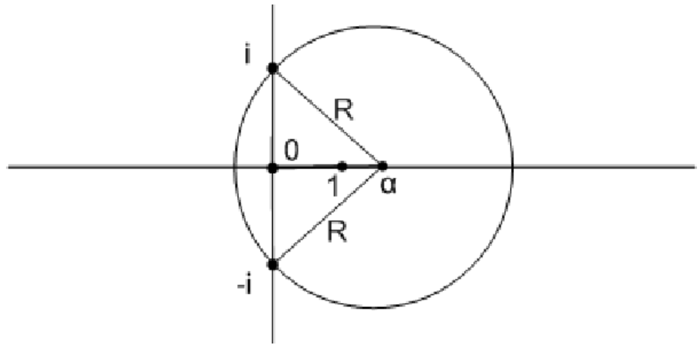
$$1-\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^4-\mathrm{x}^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mathrm{x}-a)^n, \quad 0<x<1 \tag{1}$$

όπου $a\in\mathbb{R}$. Βρείτε το $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}$.

Λύση. Μια απλή εφαρμογή της γεωμετρικής σειράς συμπεραίνει ότι

$$1-z^2+z^4-z^6+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}=\frac{1}{1+z^2}, \quad |z|<1.$$

Επομένως το αριστερό μέλος της (1) ισούται με $\dfrac{1}{1+x^2}$ για $0<x<1$. Η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ και άρα τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά σε κάθε $a\in\Omega$ με ακτίνα σύγκλισης $R\geq d(a,\{\pm\mathrm{i}\})$ · εν προκειμένω ισχύει ισότητα (Γιατί;). Έτσι υπολογίζουμε $R=\sqrt{1+a^2}\geq 1$ και επειδή $(0,1)\subseteq\Delta(a,R)$, έχουμε ότι $a\geq 1$ και $R\geq\sqrt{2}$. Έπεται προφανώς ότι $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{R}$.



Παρατηρούμε ότι $(a_n)\subseteq\mathbb{R}$ (Γιατί;).

<u>**Θεώρημα 5.13**</u> (Ανισότητες Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Θέτουμε $M(a,r) = \sup\{| f(\zeta)|: \, |\zeta - a| = r\}$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$| f^{(n)}(a)| \leq n! \frac{M(a,r)}{r^n}, \quad n \geq 0 \qquad (1).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.11 έχουμε

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0.$$

Κατά συνέπεια $$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{\zeta \in C(a,r)} \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M(a,r)}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(a,r)}{r^n}.$$

Από όπου έπεται η (1).

Το προηγούμενο Θεώρημα αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως: «Οι εκτιμήσεις του Cauchy».

Το επόμενο Θεώρημα ονομάζεται Θεώρημα του Liouville, αν και είχε πρώτα αποδειχθεί από τον Cauchy. Υπενθυμίζουμε ότι μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}$) ονομάζεται <u>ακέραια</u> συνάρτηση.

<u>**Θεώρημα 5.14**</u> (Liouville) Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

Απόδειξη. Έστω $| f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε από την ανισότητα (1) του προηγούμενου Θεωρήματος με $n = 1$, κάθε σημείο $a \in \mathbb{C}$ και κάθε ακτίνα $r > 0$, βρίσκουμε

$$| f'(\alpha)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0.$$

Επομένως $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και έτσι η f είναι σταθερή.

Από το Θεώρημα Liouville έπεται εύκολα μία ακόμη απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας.

<u>**Θεώρημα 5.15**</u> Κάθε μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το Θεώρημα με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ για το οποίο το Θεώρημα δεν ισχύει. Τότε $P(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και επομένως η συνάρτηση $F(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ είναι ακέραια συνάρτηση. Θα αποδείξουμε ότι η F είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$.
Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

από όπου εύκολα έπεται ότι $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$. Κατά συνέπεια $\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$ και έτσι για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$|z| \geq r \Rightarrow |F(z)| \leq 1.$$

Επειδή η F είναι συνεχής και ο δίσκος $\overline{\Delta(0,r)}$ είναι συμπαγές σύνολο, η $F / \overline{\Delta(0,r)}$ είναι φραγμένη. Έστω $M = \sup_{|z| \leq r} |F(z)|$, τότε $|F(z)| \leq \max\{1, M\}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η F είναι μια φραγμένη ακέραια συνάρτηση. Από το Θεώρημα Liouville η F είναι σταθερή συνάρτηση. Επομένως και το πολυώνυμο p είναι σταθερό και αυτή η αντίφαση αποδεικνύει το αποτέλεσμα.

Σημείωση. Η απόδειξη του Θεωρήματος του Liouville (επί του οποίου βασίστηκε η παρούσα απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας), χρησιμοποιεί τις εκτιμήσεις του Cauchy (για $n = 1$) και άρα τον «τύπο του Cauchy για παραγώγους» του Θεωρήματος 5.11. Δηλαδή τον τύπο

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta .$$

Η απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας που δώσαμε στο παράδειγμα 5.7 (1) είναι πιο στοιχειώδης, αφού χρησιμοποιεί μόνο τον τύπο του Cauchy.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε έναν γενικότερο τύπο του Cauchy για παραγώγους σε σχέση με αυτόν του Θεωρήματος 5.11.

Θεώρημα 5.16 (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους).

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\gamma : [a,b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη. Αν $z \in \Omega \setminus [\gamma]$ και $n \geq 0$ τότε

$$f^{(n)}(z) \cdot \delta_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (1).$$

Απόδειξη. Για $n = 0$ η (1) μας δίνει τον γνωστό τύπο του Cauchy, δηλαδή

$$f(z)\cdot\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\,, \qquad z\in\Omega\setminus[\gamma].$$

Από την Πρόταση 5.9 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση

$$\mathrm{g}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\,, \qquad z\in\mathbb{C}\setminus[\gamma]$$

είναι μια αναλυτική επέκταση της συνάρτησης $h(z)=f(z)\cdot\delta_\gamma(z)$ στον τόπο $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ (προφανώς, $\Omega\setminus[\gamma]\subseteq\mathbb{C}\setminus[\gamma]$).

Έτσι αν $\overline{\Delta(a,r)}\subseteq\Omega\setminus[\gamma]$, τότε η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a στον δίσκο $\Delta(a,r)$ με συντελεστές

$$c_n=\frac{g^{(n)}(a)}{n!},\quad n\geq 0\,,\ \text{όπου}\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n\geq 0 \qquad (2).$$

Παρατηρούμε ότι, εφ' όσον (ο δείκτης στροφής είναι σταθερός στις συνεκτικές συνιστώσες του Ω και) ο δίσκος $\Delta(a,r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Ω (ως κυρτό σύνολο) ισχύει ότι

$$\delta_\gamma(a)=\delta_\gamma(z),\ \text{για}\ z\in\Delta(a,r).$$

Επειδή $\mathrm{g}(z)=f(z)\cdot\delta_\gamma(z)$, για $z\in\Delta(a,r)$ έπεται ότι $\mathrm{g}(z)=f(z)\cdot\delta_\gamma(\alpha)$, για $z\in\Delta(a,r)$. Κατά συνέπεια $\mathrm{g}^{(n)}(\alpha)=f^{(n)}(\alpha)\cdot\delta_\gamma(\alpha),\quad \mathrm{n}\geq 0$, από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$c_n=\frac{g^{(n)}(a)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot\delta_\gamma(\alpha),\quad n\geq 0 \qquad (3).$$

Από τις (2) και (3) συνάγουμε τον ζητούμενο τύπο (1) για $z=a$ και άρα για τυχόν $z\in\Omega\setminus[\gamma]$.

Τελικά αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Morera, το οποίο είναι ένα είδος αντιστρόφου του (ισχυρισμού (β) του) Θεωρήματος 5.4.

Θεώρημα 5.17 (Morera) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής ώστε για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta\subseteq\Omega$ ισχύει ότι

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0.$$

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.3 η f έχει παράγουσα σε κάθε ανοικτό δίσκο του Ω. Δηλαδή αν $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $F:\Delta(a,r)\to\mathbb{C}$ ώστε

$$F'(z) = f(z), \text{ για } z \in \Delta(a,r).$$

Επειδή η F είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$ έπεται (από τα Θεωρήματα 5.11 και 3.26) ότι και η F' είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$. Και αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος.

<u>**Πόρισμα 5.17.1**</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $f / \Omega \setminus \{a\}$ ολόμορφη. Τότε η f ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη. Έστω $\Delta \subseteq \Omega$ τυχόν κλειστό τρίγωνο, τότε από το Θεώρημα Goursat έπεται ότι

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Έτσι από το Θεώρημα Morera έχουμε προφανώς το συμπέρασμα. (Πρβλ. την Παρατήρηση 5.6 (2).)

<u>**Πόρισμα 5.17.2**</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Θέτουμε $g(z) = \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$ και $g(a) = f'(a)$. Τότε η συνάρτηση g είναι ολόμορφη στο Ω.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής στο Ω και η $g / \Omega \setminus \{a\}$ ολόμορφη ως πηλίκο ολομόρφων. Έτσι το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το προηγούμενο Πόρισμα.

<u>**Παραδείγματα 5.18**</u> 1) Η αναλυτικότητα της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{\beta - z}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{\beta\} \quad \text{όπου} \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Έστω a τυχών μιγαδικός ώστε $a \neq \beta$. Θέτουμε $R = |\beta - a|$ και αναπτύσσουμε την f σε δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta(a,R)$. (Είναι σαφές ότι πρόκειται για τον δίσκο κέντρου a και με τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα ώστε να περιέχεται στο Ω, πρβλ. την παρατήρηση 5.11.1). Αν $z \in \Delta(a,R)$ τότε $\dfrac{|z-a|}{|\beta - a|} < 1$, άρα $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\beta-a}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\dfrac{z-a}{\beta-a}\right)} = \frac{\beta-a}{\beta-z}$.

Από όπου έπεται ότι

$$f(z) = \frac{1}{\beta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\beta-a)^{n+1}}(z-a)^n, \text{ για } z \in \Delta(a,R).$$

Παρατηρούμε ότι για την ακτίνα σύγκλισης της ανωτέρω δυναμοσειράς ισχύει $R = d(a,\{\beta\}) = |a - \beta|$ (όπως στο παράδειγμα 5.12). Όμως η σειρά Taylor στην οποία αναλύεται τοπικά μια ολόμορφη συνάρτηση (Θεώρημα 5.11) ενδέχεται να έχει ακτίνα σύγκλισης $R > d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Αυτό δείχνει το επόμενο παράδειγμα. Όμως πριν ασχοληθούμε με αυτό, σημειώνουμε για τη συνάρτηση

$\mathrm{g}(z) = \dfrac{1}{(\beta - z)^m}$, $z \in \Omega$, $(m \in \mathbb{N})$, ότι παραγωγίζοντας τη δυναμοσειρά στην οποία αναλύεται η f όπως παραπάνω έχουμε

$$\mathrm{g}(z) = \frac{1}{(\beta - z)^m} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(\mathrm{n-m+1})}{(\beta - a)^{n+1}} (z-a)^{n-m}, \qquad z \in \Delta(a, R).$$

Για μια απ' ευθείας απόδειξη της αναλυτικότητας των πολυωνύμων, καθώς και των συναρτήσεων $e^z, \sin z$ και $\cos z$ παραπέμπουμε στην άσκηση 19 του Κεφαλαίου 3.

2) Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(z) = \log z$ (= ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου) στο σημείο $z_0 = a + i$, όπου $a < 0$.

Λύση. Επειδή η $\log z$ δεν είναι συνεχής στα σημεία του αρνητικού ημιάξονα, η μεγαλύτερη ακτίνα για την οποία το Θεώρημα 5.11 ισχύει είναι (προφανώς) $R = 1$. Σημειώνουμε ότι $f(z_0) = \log z_0 = \log\sqrt{1+a^2} + i\arg(a+i)$ και βέβαια υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \le 0\}$, ισχύει

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Επομένως για τους συντελεστές c_n του αναπτύγματος Taylor της f στο z_0 θα έχουμε

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{1}{z_0^{\,n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{z_0^{\,n}} = -\frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(a+i)^n}, \quad n \ge 1.$$

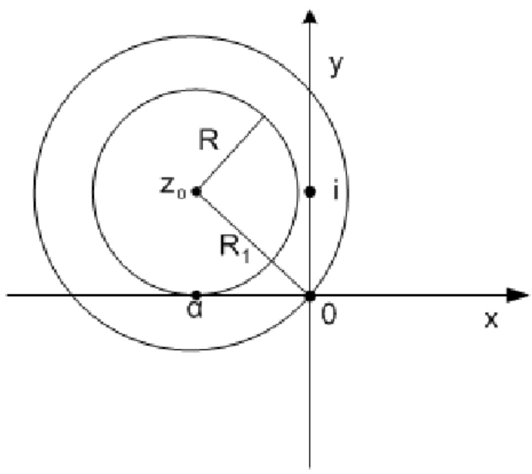
Από όπου έπεται ότι

$$\limsup \sqrt[n]{|\mathrm{c}_n|} = \frac{1}{|a+i|} \cdot \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, για την οποία φυσικά ισχύει

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z - a - i)^n, \qquad |\mathrm{z} - a - \mathrm{i}| < 1$$

ισούται με $R_1 = \sqrt{1+a^2} > 1$.



3) Αποδείξτε ότι $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\sin\theta)d\theta = 2\pi$.

Λύση. Από τον τύπο του Cauchy έχουμε

$$1 = e^0\cdot 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{e^{\zeta}}{\zeta - 0}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}d(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{e^{i\theta}}\cdot i\cdot e^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta =$$

$$= \frac{i}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta.$$

Κατά συνέπεια $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = 2\pi$.

Παρατηρούμε ότι $e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta}\cdot e^{i\sin\theta} = e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)]$. Άρα

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta,$$

από όπου έπεται η ζητούμενη ισότητα καθώς και η ισότητα $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta = 0$.

4) Αν $M \geq 0$ και f είναι μια ακέραια συνάρτηση ώστε $\operatorname{Re} f(z) \leq \mathrm{M}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε η f είναι σταθερή.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(z) = e^{f(z)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Τότε η F είναι ακέραια συνάρτηση και $|F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq \mathrm{e}^{M}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Από το Θεώρημα Liouville η F είναι σταθερή. Έστω $F(z) = e^{f(z)} = \mathrm{c}$, για $z \in \mathbb{C}$, τότε βέβαια $\mathrm{c} \neq 0$ και από την Πρόταση 3.36 συμπεραίνουμε ότι, αν θ είναι ένα όρισμα του c, τότε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ θα υπάρχει $k = k(z) \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$f(z) = \log|c| + i(\theta + 2k\pi).$$

Η ισότητα αυτή μας υποδεικνύει ότι η f παίρνει τιμές στο διακριτό σύνολο (δηλ. αποτελούμενο από μεμονωμένα σημεία) $\log|\mathrm{c}| + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z})$. Όμως η f είναι συνεχής συνάρτηση στο συνεκτικό σύνολο $\mathbb{C}$ και άρα το $f(\mathbb{C})$ οφείλει να είναι συνεκτικό σύνολο. Έπεται ότι το $f(\mathbb{C})$ είναι μονοσύνολο και άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση. (Πρβλ. την Παρατήρηση 1.29 και την Πρόταση 1.45.)

5) Έστω f ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μια σταθερά M και $R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(z)| \leq M|z|^N$ για κάθε $|z| \geq R$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq N$.

Λύση. Επειδή η f είναι ακέραια συνάρτηση, αναλύεται σε σειρά Taylor με κέντρο a τυχόντα μιγαδικό αριθμό και άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Εδώ επιλέγουμε $a = 0$ και έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

όπου $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0$. (Πρβλ. το Θεώρημα 5.11 και την Παρατήρηση 5.11.1 .)

Έστω τυχών ακέραιος $n \geq N+1$. Από τις ανισότητες του Cauchy έχουμε για κάθε $r \geq \max(R,1)$ ότι

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(0,r)}{r^n}.$$

Από την υπόθεσή μας συμπεραίνουμε ότι

$$M(0,r) = \sup\{|f(\zeta)|: \ |\zeta| = r\} \leq \mathrm{M} \cdot |\zeta|^N = M \cdot r^N.$$

Άρα

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M \cdot r^N}{r^n} = \frac{M}{r^{n-N}} \leq \frac{M}{r} \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0,$$

από όπου έπεται ότι $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$.

Τελικά όλοι οι συντελεστές c_n με $n \geq N+1$ μηδενίζονται και έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

6) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, \quad n \geq 1$, ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Λύση. Για τον ορισμό της «ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή» παραπέμπουμε στην Παρατήρηση 3.18 (3). Σημειώνουμε πρώτα ότι αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad n \geq 1$, συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μια συνάρτηση $\mathrm{g} : \Omega \to \mathbb{C}$, τότε και η g είναι συνεχής (Άσκηση). Οι συναρτήσεις f_n ως ολόμορφες είναι συνεχείς, επομένως και η f είναι από την υπόθεσή μας συνεχής. Έστω $\Delta \subseteq \Omega$ τυχόν κλειστό τρίγωνο, τότε το σύνορό του $\partial\Delta$ είναι προφανώς συμπαγές και άρα (πάλι από την υπόθεσή μας) ισχύει,

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz \to \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz.$$

Από το Θεώρημα Goursat έχουμε ότι $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$, για κάθε $n \geq 1$, άρα $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Έτσι από το Θεώρημα Morera έπεται ότι η f είναι ολόμορφη συνάρτηση.

<u>Σημείωση.</u> Με τις υποθέσεις του Παραδείγματος (6) για την ακολουθία ολομόρφων (f_n) και την f αποδεικνύεται επιπλέον ότι: Για κάθε $k \geq 1$ ισχύει $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

Αυτό είναι το πολύ σημαντικό «Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass» (Δες το Θεωρ. 7.1.1 και τα Πορ. 1,2 στο [Μ-Χ].)

5.3 Ρίζες ολομόρφων συναρτήσεων και η αρχή της ταυτότητας

Στην παράγραφο αυτή διευρύνουμε την προοπτική μας από τα πολυώνυμα και εξετάζουμε ρίζες ολομόρφων συναρτήσεων. Αν $f:\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση, τότε ένα σημείο $a \in \Omega$ λέγεται ότι είναι <u>ρίζα</u> της f αν $f(a) = 0$. Το σύνολο των ριζών της f θα το συμβολίζουμε με $Z(f)$. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο Ω, δηλαδή αν $Z(f) \neq \Omega$, τότε γράφουμε $f \not\equiv 0$.

<u>Λήμμα 5.19</u> Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για $|z-a| < r, \quad (r > 0)$, ώστε το a είναι ρίζα της f. Υποθέτουμε ότι $f \not\equiv 0$ στον δίσκο $\Delta(a,r)$. Τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και μια δυναμοσειρά g κέντρου a, η οποία συγκλίνει για $|z-a| < r$ ώστε

$$g(a) \neq 0 \text{ και } f(z) = (z-a)^m g(z), \quad z \in \Delta(a,r).$$

Απόδειξη. Το σύνολο θετικών ακεραίων

$$N = \{k \geq 1 : c_k \neq 0\}$$

είναι μη κενό, εφ' όσον $f(a) = c_0 = 0$ και $f \not\equiv 0$ στον δίσκο $\Delta(a,r)$. Θέτουμε $m = \min N$. Τότε $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$ και κατά συνέπεια για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ ισχύει

$$f(z) = c_m (z-a)^m + \ldots + c_{m+n} (z-a)^{m+n} + \ldots$$

$$= (z-a)^m \cdot [c_m + c_{m+1}(z-a) + \ldots + c_{m+n}(z-a)^n + \ldots].$$

Θέτουμε $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n$, για $z \in \Delta(a,r)$ και παρατηρούμε ότι $g(a) = c_m \neq 0$.

Έτσι η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

<u>Παρατήρηση 5.20</u> Επειδή $g(a) = c_m \neq 0$ και η g συνεχής στο a, υπάρχει $0 < r_1 \leq r$ ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$. Επομένως $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$ με $z \neq a$. Έτσι οδηγούμαστε στην ακόλουθη σημαντική έννοια: Μία ρίζα a μιας ολόμορφης συνάρτησης $f:\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>μεμονωμένη</u>, αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$.

<u>Λήμμα 5.21</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε το σύνολο $Z(f)' \bigcap \Omega$ των σημείων συσσώρευσης του $Z(f)$ μέσα στο Ω, είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο Ω. (Πρβλ. τις παρατηρήσεις μετά την Πρόταση 1.39.)

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής ως ολόμορφη και βέβαια ισχύει $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$. Επειδή τα μονοσύνολα του $\mathbb{C}$ είναι κλειστά σύνολα, έπεται από την Πρόταση 1.40 ότι το $Z(f)$ είναι κλειστό στο Ω. Ως γνωστόν, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης A' ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{C}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{C}$, επομένως το $Z(f)' \bigcap \Omega$ είναι κλειστό στο Ω και έτσι $Z(f)' \bigcap \Omega \subseteq Z(f)$.

Απομένει να αποδείξουμε ότι το $Z(f)' \bigcap \Omega$ είναι ανοικτό στο Ω (ισοδύναμα ανοικτό στο $\mathbb{C}$, εφ' όσον Ω ανοικτό στο $\mathbb{C}$). Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $Z(f)' \bigcap \Omega \neq \varnothing$ και θεωρούμε ένα σημείο $a \in Z(f)' \bigcap \Omega$. Εφ' όσον το Ω είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$, υπάρχει $r > 0$ ώστε $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το σημείο a.

(I) Έστω $f/\Delta(a,r) \equiv 0$. Τότε $\Delta(a,r) \subseteq Z(f)$ και συνεπώς $\Delta(a,r) \subseteq \Delta'(a,r) \subseteq Z(f)'$. Έπεται ότι $\Delta(a,r) \subseteq Z(f)' \bigcap Z(f) \subseteq Z(f)' \bigcap \Omega$.

(II) Έστω $f/\Delta(a,r) \not\equiv 0$. Θα αποδείξουμε ότι η υπόθεση αυτή μας οδηγεί σε αντίφαση. Άρα κατ' ανάγκη ισχύει η (I) για το τυχόν $a \in Z(f)' \bigcap \Omega$· επομένως το $Z(f)' \bigcap \Omega$ είναι ανοικτό στο Ω και έτσι το Λήμμα θα έχει αποδειχθεί. Η f είναι αναλυτική συνάρτηση ως ολόμορφη (Θεώρημα 5.11), άρα παραστάσιμη με δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta(a,r)$ και επειδή $f(a) = 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.19. Έτσι βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ και δυναμοσειρά g κέντρου a που συγκλίνει για $|z-a| < r$ ώστε

$$g(a) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(z) = (z-a)^m \cdot g(z), \quad z \in \Delta(a,r).$$

Από την Παρατήρηση 5.20 μπορούμε να υποθέσουμε (θεωρώντας εν ανάγκη μια ακτίνα $0 < r_1 \leq r$) ότι

$$f(z) \neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad z \in \Delta(a,r) \setminus \{a\}.$$

Το συμπέρασμα όμως αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας ότι το a είναι σημείο συσσώρευσης του $Z(f)$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $S \subseteq \mathbb{C}$, τότε το S αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \bigcap (S \setminus \{a\}) = \varnothing$. (Πρβλ. την Παρατ. 1.29.) Αν $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $S' \bigcap \Omega = \varnothing$, τότε το S έχει την παραπάνω ιδιότητα. (Πράγματι, αν το $a \in S$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο, τότε για κάθε $r > 0$ θα ισχύει $\Delta(a,r) \bigcap (S \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ και άρα $a \in S' \bigcap S \subseteq S' \bigcap \Omega$, άτοπο.)

Πρόκειται να αποδείξουμε ότι αν Ω είναι τόπος και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \not\equiv 0$, τότε το σύνολο $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, δηλαδή ότι οι ρίζες της f είναι μεμονωμένες. (Πρβλ. την Παρατ. 5.20.)

<u>Θεώρημα 5.22</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε,

είτε (1) η f είναι ταυτοτικά μηδέν (δηλ. $\mathrm{Z}(f) = \Omega$)

ή (2) το σύνολο $\mathrm{Z}(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (δηλ. $\mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega = \varnothing$).

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.21 έπεται ότι $\mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega$ είναι ανοικτό και κλειστό στο Ω. Όμως το Ω είναι συνεκτικό σύνολο, αφού είναι τόπος. Έτσι θα έχουμε

είτε (1) $\mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega \neq \varnothing$, που σημαίνει ότι $\Omega = \mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega$, άρα $\Omega = \mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$, από όπου προφανώς έπεται ότι $\mathrm{Z}(f) = \Omega$,

ή (2) $\mathrm{Z}(f)' \bigcap \Omega = \varnothing$, το οποίο σύμφωνα με τις ανωτέρω παρατηρήσεις σημαίνει ότι το $\mathrm{Z}(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία του Ω.

Αποδεικνύουμε τώρα το Θεώρημα το οποίο έχουμε ήδη αναφέρει στην Παρατήρηση 3.35.

<u>Θεώρημα 5.23</u> (Αρχή της ταυτότητας) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $S \subseteq \Omega$ και $z_0 \in \Omega$ σημείο συσσώρευσης του S. Αν f, g είναι ολόμορφες συναρτήσεις στο Ω ώστε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in S$, τότε $f = g$ στο Ω.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η $f - g$ είναι ολόμορφη στο Ω και $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Z}(f - g)$. Έπεται ότι $z_0 \in S' \bigcap \Omega \subseteq Z'(f - g) \bigcap \Omega$ και έτσι από το Θεώρημα 5.22 έχουμε το συμπέρασμα.

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση $S' \bigcap \Omega \neq \varnothing$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ισοδύναμη υπόθεση: Υπάρχει $z_0 \in \Omega$ και μια ακολουθία (z_n) διαφορετικών ανά δύο σημείων του S, ώστε $z_n \to z_0$ και $f(z_n) = g(z_n)$, για κάθε $n \geq 1$.

<u>Παρατηρήσεις 5.24</u> 1) Είναι ουσιώδες στο προηγούμενο Θεώρημα να υπάρχει σημείο συσσώρευσης του S το οποίο να ανήκει στο Ω. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f(z) = \sin\frac{1}{z} \quad \text{και} \quad \mathrm{g}(z) = 0$$

ορισμένες στο $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $f(z) = g(z)$, για κάθε $z = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, επίσης το $z_0 = 0$ είναι το (μοναδικό) σημείο συσσώρευσης του $S = \left\{ \dfrac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$, όμως $f \neq g$.

2) Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο Ω ώστε $f \not\equiv 0$. Αν $K \subseteq \Omega$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε το $K \bigcap \mathrm{Z}(f)$ είναι πεπερασμένο σύνολο˙ πράγματι αν το $K \bigcap \mathrm{Z}(f)$ ήταν άπειρο, τότε λόγω συμπάγειας του K θα είχε σημείο συσσώρευσης στο $K \subseteq \Omega$ και

συνεπώς $f \equiv 0$, άτοπο. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του Ω είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών (και άρα συμπαγών) δίσκων (πρβλ. την άσκηση 20 του Κεφ. I) έχει ως συνέπεια ότι το $Z(f)$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο. Βέβαια κάθε υποσύνολο του $\mathbb{C}$ αποτελούμενο από μεμονωμένα σημεία είναι το πολύ αριθμήσιμο και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο $\mathbb{C}$ με την μετρική της απόλυτης τιμής είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

3) Η αρχή της ταυτότητας υποδεικνύει ότι οι τιμές μιας ολόμορφης συνάρτησης f ορισμένης σ' έναν τόπο Ω, εξαρτώνται η μια με την άλλη με τέτοιον τρόπο ώστε, αν τροποποιήσουμε την f σ' ένα δίσκο $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ (με οσοδήποτε μικρή ακτίνα), τότε για να παραμείνει ολόμορφη οφείλουμε να τροποποιήσουμε κατάλληλα τις τιμές της και στα υπόλοιπα σημεία του Ω. Μια τόσο ισχυρή ιδιότητα δεν ισχύει για C^∞-διαφορίσιμες συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής . (Πρβλ. την Σημείωση μετά την αρχή της ταυτότητας στο [M-X], καθώς και την παράγραφο 7 του Κεφ. VI στο [D].)

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{C}$ επεκτείνει ή ότι είναι μια επέκταση της συνάρτησης $h:\mathrm{S} \to \mathbb{C}$, όπου $S \subseteq \Omega$, αν $f(z) = h(z)$, για κάθε $z \in S$. Ας υποθέσουμε ότι Ω είναι τόπος του $\mathbb{C}$ και S είναι ένα υποσύνολό του, το οποίο έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω. Η αρχή της ταυτότητας μας λέει ότι, αν η συνάρτηση $h:\mathrm{S} \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{C}$, τότε η επέκταση αυτή είναι μοναδική.

<u>**Παραδείγματα 5.25**</u> 1) Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{1-z}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι η μοναδική ολόμορφη επέκταση της $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < \dfrac{1}{10^6}$.

2) Αν $f(z) = \sin z, \quad z \in \mathbb{C}$ τότε η f είναι μοναδική ολόμορφη επέκταση της $h(\mathrm{x}) = \mathrm{sinx}, \quad z \in S = \mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει προφανώς και για την $f(z) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}$.

Αξίζει να σημειώσουμε σχετικά τα ακόλουθα. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος ώστε $\Omega \bigcap \mathbb{R} \neq \varnothing$, προφανώς τότε το $S = \Omega \bigcap \mathbb{R}$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ και αν $f:\Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση, τότε παριστάνεται με δυναμοσειρά σε κάθε $x_0 \in \Omega \bigcap \mathbb{R}$. Έτσι αν μια πραγματική συνάρτηση $h:\mathrm{S} \to \mathbb{R}$, όπου $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{C}$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, οφείλει να παριστάνεται με δυναμοσειρά σε κάθε σημείο του $S \bigcap \Omega$. Το συμπέρασμα είναι ότι οι μόνες συναρτήσεις $h:\mathrm{S} \to \mathbb{R}$ (όπου $\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα) οι οποίες επεκτείνονται σε ολόμορφες συναρτήσεις $f:\Omega \to \mathbb{C}$, (όπου $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $\mathrm{S} \subseteq \Omega$) είναι οι πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις.

Το επόμενο παράδειγμα μας υποδεικνύει ότι το S μπορεί να είναι πολύ μικρότερο από ένα ανοικτό υποσύνολο του Ω. Αρκεί να έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω.

3) Έστω $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ και $S = \{a_n :\ n \geq 1\}$. Αν $h : \mathrm{S} \to \mathbb{R}$ ώστε $h(a_n) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1$, τότε ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου $f(\mathrm{z}) = \log\mathrm{z}, \quad z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus\{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ είναι μοναδική ολόμορφη επέκταση της h στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$.

Πράγματι η $\log\mathrm{z}$ προφανώς επεκτείνει την h στον τόπο $\mathbb{C}_\pi$ και το σύνολο S έχει ως (μοναδικό) σημείο συσσώρευσης τον γνωστό μας αριθμό $e = 2{,}718...$, εφ' όσον η ακολουθία $a_n \to e$.

4) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες

α) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}$

β) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w, \quad z, w \in \mathbb{C}$.

Λύση. α) Θέτουμε $F(\mathrm{z}) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1, \quad z \in \mathbb{C}$. Ως γνωστόν $F(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την αρχή της ταυτότητας έπεται το συμπέρασμα.

β) Έστω z_0 τυχών πραγματικός αριθμός, τον οποίο σταθεροποιούμε. Επειδή η (β) ισχύει για κάθε $w \in \mathbb{R}$, δηλαδή ισχύει

$$\cos(z_0 + w) = \cos z_0 \cdot \cos w - \sin z_0 \cdot \sin w, \quad w \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

έπεται από την αρχή της ταυτότητας ότι η (1) ισχύει για κάθε $w \in \mathbb{C}$. Επομένως για τον τυχόντα $z \in \mathbb{R}$ και τον τυχόντα $w \in \mathbb{C}$ θα ισχύει

$$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \qquad (2).$$

Τώρα σταθεροποιούμε τυχόντα μιγαδικό $w_0 \in \mathbb{C}$, επομένως

$$\cos(z+w_0) = \cos z \cdot \cos w_0 - \sin z \cdot \sin w_0, \quad z \in \mathbb{R} \qquad (3).$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την αρχή της ταυτότητας, συμπεραίνουμε ότι η (3) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή ο μιγαδικός w_0 ήταν τυχών, έπεται ότι ισχύει η ζητούμενη ταυτότητα (β).

Σημειώνουμε ότι με τη χρήση της αρχής της ταυτότητας μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε τριγωνομετρική ταυτότητα στο μιγαδικό πεδίο. (Πρβλ. και την παρατήρηση 3.35.)

Το ολικό ανάλογο του Λήμματος 5.19 είναι το ακόλουθο Θεώρημα.

__Θεώρημα 5.26__ Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \not\equiv 0$. Αν $a \in \Omega$ είναι ρίζα της f, τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $h:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε

$$h(a) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(z) = (z-a)^m \cdot h(z), \quad z \in \Omega .$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.22 το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Επομένως υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a,r)$ με $z \neq a$. Η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a η οποία συγκλίνει για $|z-a| < r$, έστω

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r .$$

Επειδή $f / \Delta(a,r) \not\equiv 0$ και $f(a) = 0$, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.19 εντοπίζουμε μια ολόμορφη συνάρτηση $g:\Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $g(\alpha) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m \cdot g(z), \quad z \in \Delta(a,r)$ (μάλιστα $g(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \Delta(a,r)$).

Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $h:\Omega \to \mathbb{C}$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$h(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}, \text{ για } z \in \Omega \setminus \{a\} \text{ και } h(a) = g(a) .$$

Παρατηρούμε ότι η $h / \Omega \setminus \{a\}$ είναι ολόμορφη ως πηλίκο ολομόρφων. Επίσης $h(z) = g(z)$ για $z \in \Delta(a,r)$ και επειδή η g είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(a,r)$, η h έχει μιγαδική παράγωγο στο a και βέβαια $h(a) = g(a) \neq 0$. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

__Παρατήρηση 5.27__ Το ζεύγος (m,h) του προηγούμενου Θεωρήματος είναι <u>μοναδικό.</u> Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι (m_1,h_1) είναι ένα άλλο τέτοιο ζεύγος, τότε:

$$(z-a)^{m_1} \cdot h_1(z) = (z-a)^m \cdot h(z), \quad z \in \Omega .$$

Ας υποθέσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $m_1 > m$. Τότε θα έχουμε

$$(z-a)^{m_1 - m} \cdot h_1(z) = h(z), \quad z \in \Omega \setminus \{a\} .$$

Από την ισότητα αυτή, αφήνοντας το $z \to a$, έπεται ότι $h(a) = 0$, άτοπο. Κατά συνέπεια ισχύει $m_1 = m$ και έτσι $h_1(z) = h(z)$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Από την συνέχεια των h, h_1 στο a συμπεραίνουμε ότι $h(a) = h_1(a)$.

Έτσι τελικά έχουμε ότι $m = m_1$ και $h = h_1$.

Το Θεώρημα 5.26 και η Παρατήρηση 5.27 μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό

<u>Ορισμός 5.28</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f \not\equiv 0$ και $a \in \Omega$ ρίζα της f. Ονομάζουμε τον μοναδικό φυσικό αριθμό m του προηγουμένου θεωρήματος <u>τάξη της ρίζας a.</u>

Ακολουθεί ένα κριτήριο που μας βοηθά να προσδιορίζουμε την τάξη μιας (μεμονωμένης) ρίζας ολόμορφης συνάρτησης.

<u>Κριτήριο εύρεσης της τάξης μιας ρίζας 5.30</u> Έστω f ολόμορφη στον τόπο Ω, $f \not\equiv 0$, a ρίζα της f και $m \in \mathbb{N}$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

α) Ο ακέραιος m ισούται με την τάξη της ρίζας a της f.

β) $0 = f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a)$ και $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Απόδειξη. α) $\Rightarrow$ β). Από το Θεώρημα 5.26 υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και h ολόμορφη στον Ω ώστε

$$h(a) \neq 0 \quad \text{και} \quad f(z) = (z-a)^m \cdot h(z), \quad z \in \Omega.$$

Αν $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ τότε (λόγω αναλυτικότητας της h)

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{για } |z-a| < r$$

Άρα $$f(z) = (z-a)^m \cdot [c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots] =$$

$$= c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + \ldots + c_n(z-a)^{n+m} + \ldots, \quad |z-a| < r.$$

Θέτουμε $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ και $a_m = c_0,\ a_{m+1} = c_1, \ldots,\ a_{m+k} = c_k, \ldots$ και έχουμε

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad |z-a| < r.$$

Από την τελευταία σχέση, και επειδή $f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \geq 0$, έπεται ότι

$$0 = f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) \quad \text{και} \quad f^{(m)}(a) = m!a_m = m!c_0 = m!h(a) \neq 0.$$

β) $\Rightarrow$ α). Η f είναι αναλυτική, έτσι αν $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad \text{για } |z-a| < r$$

ή $$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_{m-1}(z-a)^{m-1} + a_m(z-a)^m + \ldots, \quad |z-a| < r.$$

Από την υπόθεσή μας (εφ' όσον $f^{(k)}(a) = k!a_k, \quad k \geq 0$) έπεται προφανώς ότι $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ και $a_m \neq 0$. Κατά συνέπεια

$$f(z) = (z-a)^m \cdot [a_m + a_{m+1}(z-a) + ... + a_{m+n}(z-a)^n + ...], \quad \mathrm{z} \in \Delta(a, \mathrm{r}) \quad \cdot$$

Θέτουμε $h(\mathrm{z}) = \dfrac{f(\mathrm{z})}{(z-a)^m}$, για $z \in \Omega \setminus \{a\}$, $h(a) = a_m$ και παρατηρούμε ότι η h έχει μιγαδική παράγωγο στο a. Έτσι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Ορισμού 5.28 και m είναι η τάξη της ρίζας a.

5.4 Μεμονωμένες ανωμαλίες ολομόρφων συναρτήσεων

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση (προφανώς το $\Omega \setminus \{a\}$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$), τότε το a ονομάζεται μια μεμονωμένη ανωμαλία της f.

Παρατηρούμε ότι η f δεν ορίζεται στο σημείο a, αλλά ο ορισμός απαιτεί να είναι ορισμένη και ολόμορφη «γύρω» από το a.

Οι μεμονωμένες ανωμαλίες διακρίνονται σε τρία είδη:

(α) Το a λέγεται επουσιώδης ανωμαλία της f, αν η f μπορεί να επεκταθεί στο Ω ούτως ώστε να γίνει ολόμορφη. Δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{C}$, ώστε θέτοντας $f(a) = c$, η f έχει μιγαδική παράγωγο και στο a.

(β) Το a λέγεται πόλος της f, αν $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

(γ) Το a λέγεται ουσιώδης ανωμαλία της f, αν δεν είναι πόλος, ούτε επουσιώδης ανωμαλία για την f.

Παραδείγματα 5.31 1) Έστω $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $\lim_{z \to 0} \dfrac{1}{z} = \infty$ και άρα το a είναι πόλος της f.

2) Έστω $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-5)}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 5\}$. Τότε και τα δύο σημεία 1 και 5 είναι πόλοι για την f. Πράγματι, εύκολα υπολογίζουμε: $\lim_{z \to 1} f(z) = \lim_{z \to 5} f(z) = \infty$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1}\right).$$

3) Έστω $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Το $z = 0$ είναι επουσιώδης ανωμαλία της f.

Πράγματι, το όριο $\lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$ $\left(= \lim_{z \to 0} \dfrac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = \cos 0 = 1\right)$. Έτσι αν θέσουμε $f(0) = 1$, η f γίνεται συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ και βέβαια $f / \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ολόμορφη. Από το Πόρισμα 5.17.1 ή το Πόρισμα 5.17.2 έχουμε το συμπέρασμα.

4) Το σημείο $z=0$, δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία για τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου

$$z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} \mapsto \log z = \log|z| + i\arg(z) \in \mathbb{C} \quad .$$

Πράγματι, για κάθε $r>0$ η $\log z$ δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση στον «τρυπημένο» δίσκο $\Delta(0,r)\setminus\{0\}$. (Πρβλ. την Πρόταση 3.40 και την Παρατήρηση 3.40.1 .)

5) Η συνάρτηση $f(z)=e^{\frac{1}{z}}, \quad z \in \Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z=0$. Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες

$$z_n = \frac{1}{2\pi n i} \quad \text{και} \quad w_n = \frac{1}{(2n+1)\pi i}, \quad n \geq 1$$

για τις οποίες προφανώς ισχύει, $z_n \to 0$ και $w_n \to 0$.

Επίσης έχουμε $f(z_n) = e^{2\pi n i} = 1$ για κάθε $n \geq 1$ και

$f(\mathrm{w}_n) = e^{2\pi n i + \pi i} = e^{2\pi n i} \cdot e^{\pi i} = 1 \cdot e^{\pi i} = 1 \cdot (-1) = -1$, για κάθε $n \geq 1$.

Έπεται προφανώς ότι, το $z=0$ δεν είναι πόλος αλλά ούτε και επουσιώδης ανωμαλία της f. Άρα εξ' ορισμού, είναι ουσιώδης ανωμαλία για την f.

Συνεχίζουμε και ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο, με χαρακτηρισμούς κατά σειρά, των επουσιωδών ανωμαλιών, των πόλων και των ουσιωδών ανωμαλιών μιας ολόμορφης συνάρτησης.

Θεώρημα 5.32 (Riemann) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

α) Το σημείο a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f.

β) Η f είναι τοπικά φραγμένη στο a. (Δηλ. υπάρχει $r>0$ ώστε $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $f / \Delta(a,r)\setminus\{a\}$ είναι φραγμένη.)

γ) Το όριο $\lim_{z\to a} f(z)$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. α) $\Rightarrow$ β). Εξ' ορισμού η f μπορεί να ορισθεί στο σημείο a, ούτως ώστε η προκύπτουσα επέκτασή της να είναι ολόμορφη στο Ω. Έτσι η f είναι ιδιαιτέρως συνεχής στο a. Έστω $r>0$ ώστε $\overline{\Delta(a,r)}\subseteq\Omega$ τότε η $f/\overline{\Delta(a,r)}$ είναι φραγμένη εφ' όσον ο δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι συμπαγής.

β) $\Rightarrow$ γ). Εξ' υποθέσεως, υπάρχουν $r>0$ και $M>0$ ώστε $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $|f(z)|\leq M$, για κάθε $z\in\Delta(a,r)\setminus\{a\}$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $g:\Omega\to\mathbb{C}$ ως ακολούθως: $g(z)=(z-a)f(z), \quad z\in\Omega\setminus\{a\}$ και $g(a)=0$. Εφ' όσον η f είναι φραγμένη «πλησίον» του a έπεται ότι $\lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z) = 0$.

Έτσι η g είναι συνεχής (στο a και άρα) στο Ω και ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{a\}$. Από το Πόρισμα 5.17.1 (του Θεωρήματος Morera) η g είναι ολόμορφη στο Ω. Παρατηρούμε ότι αν $z\in\Omega\setminus\{a\}$ τότε $f(\mathrm{z})=\dfrac{g(a)}{z-a}=\dfrac{\mathrm{g(z)}-\mathrm{g}(a)}{z-a}$. Άρα το όριο

$$\lim_{z\to a} f(z)=\mathrm{g}'(a)\in\mathbb{C}.$$

γ) $\Rightarrow$ α). Θέτουμε $w=\lim\limits_{z\to a} f(z)$, τότε $w\in\mathbb{C}$. Έπεται ότι, θέτοντας $f(a)=w$, η f γίνεται συνεχής στο Ω. Επειδή η $f/\Omega\setminus\{a\}$ είναι ολόμορφη, από το Πόρισμα 5.17.1 συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

<u>**Παρατήρηση 5.32.1**</u> Από τη μέθοδο απόδειξης του Θεωρήματος 5.32 προκύπτει ότι, αν η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο a, τότε η ανωμαλία αυτή είναι επουσιώδης αν και μόνο αν, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)\cdot f(z)=0$.

<u>**Θεώρημα 5.33**</u> (Χαρακτηρισμός των πόλων) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό, $a\in\Omega$ και $f:\Omega\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

α) Το σημείο a είναι πόλος της f.

β) Υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $g:\Omega\to\mathbb{C}$ ώστε $g(a)\neq 0$ και $f(z)=\dfrac{g(\mathrm{z})}{(z-a)^m},\quad z\in\Omega\setminus\{a\}$.

γ) Υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2,...,c_m$ με $c_m\neq 0$ ώστε η συνάρτηση

$$k(z)=f(z)-\left(\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+...+\frac{c_m}{(z-a)^m}\right),$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο σημείο a.

Απόδειξη. α) $\Rightarrow$ β). Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. Επομένως υπάρχει $r>0$ ώστε $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $f(z)\neq 0$, για $z\in\Delta(a,r)\setminus\{a\}$. Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $h:\Delta(a,r)\to\mathbb{C}$ ώστε $h(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, για $z\in\Delta(a,r)\setminus\{a\}$ και $h(a)=0$.

Η $h/\Delta(a,r)\setminus\{a\}$ είναι προφανώς ολόμορφη και επειδή $\lim\limits_{z\to a} h(z)=0=h(a)$ έπεται ότι η h είναι συνεχής (στο a και άρα) στο Ω. Έτσι από το Πόρισμα 5.17.1 έχουμε ότι η h είναι ολόμορφη στον δίσκο Ω.

Επειδή το a είναι ρίζα της h, έπεται από το Θεώρημα 5.26 ότι υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και μια ολόμορφη συνάρτηση h_1 επί του δίσκου $\Delta(a,r)$ ώστε

$$h_1(a)\neq 0 \quad\text{και}\quad h(z)=(z-a)^m\cdot h_1(z),\qquad z\in\Delta(a,r).$$

Σημειώνουμε ότι $h_1(z)\neq 0$ για $z\in\Delta(a,r)$ (εφ' όσον $h(z)\neq 0$ για $z\neq a$).

Ορίζουμε τώρα τη ζητούμενη συνάρτηση g με τον ακόλουθο (εύλογο) τρόπο

$\mathrm{g}(z)=f(z)\cdot(z-a)^m$, για $z\in\Omega\setminus\{a\}$ και $g(a)=\dfrac{1}{h_1(a)}$.

Είναι σαφές ότι η g είναι ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{a\}$ και εύκολα η παραπάνω «κατασκευή» μας δίνει ότι

$$g/\Delta(a,r)=\frac{1}{h_1}/\Delta(a,r).$$

Επειδή η h_1 είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(a,r)$ και $h_1(z)\neq 0$, για $z\in\Delta(a,r)$, έπεται ότι και η $\dfrac{1}{h_1}$ είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$, από όπου έπεται ότι η g είναι ολόμορφη στο Ω με $g(a)=\dfrac{1}{h_1(a)}\neq 0$. Έτσι το ζεύγος (m,g) ικανοποιεί τον ισχυρισμό (β).

β) $\Rightarrow$ γ). Έστω $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$, τότε από την αναλυτικότητα της g έπεται ότι:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad z\in\Delta(a,r) \text{ και } a_0=g(a)\neq 0.$$

Επομένως για $z\in\Delta(a,r)\setminus\{a\}$ έχουμε

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\cdot[a_0+a_1(z-a)+\ldots+a_m(z-a)^m+a_{m+1}(z-a)^{m+1}+\ldots]=$$

$$=\frac{a_0}{(z-a)^m}+\frac{a_1}{(z-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{(z-a)}+[a_m+a_{m+1}(z-a)+\ldots].$$

Από όπου έπεται ότι

$$f(z)-\left(\frac{a_{m-1}}{z-a}+\frac{a_{m-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_1}{(z-a)^{m-1}}+\frac{a_0}{(z-a)^m}\right)=a_m+a_{m+1}(z-a)+\ldots+a_{m+n}(z-a)^n+\ldots$$

Αν συμβολίσουμε με $k(z)$ το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας, τότε η συνάρτηση $k(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a, εφ' όσον είναι ίση με μια δυναμοσειρά στον «τρυπημένο» δίσκο $\Delta(a,r)\setminus\{a\}$.

Θέτουμε τώρα, $c_\lambda=a_{m-\lambda}$, για $\lambda=1,2,\ldots,m$. Άρα $c_m=a_0=g(a)\neq 0$ και έχουμε τον ισχυρισμό (γ).

γ) $\Rightarrow$ α). Από την υπόθεση έπεται ότι,

$$f(z)=k(z)+\left(\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{c_m}{(z-a)^m}\right),\ \text{για } z\in\Omega\setminus\{a\}.$$

Άρα $$\lim_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a} k(z)+\lim_{z\to a}\left(\frac{c_1}{z-a}+\ldots+\frac{c_m}{(z-a)^m}\right)=$$

$$=k(a)+\lim_{z\to a}\left(\frac{c_1(z-a)^{m-1}+\ldots+c_{m-1}(z-a)+\mathrm{c}_m}{(z-a)^m}\right)=$$

(επειδή $\mathrm{c}_m\neq 0$ και $k(a)\in\mathbb{C}$)

$$=k(a)+\frac{c_m}{0}=k(a)+\infty=\infty.$$

Επομένως η f έχει πόλο στο σημείο a και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 5.33.1 1) Το ζεύγος (m,g) του ισχυρισμού (β) του Θεωρήματος 5.33 είναι βέβαια μοναδικό. Για την απόδειξη πρβλ. την Παρατήρηση 5.27.

Έτσι το m του ισχυρισμού (β) ονομάζεται τάξη του πόλου a της f.

2) Οι σταθερές $c_1,\ldots,c_m$ του ισχυρισμού (γ) του Θεωρήματος 5.33 είναι επίσης μοναδικές, εφ' όσον προέρχονται από την ανάλυση της g σε δυναμοσειρά κέντρου a. Μάλιστα έχουμε

$$a_n=\frac{g^{(n)}(a)}{n!},\quad n\geq 0,\ \text{άρα}\ \ a_{m-\lambda}=c_\lambda=\frac{g^{(\mathrm{m}-\lambda)}(a)}{(\mathrm{m}-\lambda)!},\quad \lambda=1,2,\ldots,m.$$

Έπεται ιδιαίτερα ότι $c_1=\dfrac{g^{(\mathrm{m}-1)}(a)}{(\mathrm{m}-1)!}$.

Η ρητή συνάρτηση $q(z)=\dfrac{c_1}{z-a}+\ldots+\dfrac{c_m}{(z-a)^m}$ ονομάζεται το κύριο μέρος του πόλου a της f.

3) Από τις προηγούμενες θεωρήσεις προκύπτουν εύκολα τα ακόλουθα:

α) Η συνάρτηση f έχει πόλο τάξης m στο a αν και μόνο αν η $\dfrac{1}{f}$ έχει ρίζα τάξης m στο a.

β) Αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο a, τότε το a είναι πόλος τάξης m για την f αν και μόνο αν το όριο $\lim_{z\to a}(z-a)^m\cdot f(z)=\ell\neq 0,\quad (\ell\in\mathbb{C})$.

Πριν αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό των ουσιωδών ανωμαλιών που είναι γνωστός ως Θεώρημα των Casorati-Weierstrass κάνουμε την ακόλουθη απλή παρατήρηση:

Το σημείο a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν το όριο $\lim_{z\to a} f(z)$ δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Η παρατήρηση αυτή είναι απλή συνέπεια του ορισμού της ουσιώδους ανωμαλίας και του Θεωρήματος 5.32.

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένα $D \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$ αν $\overline{D} = \mathbb{C}$. Τα πυκνά υποσύνολα D του $\mathbb{C}$ χαρακτηρίζονται με τους ακόλουθους τρόπους:

(I) $D \cap \Omega \neq \varnothing$, για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό μη κενό.

(II) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει $(z_n) \subseteq D$ ώστε $z_n \to z$. (Άσκηση.)

Θεώρημα 5,34 (Casorati-Weierstrass) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

α) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a.

β) Για κάθε $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$, το σύνολο $f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. α) $\Rightarrow$ β). Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι για κάποιο $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$ το σύνολο $D(\delta) = f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Από τον χαρακτηρισμό (I) των πυκνών συνόλων ανωτέρω έπεται ότι υπάρχει ανοικτός δίσκος $\Delta(\mathrm{w},\mathrm{r}) \subseteq \mathbb{C}$ ώστε

$$D(\delta) \bigcap \Delta(\mathrm{w},\mathrm{r}) = \varnothing \qquad (1).$$

Επειδή $|f(\mathrm{z}) - \mathrm{w}| \geq \mathrm{r} > 0$, για κάθε $z \in \Delta(a,\delta)$ με $z \neq a$, η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in \Delta(a,\delta) \setminus \{a\}$$ είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη.

Παρατηρούμε ότι η g είναι φραγμένη, εφ' όσον

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{για} \quad z \in \Delta(a,\delta) \setminus \{a\}.$$

Από το Θεώρημα 5.32 (Riemann) έπεται ότι το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της g. Συνεπώς το όριο $\lim\limits_{z \to a} g(z) = \beta$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$ και έτσι το όριο

$$\lim_{z \to a} (f(z) - w) = \lim_{z \to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\beta}$$ υπάρχει στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο

$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Το συμπέρασμα όμως αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.

β) $\Rightarrow$ α). Η υπόθεσή μας τώρα είναι ότι για κάθε $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$ το σύνολο $D(\delta) = f(\Delta(a,\delta) \setminus \{a\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(A) Το όριο $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

Έστω $\varepsilon = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $D(\delta) \subseteq \Delta(\mathrm{c},1)$. Το συμπέρασμα όμως αυτό αντιφάσκει στον χαρακτηρισμό (Ι) των πυκνών υποσυνόλων, όπως είναι το $D(\delta)$, του $\mathbb{C}$.

(Β) Το όριο $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Έστω $\varepsilon = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $D(\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \Delta(0,1)$. Το συμπέρασμα αυτό, ομοίως αντιφάσκει με το γεγονός ότι το $D(\delta)$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Έτσι η μόνη εναπομείνασα δυνατότητα είναι ότι το όριο $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}}$ και άρα η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a.

Σημειώνουμε ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρότερη μορφή του Θεωρήματος Casorati-Weierstrass, η οποία είναι το Θεώρημα Picard: Αν το σημείο a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, τότε για κάθε $\delta > 0$ ώστε $\Delta(a,\delta) \subseteq \Omega$, το σύνολο $D(\delta)$ είναι είτε το $\mathbb{C}$ ή το $\mathbb{C} \setminus \{w\}$ για κάποιο $w \in \mathbb{C}$.

<u>Παραδείγματα 5.35</u> 1) Βρείτε το είδος, και στην περίπτωση πόλου την τάξη, των μεμονωμένων ανωμαλιών των ακόλουθων συναρτήσεων:

α) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-5)}$, β) $f(z) = \dfrac{4}{(z-2)^2} + \dfrac{1}{z-2} + \cos z$, γ) $f(z) = \sin z + \sin\dfrac{1}{z}$,

δ) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \dfrac{\pi}{2}}$, ε) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$.

Λύση. α) Πρόκειται για το Παράδειγμα 5.3.1(2).

Παρατηρούμε ότι $f(z) = \dfrac{1/(z-1)}{z-5} = \dfrac{1/(z-5)}{z-1}$. Από το Θεώρημα χαρακτηρισμού των πόλων (Θεωρ. 5.33) έπεται ότι τα σημεία 1 και 5 είναι πόλοι τάξης 1 της f.

β) Παρατηρούμε ότι το 2 είναι η μόνη μεμονωμένη ανωμαλία της f και επειδή $\lim\limits_{z\to 2}(z-2)^2 \cdot f(z) = 4 \neq 0$, είναι πόλος τάξης 2.

γ) Η μόνη ανωμαλία της f είναι το 0. Καθώς η $\sin z$ είναι ακέραια συνάρτηση, αρκεί να ελέγξουμε την ύπαρξη του ορίου $\lim\limits_{z\to 0} \sin\dfrac{1}{z}$. Όμως αυτό το όριο δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}}$ (γιατί;).

Έτσι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.

δ) Η μόνη ανωμαλία της f είναι το $\dfrac{\pi}{2}$, η οποία είναι επουσιώδης. Πράγματι

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z - \cos(\pi/2)}{z-(\pi/2)} = \cos'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1.$$

Άρα θέτοντας $f(\pi/2)=-1$, η f γίνεται ακέραια συνάρτηση.

ε) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{z\to 0} z^2\cdot f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$.

Επομένως το 0 είναι η μόνη μεμονωμένη ανωμαλία της f , η οποία είναι πόλος τάξης 2.

2) Η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z-1)^2\cdot(z+i)^3}$ έχει έναν απλό πόλο στο 1 και έναν πόλο τάξης 3 στο $-i$.

Πράγματι,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z+i)^3}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z+1}{(z+i)^3}=\frac{3}{(1+i)^3}\neq 0$$

και

$$\lim_{z\to -i}(z+i)^3\cdot f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^3-1}{(z-1)^2}=\frac{i-1}{(-i-1)^2}=\frac{i-1}{(i+1)^2}=\frac{i}{1+i}\neq 0.$$

3) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια μη σταθερή συνάρτηση. Τότε το $f(\mathbb{C})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Λύση. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της κατεύθυνσης (α) $\Rightarrow$ (β) του Θεωρήματος Casorati-Weierstrass. Υποθέτουμε ότι το $D=f(\mathbb{C})$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Τότε θα υπάρχει ανοικτός δίσκος $\Delta(\mathrm{w},\mathrm{r})$ του $\mathbb{C}$ ώστε $D\bigcap\Delta(\mathrm{w},\mathrm{r})=\varnothing$. Κατά συνέπεια

$$|f(\mathrm{z})-\mathrm{w}|\geq \mathrm{r} \quad , \quad \text{για κάθε} \quad z\in\mathbb{C}.$$

Έπεται ότι η συνάρτηση

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}, \quad z\in\mathbb{C}$$

είναι ακέραια. Επειδή όμως $|g(z)|=\dfrac{1}{|f(z)-w|}\leq\dfrac{1}{r}$, για $z\in\mathbb{C}$, η g είναι μια ακέραια και φραγμένη συνάρτηση, άρα από το Θεώρημα Liouville είναι σταθερή. Αν όμως η g είναι σταθερή, τότε και η f είναι κατ' ανάγκη σταθερή, άτοπο.

Από το παράδειγμα αυτό προκύπτει ότι αν μια ακέραια συνάρτηση f παίρνει τιμές σε τυχόν ημιεπίπεδο, τότε είναι αναγκαία σταθερή. (Πρβλ. το παράδειγμα 5.18 (4).)

<u>Ασκήσεις Κεφ. 5</u>

1) Αποδείξτε ότι:

α) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z+\sin z}{z}\,dz = 2\pi i$, β) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\sin z}{(z-\pi)^3}\,dz = 0$

γ) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}\,dz = \frac{\pi i}{2}$ και δ) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-1)^2} = 0$.

2) Αποδείξτε ότι: α) $$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z^2+1)}\,dz = \begin{cases} 2\pi i(1-\cos i) & \gamma : |z| = 3 \\ 2\pi i & \gamma : |z| = \frac{1}{3} \\ 0 & \gamma : |z-i| = \frac{1}{3} \end{cases}$$

και β) $$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}\,dz = \begin{cases} 2\pi i(-1+\cos 1) & \gamma : |z| = \frac{3}{2} \\ 2\pi i \cos 1 & \gamma : |z-1| = \frac{1}{2} \\ 0 & \gamma : |z+1| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

[<u>Υπόδειξη.</u> Αναλύστε τις προς ολοκλήρωση συναρτήσεις σε άθροισμα απλών κλασμάτων.]

3) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3-3z+1}{(z-i)^2}\,dz$, β) $\displaystyle\int_{C(1,2)} \frac{\cos z}{z^7}\,dz$ και γ) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^4-1}$

[<u>Υπόδειξη.</u> (α) $-12\pi i$, (β) $\dfrac{-2\pi i}{6!}$ και (γ) αναλύστε την $\dfrac{1}{z^4-1}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.]

4) Έστω $\gamma(t) = a\cdot e^{a\pi i t} + b,\ 0 \le t \le 1$, όπου $a=2$ και $b=1+i$. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+1}\,dz$, β) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3-z}\,dz$ και γ) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3}\,dz$

5) Έστω f ολόμορφη σε μια ανοικτή περιοχή του δίσκου $|z| \le R$. Υποθέτουμε ότι $|f(z)| \le M$, για $|z| \le R$. Αποδείξτε ότι

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{M \cdot R \cdot n!}{(R - |z|)^{n+1}}, \quad |z| < R.$$

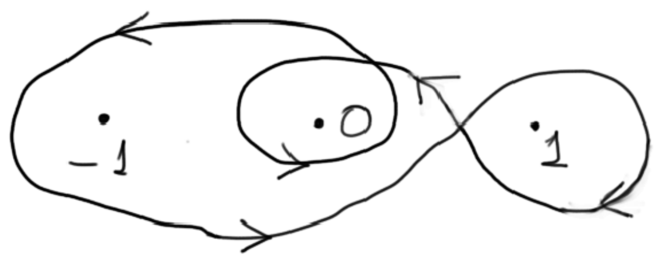
6) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρές τις ακόλουθες συναρτήσεις και βρείτε τις ακτίνες σύγκλισής τους στα σημεία που υποδεικνύονται:

α) $\sinh z$ στο $a = \dfrac{\pi}{2}$, β) $\dfrac{1}{z}$ στο $a = i$, γ) $\dfrac{2z-1}{z^2 - z}$ στο $a = i$

δ) $z^3 - 4iz + 2$ στο $a = -2i$, ε) $\log(1-z)$ στο $a = i$.

7) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, όπου

$f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(1-z^2)}$ και γ η καμπύλη του σχήματος



[<u>Υπόδειξη.</u> $\delta_\gamma(-1) = 1, \quad \delta_\gamma(0) = 2$ και $\delta_\gamma(1) = -1$,

$\dfrac{1}{z^2(1-z^2)} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-z}$ και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Cauchy για παραγώγους και να υπολογίσουμε το $I = 2 + \dfrac{1}{2}\cdot(e^{-1} + e)$. Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι η f έχει πόλους τάξης 1 στα σημεία ± 1 και έναν πόλο τάξης 2 στο 0 και εφαρμόζουμε το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων που θα αποδείξουμε στο επόμενο Κεφάλαιο.]

8) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f έχει παράγουσα αν και μόνο αν για κάθε κλειστή καμπύλη γ του Ω ισχύει ότι $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Αν η f έχει παράγουσα, τότε το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 4.32. Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίστροφο. Σταθεροποιούμε ένα (τυχόν) σημείο a του Ω και ορίζουμε τη συνάρτηση $F(z) = \displaystyle\int_{\gamma_z} f(\zeta)d\zeta, \quad z \in \Omega$, όπου γ_z καμπύλη του Ω που ξεκινά από το a και καταλήγει στο $z \in \Omega$ (τέτοια καμπύλη υπάρχει, αφού το Ω είναι τόπος). Από την υπόθεσή μας έπεται εύκολα ότι η F είναι καλά ορισμένη, δηλ. η τιμή

$F(z)$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής της F. Το γεγονός ότι η F είναι μια παράγουσα της f αποδεικνύεται με την ίδια αντίστοιχη απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.]

9) Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ ώστε $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b \le 0$. Αποδείξτε ότι

$$|e^a - e^b| \le |a - b|.$$

[Υπόδειξη. Θέτουμε $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0\}$ και $f(z) = e^z$. Τότε $f(z) = f'(z), \quad z \in \mathbb{C}$ και αν $z \in L, \quad |e^z| \le 1$. Έστω $a, b \in L$, θέτουμε $\gamma = [a, b]$ και τότε

$|e^b - e^a| = \left| \int_\gamma f'(z) dz \right| \le 1 \cdot L(\gamma) = |b - a|$. Δηλαδή η e^z είναι 1-Lipschitz στο αριστερό ημιεπίπεδο L.]

10) α) Έστω f ολόμορφη στο ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $\overline{\Delta(a, r)} \subseteq \Omega$. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε

$$|f(z) - f(w)| \le K|z - w|, \text{ για κάθε } z, w \in \Delta(a, r).$$

β) Αποδείξτε ότι, αν $f(z) = \log z$ (= ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου) και ο δίσκος $\overline{\Delta(1, r)}$, όπου $0 < r < 1$, μπορούμε να θέσουμε $K = \dfrac{1}{1 - r}$.

[Υπόδειξη. Για το (α). Η f είναι παράγουσα της ολόμορφης συνάρτησης f' στο Ω και άρα αν $z, w \in \overline{\Delta(a, r)}$, τότε $[z, w] \subseteq \overline{\Delta(a, r)}$ και $f(z) - f(w) = \int_{[z,w]} f'(\zeta) d\zeta$.

Θέτουμε $K = \sup\{|f'(\zeta)|, \zeta \in \overline{\Delta(a, r)}\}$.

Για το (β). Η f ορίζεται στον τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \le 0\}$. Επομένως $\Delta(1, 1) \subseteq \Omega$.

Έστω $0 < r < 1$, αν $z \in \overline{\Delta(1, r)}$, τότε $\dfrac{1}{|z|} \le \dfrac{1}{1 - r}$. Έτσι έχουμε

$\sup\{|\log'(z)| : z \in \Delta(1, r)\} = \dfrac{1}{1 - r}$.]

11) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$ με κέντρο το $a = 1$ και βρείτε την ακτίνα σύγκλισής της.

[Υπόδειξη. $f(z) = \dfrac{i}{2}\left[\dfrac{1}{1+i} \cdot \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{z-1}{1+i}\right)} - \dfrac{1}{1-i} \cdot \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{z-1}{1-i}\right)}\right]$, για την ακτίνα σύγκλισης πρβλ. το Παράδειγμα 5.12.]

12) α) Έστω $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \quad z\in\mathbb{C}$. Αν $a\neq 0$, ώστε $f(z)=f(z+a)$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$, αναπτύξτε την f σε δυναμοσειρά κέντρου a και βρείτε την ακτίνα σύγκλισής της.

β) Αναπτύξτε τις συναρτήσεις $\cos z$ και $\sin z$ σε δυναμοσειρές με κέντρα $a_k=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ και $a=\dfrac{\pi}{2}$ και βρείτε την ακτίνα σύγκλισής τους.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για το (α). $f(z)=f((z-a)+a)=f(z-a)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n, \quad z\in\mathbb{C}$.

Παρατηρούμε ότι το a είναι μια περίοδος της f.

Για το (β). Τα a_k είναι περίοδοι για τις $\cos z$ και $\sin z$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό (α). Για $a=\dfrac{\pi}{2}$, παρατηρούμε ότι $\cos z=-\sin\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\sin z=cos\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)$.]

13) Δώστε παραδείγματα δύο συναρτήσεων f και g, οι οποίες να έχουν καθεμία πόλο τάξης 4 στο δοθέν σημείο $a\in\mathbb{C}$ και η διαφορά τους $f-g$ να έχει πόλο τάξης 2 στο a.

[<u>Υπόδειξη.</u> Οι συναρτήσεις $f(z)=\dfrac{1+(z-a)+(z-a)^2}{(z-a)^4}$ και $\mathrm{g}(z)=\dfrac{1+(z-a)}{(z-a)^4}, \quad z\neq a$ ικανοποιούν αυτές τις απαιτήσεις.]

14) Έστω f ακέραια συνάρτηση και $a,b\in\mathbb{C}$ με $a\neq b$ και $R>\max\{|a|,|b|\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_R=\int_{C(0,R)}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$$

και κατόπιν να αποδειχθεί το Θεώρημα Liouville.

[<u>Υπόδειξη.</u> Με τη βοήθεια του τύπου του Cauchy (ή του Θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων του Κεφ. 6) υπολογίζουμε $I_R=2\pi i\cdot\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$. Έστω ότι $|f(z)|\leq M<+\infty$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Θεωρούμε $a\neq b\in\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι,

$$|I_R|=\left|\int_{C(0,R)}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right|\leq\max_{|\zeta-a|=R}|g(\zeta)|\cdot 2\pi R\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

όπου $g(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)}$.]

15) Έστω $f:\Delta(0,1)\to\Delta(0,1)$ ολόμορφη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $|f^{(n)}(0)|\leq n!,\quad \mathrm{n}=0,1,2,\ldots$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Χρησιμοποιήστε τις εκτιμήσεις Cauchy.]

16) Έστω f ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μια σταθερά $M>0$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $|f(z)|\leq M|z|^{\lambda}$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι:

α) Αν $\lambda\in\mathbb{N}$ τότε $f(z)=c\cdot z^{\lambda}$, όπου c σταθερά και

β) Αν $\lambda\notin\mathbb{N}$ τότε $f\equiv 0$.

Τι συμβαίνει αν η ανισότητα της υπόθεσης ισχύει για κάθε $|z|\geq R$ όπου R θετική σταθερά;

[<u>Υπόδειξη.</u> Πρβλ. το Παράδειγμα 5.18 (5).]

17) Έστω f,g ακέραιες συναρτήσεις ώστε $|f(z)|\leq|g(z)|$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Βρείτε τη σχέση που συνδέει τις f και g.

[<u>Υπόδειξη.</u> Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $g\not\equiv 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)},\quad z\in\mathbb{C}\setminus Z(g)$. Αποδείξτε ότι η h επεκτείνεται σε μια ακέραια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $|h(z)|\leq 1,\quad z\in\mathbb{C}$.]

18) Έστω f ακέραια συνάρτηση ώστε το $Z(f)$ να είναι άπειρο. Αποδείξτε ότι το $Z(f)$ είναι μη φραγμένο σύνολο.

19) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $a\in\Omega$ ώστε $f^{(n)}(a)=0,\quad n\geq 0$. Αποδείξτε ότι $f\equiv 0$.

20) Έστω $\mathrm{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=x^2,\quad x\geq 0$ και $g(x)=x^3,\quad x<0$. Υπάρχει ακέραια συνάρτηση f η οποία να επεκτείνει την g;

21) Έστω $f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $|f(z)|\leq M<+\infty$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

22) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό, f ολόμορφη στο Ω και $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$. Αν F είναι παράγουσα της f στον δίσκο $\Delta(a,r)$, αποδείξτε ότι η F επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση στο Ω.

23) Έστω f ακέραια συνάρτηση. Τι συμπεραίνετε για την f στις ακόλουθες περιπτώσεις: (α) $|f(z)|\geq 1$, για κάθε $z\in\mathbb{C}$ και (β) f' φραγμένη.

24) Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Υπάρχει ακέραια συνάρτηση f ώστε $(f(z))^n = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$;

[Υπόδειξη. Αν υπήρχε τέτοια f, τότε θα είχαμε ότι $|f(z)| = |z|^{\frac{1}{n}}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Χρησιμοποιήστε την άσκηση 16.]

25) Έστω f ακέραια συνάρτηση ώστε $f'\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad n \geq 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

26) Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\} \right) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και φραγμένη. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

[Υπόδειξη. Επειδή η f είναι ολόμορφη και φραγμένη, οι μεμονωμένες ανωμαλίες $\frac{1}{n}, \quad n \geq 1$ αυτής είναι επουσιώδεις. Έτσι η f μπορεί να θεωρηθεί ως μια ολόμορφη και φραγμένη συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.]

27) Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μια (αναγκαία) ολόμορφη συνάρτηση ζ επί του Ω.

[Υπόδειξη. Έστω $z \in \Omega$, τότε $n^z = e^{z \log n}$ και $\left| \frac{1}{n^z} \right| = \left| \frac{1}{e^{\operatorname{Re} z \log n}} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$. Επειδή $\operatorname{Re} z > 1$, η δοθείσα σειρά συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση ζ επί του Ω. Έστω K τυχόν συμπαγές υποσύνολο του Ω, παρατηρούμε ότι τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $K \subseteq \Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$. Άρα, αν $f_n(z) = \frac{1}{n^z}$ τότε $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq \sup_{z \in \Omega_\delta} |f_n(z)| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$. Από το Κριτήριο του Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών και το Παράδειγμα 5.18 (6) έπεται το συμπέρασμα. Η ανωτέρω συνάρτηση ζ μπορεί να επεκταθεί σε μια ολόμορφη συνάρτηση στον τόπο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Η προκύπτουσα επέκταση είναι η περίφημη ζ -συνάρτηση του Riemann. Για τις ιδιότητες της ζ -συνάρτησης παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.]

6. Σειρές Laurent και η Θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο αποδείξαμε ότι οι ολόμορφες συναρτήσεις είναι αναλυτικές, δηλ. τοπικά παραστάσιμες με δυναμοσειρές. Μια ανάλογη αναπαράσταση με διπλές σειρές της μορφής $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ισχύει και για συναρτήσεις οι οποίες είναι ολόμορφες σε δακτυλίους $r<|z-a|<R$. Αυτού του είδους οι σειρές είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη των μεμονωμένων ανωμαλιών.

6.1 Σειρές Laurent

Μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

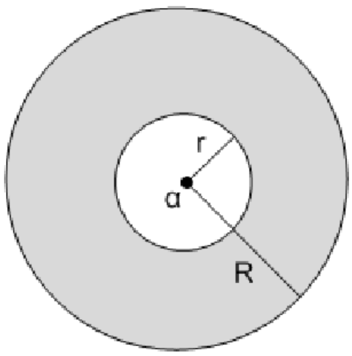
ονομάζεται σειρά Laurent κέντρου a.

Παρατηρούμε ότι αν $c_{-n}=0$, για $n \geq 1$, τότε η σειρά Laurent ταυτίζεται με δυναμοσειρά.

Ένας δακτύλιος, είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ της μορφής

$$\Delta(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r<|z-a|<R\},$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ και $0 \leq r < R \leq +\infty$.



Όταν θα λέμε ότι η διπλή σειρά (1) συγκλίνει με κάποια έννοια, θα εννοούμε ότι και οι δύο σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

συγκλίνουν με αυτή την έννοια (π.χ. απλή, απόλυτη ή ομοιόμορφη σύγκλιση) και βέβαια τότε το άθροισμα της διπλής σειράς είναι $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \underset{\text{ορ.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$.

Οι σειρές Laurent ορίζουν, όπως θα διαπιστώσουμε, ολόμορφες συναρτήσεις σε δακτυλίους.

<u>**Πρόταση 6.1**</u> Έστω $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ μια σειρά Laurent. Υποθέτουμε ότι $R>0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ και $\frac{1}{r}$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ και ακόμη ότι $r<R$. Τότε η συνάρτηση

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \Delta(a,r,R) \tag{1}$$

είναι ολόμορφη και

$$f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}, \quad z \in \Delta(a,r,R).$$

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι η

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{συγκλίνει απόλυτα για } |z-a|<R$$

και ανάλογα η

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \qquad \text{συγκλίνει απόλυτα για } \frac{1}{|z-a|}<\frac{1}{r} \text{ ή για}$$

$|z-a|>r$.

Επομένως η $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε z ώστε $r<|z-a|<R$. Επίσης, επειδή η f_1 είναι μια δυναμοσειρά και $f_2=g\left(\frac{1}{z-a}\right)$, όπου g είναι η δυναμοσειρά $g(w)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$, οι f_1 και f_2 είναι και οι δύο ολόμορφες στα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης αυτών. Επομένως η $f=f_1+f_2$ είναι ολόμορφη στην τομή αυτών των πεδίων, που είναι ο δακτύλιος $\Delta(a,r,R)$.

Ο τύπος για την παράγωγο της f προκύπτει εύκολα. Εφαρμόζουμε πρώτα τον κανόνα αλυσίδας στην $f_2=g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ για $|z-a|>r$ και κατόπιν λαμβάνουμε,

$f'(z)=f_1'(\mathrm{z})+f_2'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$, για $z \in \Delta(a,r,R)$.

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

Πρέπει να είναι σαφές ότι η σειρά Laurent $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε δακτύλιο $\overline{\Delta(a,\rho_1,\rho_2)}=\{z\in\mathbb{C}: \rho_1 \le |z-a| \le \rho_2\}$, όπου $r<\rho_1<\rho_2<R$.
(Γιατί;)

Παραδείγματα 6.2 1) Έστω $f(z)=\dfrac{1}{\beta-z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{\beta\}$. Από το Παράδειγμα 5.18 (1) γνωρίζουμε ότι αν $a\neq\beta$ τότε

$$f(z)=\frac{1}{\beta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta-a)^{n+1}}\cdot(z-a)^n, \quad z\in\Delta(a,R_a)$$

όπου $R_a=|a-\beta|$.

Η ανάλυση της f σε σειρά Laurent στον δακτύλιο $\Delta(a,R_a,+\infty)$ (ο οποίος είναι συμπλήρωμα του κλειστού δίσκου $\Delta(a,R_a)$) έχει ως ακολούθως:

Έστω $z\in\Delta(a,R_a,+\infty)\Leftrightarrow |z-a|>R_a=|a-\beta|$. Τότε $\dfrac{|\beta-a|}{|z-a|}<1$ και συνεπώς, με χρήση της γεωμετρικής σειράς έχουμε

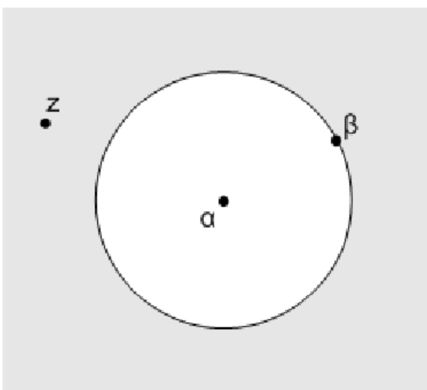
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta-a}{z-a}\right)^n=\frac{1}{1-\dfrac{\beta-a}{z-a}}=\frac{z-a}{z-\beta}.$$

Από όπου έπεται ότι

$$\frac{1}{\beta-z}=-\frac{1}{z-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta-a)^n}{(z-a)^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \quad z\in\Delta(a,R_a,+\infty).$$

Επίσης, παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι για $m\ge 2$ ισχύει

$$\frac{1}{(\beta-z)^m}=(-1)^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdots(\mathrm{n+m-1})(\beta-a)^n\frac{1}{(z-a)^{n+m}}, \quad z\in\Delta(a,R_a,+\infty).$$



$R_a=|a-\beta|$

2) Να βρεθεί ο δακτύλιος σύγκλισης της σειράς Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}.$$

Λύση. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$. Θέτουμε $w=\frac{1}{z}$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=e^w-1$ συγκλίνει για κάθε $w\in\mathbb{C}$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$ συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(0,0,+\infty)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Έπεται προφανώς ότι η δοθείσα σειρά Laurent συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(0,0,1)=\Delta(0,1)\setminus\{0\}=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<1\}$ και
$f(z)=\frac{1}{1-z}+e^{\frac{1}{z}}-1=\frac{z}{1-z}+e^{\frac{1}{z}},\quad 0<|z|<1$.

3) Ενδέχεται μια σειρά Laurent να μη συγκλίνει σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\frac{1}{z^n}$. Παρατηρούμε ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει για $|z|<1$, η δε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\frac{1}{z^n}$ συγκλίνει για $|z|>3$, εφ' όσον η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot w^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=\frac{1}{3}$. Έπεται προφανώς ότι ο δακτύλιος σύγκλισης της δοθείσας σειράς Laurent είναι το κενό σύνολο.

4) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ με κέντρο το 0.

Λύση. Η f είναι προφανώς ολόμορφη στον δακτύλιο $\Delta(0,0,+\infty)$. Αντικαθιστώντας στην εκθετική συνάρτηση e^z το z με το $-\frac{1}{z^2}$ βρίσκουμε το ζητούμενο ανάπτυγμα.

$$f(z)=1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}+\ldots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

Παρατηρούμε ότι το 0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, εφ' όσον

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}}} f(x)=0\neq+\infty=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}}} f(\mathrm{i}\,x).$$

<u>Ιστορική σημείωση.</u> Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι, αν περιορίσουμε τη συνάρτηση $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}$ στην πραγματική ευθεία και θέσουμε $f(0)=0$, τότε η προκύπτουσα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια C^∞-διαφορίσιμη συνάρτηση ώστε $f^{(n)}(0)=0$, για κάθε $n\geq 1$. Επομένως η σειρά Taylor κέντρου 0 της f είναι

$$0+0\cdot x+0\cdot x^2+\ldots=0\neq f(x)\quad \text{για}\quad x\in\mathbb{R}\ \text{με}\ x\neq 0.$$

Δηλαδή η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια C^{∞}-διαφορίσιμη συνάρτηση, η οποία δεν είναι πραγματική αναλυτική συνάρτηση.

Σημειώνουμε ότι ο Cauchy χρησιμοποίησε ευρέως τις δυναμοσειρές στη Μιγαδική Ανάλυση. Και είναι ίσως μια παραξενιά της τύχης ότι βρήκε το ανωτέρω αντιπαράδειγμα το 1829, ενώ δύο χρόνια αργότερα απέδειξε ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική (Θεώρημα 5.11). Με την ευκαιρία ας αναφέρουμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα, λέγεται <u>πραγματική αναλυτική</u> συνάρτηση, αν για κάθε $a\in\mathrm{I}$ υπάρχει $r>0$: $(a-\mathrm{r},a+\mathrm{r})\subseteq\mathrm{I}$ και μια ακολουθία $(a_n)\subseteq\mathbb{R}$ ώστε

$$f(\mathrm{x})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\mathrm{x}-a)^n,\quad |x-a|<r.$$

Ο Cauchy απέδειξε ότι μια C^{∞}-διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δεν είναι αναγκαία πραγματική αναλυτική (προφανώς το αντίστροφο ισχύει). Αλλά στη μιγαδική περίπτωση, κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική. Αυτό σημαίνει ότι, κατά κάποιον τρόπο, η Μιγαδική Ανάλυση είναι απλούστερη της Πραγματικής Ανάλυσης.

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο της Πρότασης 6.1. Δηλαδή, κάθε ολόμορφη συνάρτηση σε δακτύλιο αναλύεται σε σειρά Laurent. Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου σημαντικού θεωρήματος, το οποίο αποδεικνύεται γενικεύοντας τον τύπο του Cauchy σε δακτυλίους. Για την απόδειξή του παραπέμπουμε στο [Μ-Χ] (παράγραφοι 7.3.1, 7.3.2 και 7.3.3).

<u>**Θεώρημα 6.3**</u> (Laurent) Έστω $f:\Delta(a,r,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε η f αναλύεται σε σειρά Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},\quad z\in\Delta(a,r,R),$$

ούτως ώστε:

α) Οι δύο σειρές συγκλίνουν απόλυτα για κάθε $z\in\Delta(a,r,R)$ και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δακτυλίου $\Delta(a,r,R)$.

β) Η ακολουθία των συντελεστών $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μοναδική και αν $r<\rho<R$ τότε

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

<u>Σημείωση</u>. Η ανάλυση είναι μοναδική υπό την ακόλουθη έννοια: Αν $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ακολουθία μιγαδικών ώστε η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-a)^n$ συγκλίνει (απλά) στον μιγαδικό $f(z)$, για κάθε $z\in\Delta(a,r,R)$, τότε $b_n=a_n$, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$.

6.2 Σειρές Laurent και μεμονωμένες ανωμαλίες

Το Θεώρημα 6.3 παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περίπτωση που $r=0$, διότι τότε η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο a. Έτσι λαμβάνουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό των μεμονωμένων ανωμαλιών, ως συνέπεια του Θεωρήματος 6.3.

Πόρισμα 6.4 Έστω $f:\Delta(a,0,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με ανάπτυγμα Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},\qquad 0<|z-a|<R.$$

Τότε ισχύουν:

α) Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n}=0$, για κάθε $n\geq 1$.

β) Η f έχει πόλο τάξης m στο a αν και μόνο αν $a_{-m}\neq 0$ και $a_{-n}=0$, για κάθε $n>m$.

γ) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν υπάρχει $M\subseteq\mathbb{N}$ άπειρο ώστε $a_{-n}\neq 0$ για κάθε $n\in M$.

Απόδειξη. α) "$\Rightarrow$" Αν a επουσιώδης ανωμαλία της f και $0<\rho<R$, τότε (από το Θεωρ. 6.3) έχουμε για κάθε $n\in\mathbb{N}$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta=0\ ,$$

εφ' όσον η $g(\zeta)=f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}$ είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(a,R)$ και $C(a,\rho)\subseteq\Delta(a,R)$.

"$\Leftarrow$" Προφανές, αφού τότε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad 0<|z-a|<R$. Έτσι αρκεί να θέσουμε $f(a)=a_0$.

β) "$\Rightarrow$" Επειδή η f έχει πόλο τάξης m στο a, από το Θεώρημα 5.33 χαρακτηρισμού των πόλων, έχουμε ότι $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m},\quad z\in\Delta(a,0,\mathrm{R})$, όπου $g:\Delta(a,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(a)\neq 0$ και $m\in\mathbb{N}$. Έτσι με τη χρήση των τύπων για τους συντελεστές στο ανάπτυγμα Laurent του Θεωρήματος 6.3, υπολογίζουμε για $0<\rho<R$

$$a_{-m}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-m+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{\mathrm{g}(\zeta)}{(\zeta-a)^m}\cdot\frac{1}{(\zeta-a)^{-m+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{\mathrm{g}(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta=$$

= (ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy) = $\delta_{C(a,\rho)}(a)\cdot g(a)=g(a)\neq 0$.

Ανάλογα, υπολογίζουμε ότι $a_{-n}=0$, για $n>m$.

"$\Leftarrow$" Εξ' υποθέσεως έχουμε ότι $a_{-m}\neq 0$ και

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\frac{a_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m},\quad 0<|z-a|<R\,.$$

Τότε , $f(z)-\left(\frac{a_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad 0<|z-a|<R$

και άρα από τον ισχυρισμό (γ) του Θεωρήματος 5.33, έπεται το συμπέρασμα. (Μάλιστα η συνάρτηση $K(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}$ είναι το κύριο μέρος του πόλου a .)

γ) Θέτουμε $M=\{n\in\mathbb{N}: a_{-n}\neq 0\}$.

“$\Rightarrow$” Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το M είναι πεπερασμένο. Αν $M=\varnothing$, τότε από τον ισχυρισμό (α) του Θεωρήματος θα είχαμε ότι το a θα ήταν επουσιώδης ανωμαλία της f . Και αν $M\neq\varnothing$ τότε, θέτοντας $m=\max M$, θα είχαμε $a_{-m}\neq 0$ και $a_{-n}=0$ για κάθε $n>m$, άρα από τον ισχυρισμό (β) το a θα ήταν πόλος της f . Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο και έτσι το M είναι αναγκαία άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

“$\Leftarrow$” Ας υποθέσουμε ότι το M είναι άπειρο σύνολο. Τότε από τους ισχυρισμούς (α) και (β) του θεωρήματος, το a δεν μπορεί να είναι επουσιώδης ανωμαλία αλλά ούτε και πόλος της f . Επομένως είναι ουσιώδης ανωμαλία της f .

<u>**Παρατήρηση 6.5**</u> Αν το σημείο a είναι μη επουσιώδης μεμονωμένη ανωμαλία της f και

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},\quad 0<|z-a|<R$$

είναι το ανάπτυγμα Laurent της f στον δακτύλιο $\Delta(a,0,R)$ τότε η συνάρτηση

$$K(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}=\frac{a_{-1}}{z-a}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots\ ,\quad z\in\Delta(a,0,R)$$

ονομάζεται το <u>κύριο μέρος</u> της ανωμαλίας a .

Παρατηρούμε ότι τότε η $f(z)-K(z),\quad z\in\Delta(a,0,R)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a , αφού $f(z)-K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\quad 0<|z-a|<R$ (αρκεί να θέσουμε $g(a)=a_0$, όπου $g(z)=f(z)-K(z)$) και ακόμη ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνει απόλυτα για $z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. (Εξηγήστε το γιατί.)

6.3 Λογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω $f:\Delta(a,0,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με ανάπτυγμα Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},\qquad 0<|z-a|<R.$$

Αν ολοκληρώσουμε την f πάνω σ' έναν κύκλο $C(a,\rho)$ με $0<\rho<R$, τότε (επειδή μια σειρά Laurent συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Delta(a,0,R)$ και οι συναρτήσεις $(\zeta-a)^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq -1$ έχουν παράγουσα) έχουμε

$$\int_{C(a,\rho)}f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\int_{C(a,\rho)}(\zeta-a)^n\,d\zeta=a_{-1}\cdot\int_{C(a,\rho)}\frac{d\zeta}{\zeta-a}=a_{-1}\cdot 2\pi i\cdot\delta_{C(a,\rho)}(a)=a_{-1}\cdot 2\pi i.$$

<u>Ορισμός 6.6</u> Ο συντελεστής a_{-1} του $\dfrac{1}{z-a}$ στο ανωτέρω ανάπτυγμα, ονομάζεται το <u>ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο σημείο a</u> και συμβολίζεται με $\operatorname{Res}(f,a)$. Έτσι έχουμε

$$\operatorname{Res}(f,a)\underset{o\rho.}{=}a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}f(\zeta)\,d\zeta \qquad (1)$$

και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο a είναι ό,τι «απομένει» μετά την ολοκλήρωση.

Είναι προφανές ότι αν η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a, τότε $\operatorname{Res}(f,a)=0$.

Τα επόμενα δύο αποτελέσματα είναι χρήσιμα για τον υπολογισμό ολοκληρωτικών υπολοίπων.

<u>Πρόταση 6.7</u> Έστω a πόλος τάξης m της συνάρτησης f.

Τότε $\operatorname{Res}(f,a)=\dfrac{1}{(m-1)!}\cdot\lim\limits_{z\to a}g^{(m-1)}(z)\quad\left(=\dfrac{1}{(m-1)!}\cdot g^{(m-1)}(a)\right)$, όπου $g(z)=(z-a)^m\cdot f(z)$ και $g^{(m-1)}(z)$ είναι η $m-1$ τάξης παράγωγος της g.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.33 του χαρακτηρισμού των πόλων έχουμε ότι $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-a)^m},\quad z\neq a$, όπου g ολόμορφη σε κάποιον δίσκο $\Delta(a,R)$ με $g(a)\neq 0$.

Έτσι για $0<\rho<R$ έχουμε

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}f(\zeta)\,d\zeta\right]=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)}\frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^m}d\zeta\right]=$$ (Θεώρημα 5.11 αναλυτικότητας ολομόρφων συναρτήσεων) $=\frac{1}{(m-1)!}\cdot g^{(m-1)}(a)=$ (λόγω της συνέχειας της $g^{(m-1)}$ στο a)

$$=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to a}g^{(m-1)}(z).$$

Πρόταση 6.8 α) Αν το a είναι απλός πόλος της f $(m=1)$, τότε

$$\operatorname{Re}s(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z).$$

β) Αν $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$, όπου $p(a)\neq 0,\ q(a)=0,\ q'(a)\neq 0$, τότε

$$\operatorname{Re}s(f,a)=\frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Απόδειξη. α) Προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 6.7 για $m=1$. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε το αποτέλεσμα και ως εξής:

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

Άρα $(z-a)\cdot f(z)=a_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^{n+1}$ και τότε $\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z)=a_{-1}$.

β) Παρατηρούμε ότι, το a είναι απλός πόλος της f (γιατί;) και επειδή $q(a)=0$ έχουμε

$$\lim_{z\to a}\frac{(z-a)\cdot p(z)}{q(z)}=\lim_{z\to a}\frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(a)}{z-a}}=\frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Από τον ισχυρισμό (α) έπεται ότι $\operatorname{Re}s(f,a)=\frac{p(a)}{q'(a)}$.

Παραδείγματα 6.9 1) Έστω $f(z)=\frac{\cos(\pi z)}{1-z^n},\quad n\geq 2$. Υπολογίστε το $\operatorname{Re}s(f,1)$.

Λύση. Θέτουμε $p(z)=\cos(\pi z),\quad q(z)=1-z^n$ και παρατηρούμε ότι $p(1)=\cos\pi=-1\neq 0,\quad q(1)=0,\quad q'(z)=-nz^{n-1}$ και άρα $q'(1)=-n$. Έπεται από την Πρόταση 6.8 (β) ότι $\operatorname{Re}s(f,1)=\frac{p(1)}{q'(1)}=\frac{-1}{-n}=\frac{1}{n}$. Το 1 είναι βέβαια απλός πόλος της f.

2) Έστω $f(z)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$. Υπολογίστε το $\operatorname{Re}s(f,1)$.

Λύση. Πρέπει να είναι σαφές ότι το 1 είναι πόλος τάξης 3 της f. Έτσι από την Πρόταση 6.7 έχουμε $\operatorname{Re}s(f,1)=\frac{g''(1)}{2!}$, όπου $g(z)=(z-1)^3\cdot f(z)=(z+1)^3$.

Παρατηρούμε ότι $g''(z)=3\cdot 2(z+1)$, άρα $g''(1)=6(1+1)=12$. Έπεται ότι

$\operatorname{Re}s(f,1)=\frac{12}{2!}=6$.

3) Έστω $f(z)=\frac{1}{z^2\sin z}$. Υπολογίστε το $\operatorname{Re}s(f,0)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$f(z)=\frac{1}{z^2\sin z}=\frac{1}{z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)}=\frac{g(z)}{z^3},\ \text{όπου}\ g(z)=\frac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots}\ \text{ολόμορφη}$$

σε περιοχή του 0 (π.χ. στον δίσκο $\Delta(0,\pi)$) και $g(0)=1\neq 0$. Άρα το 0 είναι πόλος τάξης 3 της f και έτσι από την Πρόταση 6.7, $\operatorname{Re}s(f,0)=\frac{g''(0)}{2!}$.

Παρατηρούμε ότι $g(z)=z^3\cdot f(z)=\frac{z}{\sin z}$, για $0<|z|<\pi$ και $g(0)=1$. Θέτουμε

$\varphi(z)=\frac{\sin z}{z}$ για $z\neq 0$ και $\varphi(0)=1$ (ακέραια συνάρτηση), συνεπώς

$g(z)=\frac{1}{\varphi(z)},\quad |z|<\pi$. Έπεται ότι, για $|z|<\pi$ έχουμε

$$g'(z)=\left(\frac{1}{\varphi(z)}\right)'=-\frac{\varphi'(z)}{(\varphi(z))^2}\quad\text{και}\quad g''(z)=-\left(\frac{\varphi'(z)}{(\varphi(z))^2}\right)'=-\frac{\varphi''(z)\cdot(\varphi(z))^2-2(\varphi'(z))^2\cdot\varphi(z)}{(\varphi(z))^4}.$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι αν μια συνάρτηση h είναι ολόμορφη σε ένα δίσκο $\Delta(0,\mathrm{R})$ κέντρου 0, τότε για $|z|<R$ ισχύει

$$h(z)=h(0)+h'(0)\cdot z+\frac{h''(0)}{2!}\cdot z^2+\frac{h'''(0)}{3!}\cdot z^3+\ldots\quad .$$

Άρα αν θέσουμε $\varphi(z)=\frac{h(z)-h(0)}{z-0}$ για $0<|z|<R$ και $\varphi(0)=h'(0)$, τότε η φ είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta(0,\mathrm{R})$ (πρβλ. το Πόρισμα 5.17.2) και τότε

$$\varphi(z)=h'(0)+\frac{h''(0)}{2!}\cdot z+\frac{h'''(0)}{3!}\cdot z^2+\ldots\ ,\ \text{για}\ |z|<R.$$

Έπεται ότι $\varphi(0)=h'(0)$, $\varphi'(0)=\dfrac{h''(0)}{2!}$, $\dfrac{\varphi''(0)}{2!}=\dfrac{h'''(0)}{3!}$ και άρα $\varphi''(0)=\dfrac{2!}{3!}\cdot h'''(0)=\dfrac{h'''(0)}{3}$.

Αν εφαρμόσουμε τις προηγηθείσες παρατηρήσεις για τη συνάρτηση $h(\mathrm{z})=\sin\mathrm{z}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi(0)=h'(0)=\cos 0=1,\qquad \varphi'(0)=\frac{h''(0)}{2!}=-\frac{\sin 0}{2!}=0,\qquad \varphi''(0)=\frac{1}{3}\cdot h'''(0)=$$

$$=\frac{1}{3}(-\cos 0)=-\frac{1}{3}.$$

Έτσι, από την έκφραση της $g''(\mathrm{z})$ για $z=0$ υπολογίζουμε

$$\operatorname{Re}s(f,0)=\frac{g''(0)}{2!}=-\frac{1}{2}\left[\frac{(-1/3)\cdot 1^2-2\cdot(0)^2\cdot 1}{1^4}\right]=\frac{1}{6}.$$

4) Έστω $f(z)=\dfrac{1}{\left(1+z^2\right)^n}$. Υπολογίστε το $\operatorname{Re}s(f,i)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $f(z)=\dfrac{1}{\left(z-i\right)^n\cdot\left(z+i\right)^n}$. Άρα οι ανωμαλίες $\pm i$ της f είναι και οι δύο πόλοι τάξης n της f.

Θέτουμε $g(z)=\left(z-i\right)^n\cdot f(z)=\dfrac{1}{\left(z+i\right)^n}$, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.7 έχουμε ότι

$$\operatorname{Re}s(f,i)=\frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\cdot\lim_{z\to i}g^{(\mathrm{n}-1)}(z)=\frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\cdot g^{(\mathrm{n}-1)}(i).$$

Παρατηρούμε ότι $g^{(\mathrm{n}-1)}(z)=(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2\mathrm{n}-2)\cdot\dfrac{1}{(z+i)^{2n-1}}$, άρα

$$g^{(\mathrm{n}-1)}(i)=(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2\mathrm{n}-2)\cdot\frac{1}{(2i)^{2n-1}}.$$

Έπεται ότι

$$\operatorname{Re}s(f,i)=\frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\cdot g^{(\mathrm{n}-1)}(i)=\frac{1}{(\mathrm{n}-1)!}\cdot(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(2i)^{2n-1}}=-i\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\cdot\left[(n-1)!\right]^2}.$$

5) Στην περίπτωση πόλων υψηλής τάξης ή ουσιώδους ανωμαλίας, ο πιο ενδεδειγμένος τρόπος για να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο, είναι με τον υπολογισμό του αναπτύγματος Laurent.

Έτσι για τον υπολογισμό των: (α) $\mathrm{Re}s(e^{-\frac{1}{z^2}},0)$, (β) $\mathrm{Re}s\,(\sin\frac{1}{z-1},1)$ και

(γ) $\mathrm{Re}s(\frac{1}{z^n},0)$, $\mathrm{n}\geq 1$ θα έχουμε:

(α) Από το Παράδειγμα 6.2(4) προκύπτει αμέσως ότι $\mathrm{Re}s(e^{-\frac{1}{z^2}},0)=0$.

(β) $\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\cdots$. Άρα $\mathrm{Re}s\,(\sin\frac{1}{z-1},1)=1$.

(γ) $\mathrm{Re}s(\frac{1}{z^n},0)=1$, αν $\mathrm{n}=1$ και $=0$ αν $\mathrm{n}\geq 2$.

Παρατηρούμε ότι οποτεδήποτε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο μπορεί να υπολογισθεί, μας δίνει έναν απλό τρόπο υπολογισμού ενός επικαμπυλίου ολοκληρώματος

($\int\limits_{C(a,\rho)} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\cdot \mathrm{Re}s(f,a)$).

Ο Cauchy ήταν ο πρώτος ο οποίος εκμεταλλεύτηκε αυτή την ιδέα και την ανέπτυξε σε μια ισχυρή μέθοδο, γνωστή ως ο «Λογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων». Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy, το οποίο γενικεύει τον τύπο (1) του Ορισμού 6.6.

Θεώρημα 6.10 (Ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτό αστρόμορφο σύνολο, $a_1,a_2,\ldots,a_N\in\Omega$ και $f:\Omega\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν γ είναι κλειστή καμπύλη του Ω, η οποία αποφεύγει κάθε μία από τις ανωμαλίες a_k, $1\leq k\leq N$ (δηλ. $[\gamma]\subseteq\Omega\setminus\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$) τότε

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}s(f,a_k)\cdot\delta_\gamma(a_k)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε για απλότητα ότι $N=1$, δηλαδή ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο $a=a_1$ (την οποία υποθέτουμε βέβαια ότι είναι μη επουσιώδης). Έστω $R>0$ ώστε $\Delta(a,R)\subseteq\Omega$. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent :

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$, της f στον δακτύλιο $\Delta(a,0,R)$ και το κύριο μέρος

$K(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ της ανωμαλίας a.

Από την Παρατήρηση 6.5 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνει (απόλυτα για $z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$ και) ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ και η συνάρτηση

$g(z)=f(z)-K(z),\ z\in\Omega\setminus\{a\}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a, εφ' όσον

$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,\ 0<|z-a|<R$.

Από το Θεώρημα του Cauchy σε αστρόμορφους τόπους έπεται ότι

$$\int_\gamma \mathrm{g}(\zeta)\,d\zeta=0\Leftrightarrow\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\int_\gamma K(\zeta)\,d\zeta$$

ή $$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\int_\gamma\left(\frac{a_{-1}}{\zeta-a}+\frac{a_{-2}}{(\zeta-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(\zeta-a)^n}+\ldots\right)d\zeta=$$

$$=a_{-1}\cdot\delta_\gamma(a)+0+\ldots+0+\ldots=$$

(οι συναρτήσεις $\dfrac{1}{(\zeta-a)^n},\ n\geq 2$ έχουν παράγουσα στο $\mathbb{C}\setminus\{a\}$)

$$=\mathrm{Re}s(f,a)\cdot\delta_\gamma(a).$$

Άρα $$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\mathrm{Re}s(f,a)\cdot\delta_\gamma(a).$$

Σημειώνουμε ότι η εναλλαγή άθροισης και ολοκλήρωσης την οποία χρησιμοποιήσαμε λίγο πριν, επιτρέπεται καθώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

Στη γενική περίπτωση όπου $N\geq 2$, θεωρούμε τα κύρια μέρη $K_1,\ldots,K_N$ των ανωμαλιών $a_1,\ldots,a_N$ της f. Τότε (η συνάρτηση $K_1+\ldots+K_N$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{a_1,\ldots,a_N\}$ και) η συνάρτηση

$$g(z)=f(z)-(K_1(z)+\ldots+K_N(z))$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία σε κάθε ένα από τα σημεία $a_1,\ldots,a_N$. Έτσι από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\int_\gamma \mathrm{g}(\zeta)\,d\zeta=0\Leftrightarrow\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta=\int_\gamma K_1(\zeta)\,d\zeta+\ldots+\int_\gamma K_N(\zeta)\,d\zeta.$$

Από όπου, όπως προηγουμένως, έπεται το συμπέρασμα.

<u>**Παρατήρηση 6.11**</u> Ο τύπος που εμφανίζεται στο Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι <u>γενικότερος</u> του τύπου του Cauchy, αλλά και του τύπου του Cauchy για παραγώγους.

Πράγματι, έστω f ολόμορφη στον αστρόμορφο τόπο Ω, $a\in\Omega$, γ κλειστή καμπύλη του Ω η οποία δεν διέρχεται από το σημείο a και $R>0$ ώστε $\Delta(a,R)\subseteq\Omega$. Τότε

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+... \quad , \qquad |z-a|<R.$$

Έστω N μη αρνητικός ακέραιος, τότε για $z\in\Delta(a,0,R)$ έχουμε

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}}=\frac{f(a)}{(z-a)^{N+1}}+\frac{f'(a)}{(z-a)^{N}}+...+\frac{f^{(\mathrm{N})}(a)}{\mathrm{N}!(\mathrm{z}-a)}+\frac{f^{(\mathrm{N}+1)}(a)}{(\mathrm{N}+1)!}+\frac{f^{(\mathrm{N}+2)}(a)}{(\mathrm{N}+2)!}(\mathrm{z}-a)+... \quad .$$

Από τον ορισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου έπεται ότι

$$\mathrm{Re}s\left(\frac{f(z)}{(z-a)^{N+1}},a\right)=\frac{f^{(\mathrm{N})}(a)}{N!} \cdot$$

Έτσι από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{N+1}}d\zeta=\mathrm{Re}s\left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{N+1}},a\right)\cdot\delta_\gamma(a)=\frac{f^{(\mathrm{N})}(a)}{N!}\cdot\delta_\gamma(a).$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$f^{(\mathrm{N})}(a)\cdot\delta_\gamma(a)=\frac{N!}{2\pi i}\cdot\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{N+1}}d\zeta\,,$$

δηλαδή τον τύπο του Cauchy για παραγώγους.

Ο κανόνας L' Hospital που ακολουθεί είναι χρήσιμος σε υπολογισμούς.

Πρόταση 6.12 (Μιγαδικός Κανόνας L' Hospital) Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος, f,g ολόμορφες συναρτήσεις επί του Ω και $a\in\Omega$. Υποθέτουμε ότι το a είναι ρίζα τάξης k της f και ρίζα τάξης m της g. Τότε το a είναι μεμονωμένη ανωμαλία για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$, η οποία είναι:

α) Επουσιώδης αν $k\geq m$. Στην περίπτωση αυτή

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\begin{cases}0, & \alpha\nu\ \ k>m\ \left(\rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ \ \tau\acute{\alpha}\xi\eta\varsigma\ k-m\ \ \tau\eta\varsigma\ \ \frac{f}{g}\right)\\ \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}, & \alpha\nu\ \ k=m\end{cases}$$

β) Πόλος τάξης $m-k$, αν $k<m$.

Απόδειξη. Έστω $\Delta(a,R)\subseteq\Omega$, τότε από το Θεώρημα αναλυτικότητας ολομόρφων συναρτήσεων μπορούμε να γράψουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n \quad \text{και} \quad \mathrm{g}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^n \quad \text{για} \quad |z-a|<r.$$

Επειδή το σημείο a είναι ρίζα τάξης k για την f και τάξης m για την g, έχουμε από το Κριτήριο εύρεσης τάξης μιας ρίζας ότι

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0 \qquad \text{και} \qquad b_0 = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0, \quad b_m \neq 0 .$$

Αν $z \in \Delta(a, R)$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^n = (z-a)^k \cdot f_1(z) \qquad \text{και}$$

$$\mathrm{g}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^n = (z-a)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(z-a)^n = (z-a)^m \cdot g_1(z),$$

όπου $\quad a_k = f_1(a) \neq 0 \quad$ και $\quad b_m = g_1(a) \neq 0$.

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_1(\mathrm{z}) \neq 0 \neq g_1(z)$, για $z \in \Delta(a, r)$, εν ανάγκη περιοριζόμενοι σε έναν δίσκο $\Delta(a, r_1)$ με $0 < r_1 \leq r$ (πρβλ. την παρατ. 5.20). Έτσι έχουμε για $z \in \Delta(a, 0, r)$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^k}{(z-a)^m} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = (z-a)^{k-m} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \qquad (1).$$

Αποδεικνύουμε τώρα τους ισχυρισμούς (α) και (β).

(α) Αν $k > m$ τότε από την (1) έχουμε

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} (z-a)^{k-m} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = 0 \cdot \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = 0 .$$

Άρα από το Θεώρημα 5.26 το a είναι ρίζα τάξης $k-m$ της $\dfrac{f}{g}$, εφ' όσον $\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)} \neq 0$.

Αν $k = m$ τότε $\displaystyle \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)} = \frac{a_k}{b_k} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}$.

(β) Αν $k < m$ τότε $\displaystyle \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^{m-k}} \cdot \frac{f_1(z)}{g_1(z)}, \quad z \in \Delta(a, 0, r)$.

Άρα από το Θεώρημα 5.33 το a είναι πόλος τάξης $m-k$ της $\dfrac{f}{g}$, εφ' όσον $m-k > 0$ και $\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)} \neq 0$.

<u>Παραδείγματα 6.13</u> 1) Αποδείξτε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i (1 - \sin 1 - \cos 1)$$

όπου γ ο κύκλος $C(0,3)$.

Λύση. Οι μόνες ανωμαλίες της $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z-1)^2}$ στο εσωτερικό του $C(0,3)$ είναι οι $z=0$ (απλός πόλος) και $z=1$ (διπλός πόλος). Επομένως από το Θεώρημα 6.10 έχουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[Res(f,0)+Res(f,1)].$$

Από την Πρόταση 6.7 έχουμε

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\cos z}{z(z-1)^2}=1$$

και $$Res(f,1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\cdot\frac{\cos z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z}\right)=-\cos 1-\sin 1.$$

Επομένως $$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(1-\cos 1-\sin 1).$$

2) Έστω $z_1,\ldots,z_n$ διαφορετικοί μιγαδικοί και P πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$, ώστε $P(z_k)\neq 0,\quad k=1,2,\ldots,n$. Θέτουμε $f(z)=\dfrac{P(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}$.

α) Αποδείξτε ότι η ρητή συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως άθροισμα

$$f(z)=\frac{a_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{a_n}{z-z_n}$$

όπου $a_1,\ldots,a_n$ κατάλληλες σταθερές.

β) Αν γ κλειστή καμπύλη η οποία δεν διέρχεται από τα σημεία $z_1,\ldots,z_n$, υπολογίστε το $\int_\gamma f(z)\,dz$.

γ) Αν $a_1+\cdots+a_n=0$ και $R>0$ ώστε $|z_k|\leq R$, για $k=1,2,\ldots,n$, αποδείξτε ότι η f έχει παράγουσα στον τόπο $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$.

Λύση. α) Τα σημεία $z_1,\ldots,z_n$ είναι προφανώς απλοί πόλοι της f. Επομένως, αν $a_k=\mathrm{Re}s(f,z_k),\quad k=1,2,\ldots,\mathrm{n}$ τότε η $g(z)=f(z)-\left(\dfrac{a_1}{z-z_1}+\ldots+\dfrac{a_n}{z-z_n}\right)$ είναι ακέραια συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) - \lim_{z\to\infty}\left(\frac{a_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{a_n}{z-z_n}\right) = 0-(0+\ldots+0)=0$$

($\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, αφού βαθμός του $P \le n-1$). Έπεται ότι η g είναι φραγμένη συνάρτηση και άρα από το Θεώρημα Liouville σταθερή. Επειδή $\lim_{z\to\infty} \mathrm{g}(z) = 0$, έπεται προφανώς ότι $\mathrm{g} \equiv 0$, από όπου προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα.

β) Από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έπεται ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R\mathrm{e}s(f,\mathrm{z}_k)\cdot \delta_\gamma(\mathrm{z}_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \delta_\gamma(\mathrm{z}_k) \qquad (1).$$

γ) Από την άσκηση 8 του Κεφ. 5 αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν γ τυχούσα κλειστή καμπύλη του Ω, τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Παρατηρούμε ότι $[\gamma]\cap\overline{\Delta(0,R)} = \varnothing$. Επειδή το συνεκτικό σύνολο $\overline{\Delta(0,R)}$ περιέχεται στο ανοικτό $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ θα περιέχεται σε κάποια (μοναδική) συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$. Από την υπόθεσή μας $z_k \in \overline{\Delta(0,R)}$ για $k = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$. Άρα $\delta_\gamma(z_1) = \ldots = \delta_\gamma(z_n) = \mathrm{m}$ (πρβλ. το Θεώρημα 4.38). Έτσι από την (1) έπεται ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, m \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = 2\pi i m \cdot 0 = 0 .$$

<u>Σημείωση.</u> Ο ισχυρισμός (α) του ανωτέρω παραδείγματος μπορεί βέβαια να αποδειχθεί και στοιχειωδώς, αναλύοντας την f σε απλά κλάσματα. Ένας απλός τρόπος για να γίνει αυτό είναι ο ακόλουθος. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{P(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} = \frac{a_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{a_n}{z-z_n}, \quad z \ne z_k, \quad 1\le k\le n \qquad (1)$$

και θέλουμε να την επιλύσουμε ως προς a_k, $1\le k\le n$.

Για να βρούμε π.χ. τον συντελεστή a_1, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με $z-z_1$ και βρίσκουμε την εξίσωση

$$\frac{P(z)}{(z-z_2)\cdots(z-z_n)} = a_1 + a_2\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}+\ldots+a_n\cdot\frac{z-z_1}{z-z_n} \qquad (2).$$

Θέτοντας στη (2) όπου $z = z_1$ βρίσκουμε

$$a_1 = \frac{P(a_1)}{(a_1-z_2)\cdots(a_1-z_n)} \qquad (=\mathrm{Re}s(f,\mathrm{z}_1)).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε όλους τους συντελεστές a_k, $1\le k\le n$.

Επίσης για τον ισχυρισμό (β), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε (αντί του Θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων) τον δείκτη στροφής καμπύλης. Έτσι από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[a_1\cdot\delta_\gamma(\mathrm{z}_1)+...+a_n\cdot\delta_\gamma(\mathrm{z}_n)] = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^n Res(f,\mathrm{z}_k)\cdot\delta_\gamma(\mathrm{z}_k).$$

3) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(\mathrm{z}-2)(z-3)}$ έχει παράγουσα στον δακτύλιο $\Delta(0,4,+\infty)$. Εξετάστε αν το ίδιο συμβαίνει με τη συνάρτηση

$\mathrm{g}(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(\mathrm{z}-2)(z-3)}$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι οι f και g ικανοποιούν και οι δύο τη συνθήκη που ικανοποιεί η f του παραδείγματος (2) και άρα ικανοποιούν και τον ισχυρισμό (α) του ίδιου παραδείγματος. Έτσι για την f παρατηρούμε ότι έχει απλούς πόλους στα σημεία 1,2 και 3 και συνεπώς

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot h(z),\ \text{όπου}\ \ h(z)=\frac{z}{(\mathrm{z}-2)(z-3)}.\ \text{Άρα}\ \ Res(f,1)=h(1)=\frac{1}{2}.$$

Ανάλογα έχουμε $Res(f,2)=\varphi(2)=-2$, όπου $\varphi(z)=\dfrac{z}{(\mathrm{z}-1)(z-3)}$ και

$Res(f,3)=\psi(3)=\dfrac{3}{2}$, όπου $\psi(z)=\dfrac{z}{(\mathrm{z}-1)(z-2)}$.

Παρατηρούμε ότι $Res(f,1)+Res(f,2)+Res(f,3)=0$ και επειδή οι αριθμοί 1,2 και 3 ανήκουν στον δίσκο $\overline{\Delta(0,4)}$, η f έχει από τον ισχυρισμό (γ) του παραδείγματος (2) παράγουσα στον τόπο $\Delta(0,4,+\infty)$.

Η συνάρτηση g έχει επίσης απλούς πόλους στα σημεία 1,2 και 3. Ανάλογα με πριν υπολογίζουμε

$$Res(\mathrm{g},1)=\frac{1}{2},\quad Res(\mathrm{g},2)=-4\quad \text{και}\quad Res(\mathrm{g},3)=\frac{9}{2}.$$

Έστω $\gamma(t)=R\cdot e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, όπου $R>4$˙ προφανώς τότε $[\gamma]\subseteq\Delta(0,4,+\infty)$ και $\delta_\gamma(1)=\delta_\gamma(2)=\delta_\gamma(3)=1$.

Έπεται ότι $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{g}(z)\,dz = 2\pi i\cdot\delta_\gamma(1)[Res(\mathrm{g},1)+Res(\mathrm{g},2)+Res(\mathrm{g},3)]$

$$=2\pi i\cdot 1\cdot\left[\frac{1}{2}-4+\frac{9}{2}\right]=2\pi i\cdot 1\cdot 1=2\pi i\neq 0.$$

Άρα η g δε μπορεί να έχει παράγουσα στον τόπο $\Delta(0,4,+\infty)$.

4) Έστω p, q πολυώνυμα ώστε βαθμός $q \geq$ βαθμό p +2. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε:

α) $\int\limits_{C(0,R)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$, για κάθε $R \geq r$ και

β) το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της $f = \frac{p}{q}$ σε όλες τις ανωμαλίες της ισούται με μηδέν.

Λύση. Υποθέτουμε, όπως μπορούμε, ότι το κλάσμα $f = \frac{p}{q}$ είναι ανάγωγο. Τότε οι μεμονωμένες ανωμαλίες της ρητής συνάρτησης f είναι πόλοι, οι οποίοι ταυτίζονται με το σύνολο S των ριζών του q. Επομένως, αν $r > 0$ ώστε $S \subseteq \Delta(0, r)$, τότε για κάθε $R \geq r$ έχουμε από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων ότι

$$\int\limits_{C(0,R)} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum \{R\,\mathrm{es}(f, a) : a \in S\} \qquad (1).$$

Έστω $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, $\quad q(z) = b_m z^m + ... + b_1 z + b_0$, όπου $a_n \neq 0 \neq b_m$, $\quad \mathrm{m} \geq \mathrm{n} + 2$ και $n \geq 0$. Θέτουμε

$$h(z) = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + ... + \frac{b_0}{z^m}}, \qquad z \neq 0.$$

Τότε για $|z| \geq 1$ έχουμε

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{m-n}} |h(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} |h(z)| \qquad (2).$$

Για τη συνάρτηση h έχουμε προφανώς ότι $\lim\limits_{z \to \infty} h(z) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$.

Έτσι από τη (2) έπεται ότι υπάρχει $R_0 > 0$ ώστε για κάποια σταθερά $C > 0$ (π.χ. $C = \frac{|a_n|}{|b_m|} + 1$) να ισχύει

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}, \qquad |\mathrm{z}| \geq R_0.$$

Άρα για $|\mathrm{z}| = R$ αρκετά μεγάλο ($|\mathrm{z}| \geq R_0$) ισχύει

$$\left| \int\limits_{C(0,R)} f(z)\, dz \right| \leq 2\pi R \cdot \max_{|z|=R} |f(z)| \leq 2\pi R \cdot \frac{C}{R^2} = \frac{2\pi C}{R} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (3).$$

Από τις (3) και (1) συμπεραίνουμε ότι $\sum \{R\mathrm{es}(f,a): a \in S\} = 0$ και κατά συνέπεια έχουμε την απόδειξη και των δύο ισχυρισμών.

Σημείωση. Η συνάρτηση g του Παραδείγματος (3) μας υποδεικνύει ότι το ανωτέρω αποτέλεσμα δεν ισχύει, αν βαθμός $q \geq$ βαθμό p +1.

5) Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$. Αποδείξτε ότι οι ρίζες του $a_1, \ldots, a_n$ είναι απλές και ότι το άθροισμα

$$\frac{1}{a_1{}^m} + \frac{1}{a_2{}^m} + \ldots + \frac{1}{a_n{}^m} = 0, \text{ για } \quad m = 2, 3, \ldots, n.$$

Λύση. Για $n = 1$, το p προφανώς έχει ακριβώς μία ρίζα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n \geq 2$. Αν οι ρίζες του p δεν είναι απλές, τότε κάποια από αυτές, έστω z_0, θα ικανοποιούσε την ισότητα $p(z_0) = p'(z_0) = 0$. Όμως $p'(z) = 1 + z + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, άρα

$$0 = p(z_0) = p'(z_0) = \frac{z_0{}^n}{n!} \quad \text{και έτσι} \quad z_0 = 0.$$

Όμως το 0 προφανώς δεν είναι ρίζα του p. Έπεται ότι οι ρίζες του p είναι διαφορετικές (απλές) και μη μηδενικές.

Έστω $r > 0$ ώστε $S = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \Delta(0, r)$ και k ακέραιος ώστε $0 \leq k \leq n-2$. Τότε από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι $\int_{C(0,R)} \frac{z^k}{p(z)} dz = 0$, για $R \geq r$

και άρα
$$\sum_{i=1}^{n} R\mathrm{es}\left(\frac{z^k}{p(z)}, a_i\right) = 0 \qquad (1).$$

Από την Πρόταση 6.8 έχουμε ότι $\quad R\mathrm{es}\left(\frac{z^k}{p(z)}, a_i\right) = \frac{a_i{}^k}{p'(a_i)}$.

Όμως $\quad p'(a_i) = p(a_i) - \frac{a_i{}^n}{n!} = -\frac{a_i{}^n}{n!} \quad$ (το a_i είναι ρίζα του p). Κατά συνέπεια

$$R\mathrm{es}\left(\frac{z^k}{p(z)}, a_i\right) = -n!\, a_i{}^{k-n}.$$

Έπεται τότε από την (1) ότι $\sum_{i=1}^{n} a_i{}^{k-n} = 0$, για $k = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}-2$. Ισοδύναμα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i{}^{n-k}} = 0, \text{ για } \; k = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}-2,$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

6) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}$ όπου $\gamma(t)=\frac{1}{4}\cdot e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $z=\frac{1}{w}$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma'} \frac{-dw}{w^2\,\text{sinw}}=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma''} \frac{dw}{w^2\,\text{sinw}},$$

όπου $\gamma'(t)=4\cdot e^{-it}$ και $\gamma''(t)=4\cdot e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$. (Πρβλ. την άσκηση 18 του Κεφ. 6).

Από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε για τη συνάρτηση $f(w)=\frac{1}{w^2\,\text{sinw}}$

ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma''} f(w)\,dw=Res(f,\pi)+Res(f,-\pi)+Res(f,0).$$

Τα σημεία $\pm\pi$ είναι ρίζες τάξης 1 για την $\sin w$ και συνεπώς πόλοι τάξης 1 για την f και έτσι έχουμε

$$Res(f,\pm\pi)=\lim_{w\to\pm\pi}\frac{w\mp\pi}{w^2\sin w}=(L'Hospital)=\lim_{w\to\pm\pi}\frac{(w\mp\pi)'}{(w^2\sin w)'}=$$

$$=\lim_{w\to\pm\pi}\frac{1}{2w\sin w+w^2\cos w}=-\frac{1}{\pi^2}.$$

Από το Παράδειγμα 6.9 (3) έχουμε ότι το 0 είναι πόλος τάξης 3 της f και $Res(f,0)=\frac{1}{6}$. Μια διαφορετική απόδειξη (η οποία χρησιμοποιεί τη γεωμετρική σειρά) έχει ως ακολούθως

$$f(w)=\frac{1}{w^2\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\ldots\right)}=\frac{1}{w^3}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{w^2}{3!}-\frac{w^4}{5!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{1}{w^3}\cdot\left[1+\left(\frac{w^2}{3!}-\frac{w^4}{5!}+\ldots\right)+\left(\frac{w^2}{3!}-\frac{w^4}{5!}+\ldots\right)^2+\ldots\right]=\frac{1}{w^3}+\frac{1}{3!\text{w}}-\frac{w}{5!}+\ldots\ .$$

Έπεται ότι $Res(f,0)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$.

Από τους ανωτέρω υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_\gamma \frac{dz}{\sin\frac{1}{z}}=\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi^2}.$$

Σημείωση. Για τον υπολογισμό του $Res(f,\pm\pi)$, αντί του κανόνα L' Hospital μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f στις θέσεις $\pm\pi$.

6.4 Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής

Το Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων μας δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού πολλών ολοκληρωμάτων (Riemann) συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής. Εξ' όσων γνωρίζουμε τα ολοκληρώματα αυτά (τουλάχιστον τα παραδείγματα που θα παραθέσουμε) υπολογίζονται (συνήθως δυσκολότερα) και με μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού. Η πρώτη μέθοδος που θα παρουσιάσουμε αφορά ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\cos t$ και $\sin t$.

Μια ρητή συνάρτηση δύο μιγαδικών μεταβλητών είναι μια συνάρτηση της μορφής $R(z,w)=\dfrac{P(z,w)}{Q(z,w)}$, όπου P και Q είναι μιγαδικά πολυώνυμα δύο μεταβλητών με $Q(z,w)\not\equiv 0$.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $\dfrac{3iz+w}{z^3}$, $\dfrac{zw+2i}{iz+2w^2}$, $\dfrac{z^2-w}{z^3-z+w}$ είναι ρητές συναρτήσεις δύο μιγαδικών μεταβλητών.

Πρόταση 6.14 Έστω $R(z,w)$ ρητή συνάρτηση ώστε η $F(\cos t,\sin t)$ ορίζεται για κάθε $t\in[0,2\pi]$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k) \qquad (1)$$

όπου $f(z)=\dfrac{1}{iz}R\left(\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2},\dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$ και $z_1,\ldots,z_n$ είναι οι πόλοι της f εντός του μοναδιαίου δίσκου $\Delta(0,1)$.

(Προφανώς η υπόθεσή μας για την $R(\cos t,\sin t)$ συνεπάγεται ότι η f δεν έχει πόλους επί του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$.)

Απόδειξη. Έστω $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. Από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έπεται ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)\cdot\delta_\gamma(z_k) = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k) \qquad (2)$$

(Οι πόλοι z της f με $|z|>1$ δεν λαμβάνονται υπ' όψη αφού $\delta_\gamma(z)=0$.)

Παρατηρούμε ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i\cdot e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{i\,e^{it}} R\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) i\cdot e^{it} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt \qquad (3)$$

εφ' όσον, $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ και $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

Από τις (2) και (3) έπεται ο τύπος (1).

Σημείωση Έχοντας το $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$, για να βρούμε την f ή το $\int_\gamma f(z)\,dz$ θέτουμε

$$z = e^{it}, \quad \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

και $dz = ie^{it}dt = iz\,dt$ και άρα $dt = \dfrac{dz}{iz}$.

Παραδείγματα 1) Έστω $0<b<a$. Να υπολογισθεί το $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$.

Λύση. Η συνάρτηση f της Πρότασης 6.14 είναι

$$f(z) = \frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{a+\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i}\cdot\frac{1}{bz^2+2az+b}.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $bz^2+2az+b$ είναι $\Delta = 4(a^2-b^2) > 0$ και οι απλές ρίζες του

$$\rho_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Παρατηρούμε ότι $|\rho_1|<1$, $|\rho_2|>1$ και ακόμη ότι ρ_1 και ρ_2 είναι απλοί πόλοι της f. Επίσης έχουμε ότι

$$bz^2+2az+b = b(z-\rho_1)(z-\rho_2).$$

Από τους πόλους αυτούς μας ενδιαφέρει μόνο ο ρ_1 ($|\rho_1|<1$). Έτσι υπολογίζουμε

$$Res(f,\rho_1)=\lim_{z\to\rho_1}(z-\rho_1)f(z)=\lim_{z\to\rho_1}(z-\rho_1)\cdot\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{b(z-\rho_1)(z-\rho_2)}=\frac{2}{ib}\cdot\lim_{z\to\rho_1}\frac{1}{z-\rho_2}=$$

$$=\frac{2}{ib}\cdot\frac{1}{\rho_1-\rho_2}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Έπεται ότι

$$I=2\pi i\cdot Res(f,\rho_1)=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

2) Να υπολογισθεί το $I=\int_0^{2\pi}(\cos^3 t+\sin^2 t)\,dt$.

Λύση. Η συνάρτηση f της Πρότασης 6.14 είναι

$$f(z)=\frac{1}{iz}\left[\frac{1}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\right]=\frac{1}{8i}z^2-\frac{1}{4i}z+\frac{3}{i}+\frac{1}{2iz}+\frac{3}{iz^2}-\frac{1}{4iz^3}+\frac{1}{iz^4}.$$

Η f έχει ακριβώς έναν πόλο τάξης 4 (τον $\rho=0$) εντός του δίσκου $\Delta(0,1)$. Προφανώς $Res(f,0)=\frac{1}{2i}$. Επομένως $I=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi$.

<u>Σημείωση.</u> Σχετικά με τον υπολογισμό του $\int_0^{2\pi}R(\cos t,\sin t)\,dt$ σημειώνουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int R(\cos t,\sin t)\,dt$ μπορεί να υπολογισθεί με τη λεγόμενη <u>αντικατάσταση Weierstrass.</u>

Θέτουμε $u=\tan\frac{t}{2},\quad t\in(-\pi,\pi)$, άρα $t=2\arctan u,\quad dt=\frac{2}{1+u^2}du$.

Με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$\sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},\quad \cos t=\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2},\quad \sin t=\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ και

$\sin t=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}$ έπεται ότι

$$\sin t=\frac{2u}{1+u^2}\qquad\text{και}\qquad \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Έτσι αναγόμαστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης, δηλ. του

$$\int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2},\frac{2u}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2}{1+u^2}du.$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης $f=\dfrac{p}{q}$, (κατ' αρχήν) υπολογίζεται αναλύοντας την f σε απλά κλάσματα.

Οι άλλες δύο μέθοδοι με τις οποίες θα ασχοληθούμε, έχουν να κάνουν με τον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων (Γ.Ο.) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Υπενθυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)dx$ της f στο $[a,b]$ υπάρχει για κάθε $a,b\in\mathbb{R},\quad a<b$. Το Γ.Ο. της f στο $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

ορίζεται να είναι ίσο με το διπλό όριο

$$\lim_{\substack{x_2\to+\infty\\ x_1\to-\infty}} \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \tag{2}$$

με την προϋπόθεση ότι αυτό το όριο υπάρχει.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με το ότι για κάποιο $a\in\mathbb{R}$, και τα δύο όρια $\lim_{x_2\to+\infty}\int_a^{x_2} f(x)dx$, $\lim_{x_1\to-\infty}\int_{x_1}^{a} f(x)dx$ υπάρχουν. Τα όρια αυτά συμβολίζονται με $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ αντίστοιχα και τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx+\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \tag{3}$$.

Οι τεχνικές που θα συζητήσουμε επιτρέπουν τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \tag{4}$$

η οποία είναι γνωστή ως η <u>κύρια τιμή Cauchy</u> του ολοκληρώματος και συμβολίζεται με

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx .$$

Αν το όριο (2) υπάρχει, τότε υπάρχει και το (4) και είναι μεταξύ τους ίσα. Αλλά η κύρια τιμή Cauchy ενδέχεται να υπάρχει, ενώ το όριο (2) να μην υπάρχει.

Για παράδειγμα

$$\int_{-R}^{R} xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R}=0,\qquad R>0$$

επομένως

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0\,.$$

Αλλά είναι σαφές ότι το όριο (2) δεν υπάρχει.

Παρ' όλα αυτά στις τεχνικές που πρόκειται να αναπτύξουμε, το Γ.Ο. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ υπάρχει υπό την ισχυρή έννοια της συνθήκης (2).

<u>Πρόταση 6.15</u> α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το άνω ημιεπίπεδο $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο $z_1,\ldots,z_n$ τα οποία είναι πόλοι της f, κανείς από τους οποίους δεν ανήκει στον πραγματικό άξονα. Περαιτέρω υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές M και $p > 1$ και ένας αριθμός $R > 0$ ώστε $|f(z)| \leq M \cdot \dfrac{1}{|z|^p}$, όταν $z \in H$ και $|z| \geq R$ (5).

Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} R\operatorname{e}s(f, z_k)\,.$$

β) Αν οι συνθήκες του (α) ισχύουν με την αντικατάσταση του H από το κάτω ημιεπίπεδο $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ και $z_1,\ldots,z_n$ είναι οι πόλοι της f στο $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} R\operatorname{e}s(f, z_k)\,.$$

γ) Και οι δύο τύποι ισχύουν εάν $f = \dfrac{P}{Q}$, όπου P και Q είναι πολυώνυμα, ώστε βαθμός $Q \geq$ βαθμό $P + 2$ και το Q δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. α) Θέτουμε $\Gamma_R(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, για $R > 0$. Κατόπιν επιλέγουμε R αρκετά μεγάλο ώστε η συνθήκη (5) να ικανοποιείται και ακόμη όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο H να περιέχονται στο εσωτερικό της απλής καμπύλης (ημικυκλίου) $S_R = [-R, R] + \Gamma_R$ (σχήμα 6.15 (α)). Από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\int_{S_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum$$

όπου με $\sum$ συμβολίζουμε το άθροισμα $2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} R\operatorname{e}s(f, z_k)$.

Αν αφήσουμε το $R \to +\infty$ θα έχουμε

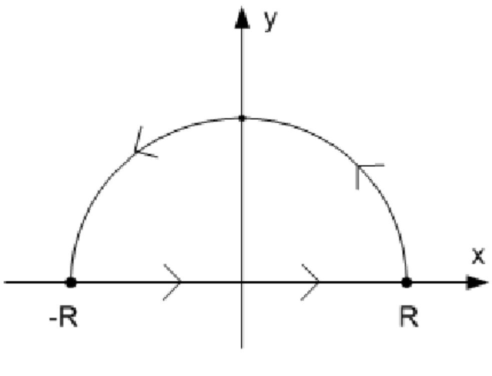
$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{M}{R^p}\cdot \pi R = \pi M\cdot \frac{1}{R^{p-1}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Επομένως $$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum \quad ,$$

δηλαδή $$P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum \quad .$$

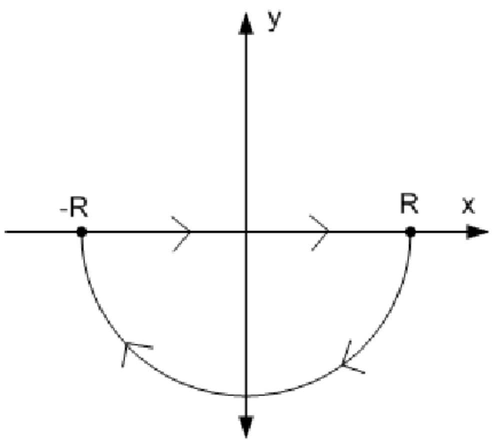
Όμως η (5) μας λέει ότι $|f(x)|\le \dfrac{M}{R^p}$ με $p>1$, για $x\in\mathbb{R}$ με $|x|$ μεγάλο. Έτσι από τον Απειροστικό Λογισμό συμπεραίνουμε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ συγκλίνει και άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει υπό τη συνθήκη (2). Έπεται ότι το Γ.Ο. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ισούται με την κύρια τιμή Cauchy και άρα με το $2\pi i\cdot\sum$.

β) Ο ισχυρισμός (β) προκύπτει όπως ο (α), χρησιμοποιώντας την καμπύλη του σχήματος 6.15 (β). Το αρνητικό πρόσημο προέρχεται από το γεγονός ότι η καμπύλη τώρα διανύεται κατά την αρνητική φορά $S_R = [-R,R]-\Gamma_R$.



Σχ. 6.15 (α)

Σχ. 6.15 (β)



γ) Από το Παράδειγμα 6.13 (4) έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ και $R_0>0$ ώστε

$$|f(\text{z})|\le \frac{C}{|z|^2}\,,\ \text{για}\quad |z|\ge R_0\,.$$

Άρα η $f=\dfrac{P}{Q}$ ικανοποιεί τον (α) για $p=2$.

<u>**Παραδείγματα**</u> 1) Να υπολογισθεί το $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$,

όπου $a>0, b>0$ και $a\neq b$.

Λύση. Προφανώς η συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.15 ικανοποιείται από τη ρητή συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$. Οι μόνοι πόλοι της f στο άνω ημιεπίπεδο είναι οι ia και ib, οι οποίοι είναι απλοί πόλοι. Έτσι έχουμε

$$R\text{es}(f,ia)=\lim_{z\to ia}\frac{z-ia}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\frac{1}{2ia(b^2-a^2)}$$

και ανάλογα στο ib: $R\text{es}(f,ib)=\dfrac{1}{2ib(a^2-b^2)}$.

Επομένως $$I=2\pi i\left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)}+\frac{1}{2ib(a^2-b^2)}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

2) Η συνάρτηση f της Πρότασης 6.15 περιορισμένη στον πραγματικό άξονα δεν απαιτείται να παίρνει πραγματικές τιμές, όπως μας δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)},\qquad a>0, b>0 \quad \text{και} \quad a\neq b.$$

Αν $z=x+iy$ με $y\geq 0$, τότε $|e^{iz}|=|e^{-y+ix}|=e^{-y}\leq 1$. Επομένως η συνθήκη (α) της Πρότασης 6.15 ισχύει για την f (η οποία βεβαίως δεν είναι ρητή συνάρτηση). Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η f έχει απλούς πόλους στα ia και ib και εύκολα υπολογίζουμε

$$R\text{es}(f,ia)=\frac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)} \quad \text{και} \quad R\text{es}(f,ib)=\frac{e^{-b}}{2ib(a^2-b^2)}.$$

Επομένως $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\pi\left(\frac{e^{-a}}{a(b^2-a^2)}+\frac{e^{-b}}{b(a^2-b^2)}\right)=\frac{\pi}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right)$$

και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{\pi}{b^2-a^2}\cdot\left(\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-b}}{b}\right) \quad \text{και} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=0 .$$

Από τα ολοκληρώματα αυτά το δεύτερο είναι προφανές (γιατί;), αλλά το πρώτο δεν είναι.

3) Να αποδειχθεί ότι $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Λύση. Οι ρητές συναρτήσεις

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4} \qquad \text{και} \qquad g(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$$

ικανοποιούν προφανώς τη συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.15.

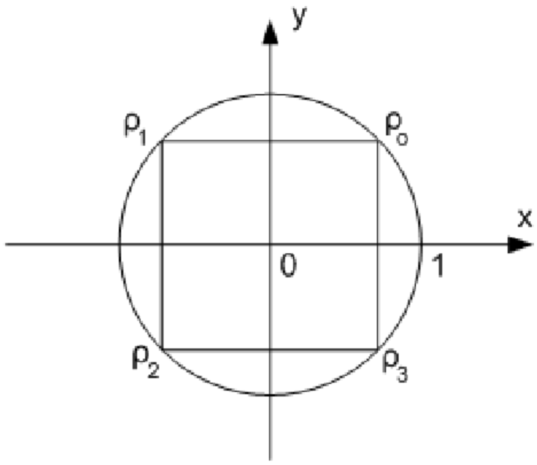
Οι τέταρτες ρίζες του -1 είναι οι αριθμοί

$$\rho_0=e^{i\frac{\pi}{4}},\quad \rho_1=e^{i\frac{3\pi}{4}},\quad \rho_2=e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \rho_3=e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Είναι σαφές ότι οι μόνοι (απλοί) πόλοι τόσο της f όσο και της g στο άνω ημιεπίπεδο είναι οι ρ_0 και ρ_1. Έτσι για την f έχουμε

$$Res(f,\rho_0)=\lim_{z\to\rho_0}(z-\rho_0)\cdot f(z)=\lim_{z\to\rho_0}\frac{z-\rho_0}{1+z^4} \text{=(L' Hospital)}$$

$$=\lim_{z\to\rho_0}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4\rho_0^{\,3}}=-\frac{1}{4}\rho_0.$$



Ανάλογα υπολογίζουμε το $Res(f,\rho_1)=-\frac{1}{4}\rho_1$.

Επειδή $\operatorname{Im}\rho_0=\operatorname{Im}\rho_1=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\operatorname{Re}\rho_0=-\operatorname{Re}\rho_1$ έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=2\pi i\left[-\frac{1}{4}(\rho_0+\rho_1)\right]=-\frac{\pi i}{2}\cdot 2i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Για τη g έχουμε

$$Res(\mathrm{g},\rho_0)=\lim_{z\to\rho_0}(z-\rho_0)\cdot g(z)=\lim_{z\to\rho_0}\frac{(z-\rho_0)\cdot z^2}{1+z^4} \text{=(L' Hospital)}$$

$$=\lim_{z\to\rho_0}\frac{3z^2-2\rho_0 z}{4z^3}=\frac{1}{4\rho_0}=\frac{1}{4}\overline{\rho_0}=\frac{1}{4}\rho_3.$$

Ανάλογα υπολογίζουμε $Res(\mathrm{g},\rho_1)=\frac{1}{4\rho_1}=\frac{1}{4}\overline{\rho_1}=\frac{1}{4}\rho_2$.

Επειδή $\operatorname{Im}\rho_2=\operatorname{Im}\rho_3=-\sin\frac{\pi}{4}$ και $\operatorname{Re}\rho_2=-\operatorname{Re}\rho_3$ έπεται ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=2\pi i\left[\frac{1}{4}(\rho_3+\rho_2)\right]=\frac{\pi i}{2}\cdot 2i\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

<u>Σημείωση.</u> Το Γ.Ο. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ μπορεί να υπολογισθεί αφού πρώτα υπολογίσουμε, με τη μέθοδο των απλών κλασμάτων, μια παράγουσα της συνάρτησης $\frac{1}{1+x^4}$. Περιγράφουμε σύντομα τον υπολογισμό αυτό για να συγκρίνουμε τις δύο προσεγγίσεις και να εκτιμήσουμε την ισχύ των μεθόδων της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Χρησιμοποιώντας τα ζεύγη συζυγών ριζών ρ_0, ρ_3 και ρ_1, ρ_2 της $z^4+1=0$ έχουμε

$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, από όπου έπεται ότι

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{4}\left[\frac{2+\sqrt{2}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{2-\sqrt{2}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right] \qquad (1).$$

Για να υπολογίσουμε μια παράγουσα της $\frac{2+\sqrt{2}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ κάνουμε την αντικατάσταση,

$u=x+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=u-\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $dx=du$ και $x^2+\sqrt{2}x+1=\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=u^2+\frac{1}{2}$.

Άρα $$\int \frac{2+\sqrt{2}x}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx=\int \frac{1+\sqrt{2}u}{u^2+\frac{1}{2}}du=2\sqrt{2}\int \frac{u}{2u^2+1}du+2\int \frac{du}{2u^2+1}=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\log(2u^2+1)\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}u)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\log(2u^2+1)+\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}u)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1\right]+\sqrt{2}\arctan\left[\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[2(x^2+\sqrt{2}x+1)\right]+\sqrt{2}\arctan\left[\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \qquad (2)$$

Με την αντικατάσταση

$u=x-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=u+\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα $dx=du$ και $x^2-\sqrt{2}x+1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=u^2+\frac{1}{2}$,

υπολογίζουμε ανάλογα όπως πριν

$$\int \frac{2-\sqrt{2}x}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx=\sqrt{2}\arctan\left[\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]-\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[2(x^2-\sqrt{2}x+1)\right] \qquad (3).$$

Από τις (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \sqrt{2}\left(\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right] \quad (4)$$

Αν συμβολίσουμε με $\varphi(x)$ το δεξί μέλος της (4) έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)-\varphi(0)) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{και συνεπώς} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε την Πρόταση 6.15, αντικαθιστώντας τη σταθερά $p>1$ του ισχυρισμού (α) αυτής της πρότασης με $p=1$. Η προκύπτουσα μέθοδος επιτρέπει, στην περίπτωση που f περιορισμένη στον πραγματικό άξονα παίρνει πραγματικές τιμές, τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\cos(\lambda x)dx$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot\sin(\lambda x)dx$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

<u>**Πρόταση 6.16**</u> (α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το άνω ημιεπίπεδο $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\geq 0\}$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο $z_1,\ldots,z_n$ τα οποία είναι πόλοι της f, οι οποίοι δεν ανήκουν στον πραγματικό άξονα. Αν υπάρχει σταθερά $M>0$ και ένας αριθμός $R>0$ ώστε

$$|f(z)|\leq\frac{M}{|z|}, \text{ όταν } z\in H \text{ και } |z|\geq R \quad (6)$$

τότε για κάθε $\lambda>0$ ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)\cdot e^{i\lambda z}, z_k).$$

(β) Αν οι συνθήκες του (α) ισχύουν με την αντικατάσταση του H με το κάτω ημιεπίπεδο $L=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\leq 0\}$ και $z_1,\ldots,z_n$ είναι οι πόλοι της f στο $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z<0\}$, τότε για κάθε $\lambda<0$ ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{i\lambda x}\,dx = -2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)\cdot e^{i\lambda z}, z_k).$$

(γ) Και οι δύο τύποι ισχύουν αν $f=\dfrac{P}{Q}$, όπου P και Q είναι πολυώνυμα ώστε

βαθμός $Q\geq$ βαθμό $P+1$ και το Q δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι οι συναρτήσεις $f(z)$ και $f(z)\cdot e^{i\lambda z}$ έχουν τους ίδιους πόλους, δηλ. τα σημεία $z_1,\ldots,z_n$ (γιατί;). Επίσης σημειώνουμε ότι είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε την ίδια καμπύλη όπως στην Πρόταση 6.15 και να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z}dz = 0 .$$

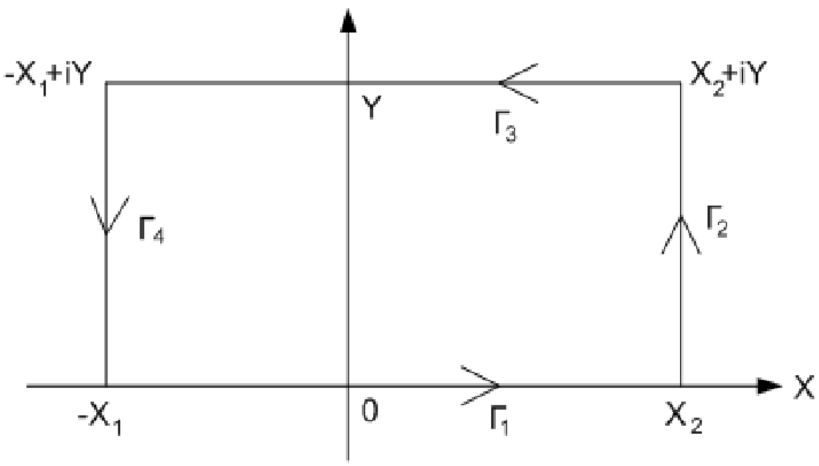
(Πρβλ. [M-X], 7.9.1, σελ. 514-5).

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε μόνο την κύρια τιμή Cauchy του ολοκληρώματος, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i\cdot\sum$$

όπου $\sum = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_k)$. Αυτό συμβαίνει διότι η (6) μας λέει ότι η f συμπεριφέρεται όπως η $\frac{1}{x}$, για $x\in\mathbb{R}$ και $|x|$ μεγάλο και η συνθήκη αυτή από μόνη της δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda x}\, dx$ υπό τη συνθήκη (2).

Έτσι, για υπερβούμε αυτό το εμπόδιο και να αποδείξουμε την ισχυρότερη σύγκλιση του ολοκληρώματος, θα χρησιμοποιήσουμε το ορθογώνιο του κατωτέρω σχήματος.



Θα αποδείξουμε ότι καθώς $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2, \mathrm{Y}\to\infty$, το κάθε ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{\Gamma_j} f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z}dz$, για $j=1,2,3,4$ τείνει στο μηδέν. Τότε, επειδή για αρκετά μεγάλα $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2$ και Y το ορθογώνιο με κορυφές $-\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_2+i\mathrm{Y}$ και $-\mathrm{X}_1+i\mathrm{Y}$ θα περιέχει τους πόλους της f, θα έχουμε από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων ότι

$$\lim_{\substack{\mathrm{X}_1\to\infty\\ \mathrm{X}_2\to\infty}}\int_{-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{X}_2} f(x)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i\sum$$

το οποίο είναι η συνθήκη (2) που απαιτούμε.

Για $j=2$ έχουμε, $\Gamma_2(t)=\mathrm{X}_2+it,\quad t\in[0,\mathrm{Y}]$ και άρα

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z} dz \right| = \left| \int_0^{\mathrm{Y}} f(\mathrm{X}_2 + it)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda(\mathrm{X}_2+it)}\, idt \right|$$

$$\leq \int_0^{\mathrm{Y}} \frac{M}{\mathrm{X}_2}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt = \frac{M}{\mathrm{X}_2}\cdot \int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{-\lambda t} dt \leq \frac{M}{\lambda \mathrm{X}_2} \qquad \text{για μεγάλο } \mathrm{X}_2 .$$

Ανάλογα για $j=4$, έχουμε $\Gamma_4 = (-\gamma_4)$, όπου $\gamma_4(t) = -\mathrm{X}_1 + it,\quad t\in[0,\mathrm{Y}]$, άρα

$$\left| \int_{\Gamma_4} f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z} dz \right| \leq \frac{M}{\lambda \mathrm{X}_1} \qquad \text{για μεγάλο } \mathrm{X}_1 .$$

Επίσης για $j=3$ έχουμε

$$\left| \int_{\Gamma_3} f(z)\cdot \mathrm{e}^{i\lambda z} dz \right| = \left| -\int_{-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{X}_2} f(\mathrm{t}+i\mathrm{Y})\cdot \mathrm{e}^{i\lambda(\mathrm{t}+i\mathrm{Y})}\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{X}_2} \frac{M}{\mathrm{Y}}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{Y}}\, dt \right| = \frac{M}{\mathrm{Y}}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{Y}} (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) .$$

Παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε τα X_1, X_2 και αφήσουμε το $\mathrm{Y}\to\infty$, το τελευταίο ολοκλήρωμα τείνει στο 0. Αν αφήσουμε μετά τα X_1, $\mathrm{X}_2 \to \infty$, τότε και τα δύο πρώτα ολοκληρώματα τείνουν στο 0. Έτσι έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του ισχυρισμού (α).

(β) Η απόδειξη σε αυτή την περίπτωση ($\lambda<0$) είναι ανάλογη με την προηγούμενη, με τη διαφορά ότι η καμπύλη είναι τώρα ένα ορθογώνιο στο κάτω ημιεπίπεδο.

(γ) Όπως στο Παράδειγμα 6.13 (4) μπορούμε να αποδείξουμε για τη συνάρτηση $f = \dfrac{P}{Q}$, ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ και $R_0>0$ ώστε

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|z|}, \quad \text{για } |z| \geq R_0 .$$

Η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης.

<u>Παραδείγματα 6.16.1</u> 1) Να υπολογισθεί το $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 e^{ix}\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, ($a,b>0$ και $a\neq b$).

Λύση. Έστω $f(z) = \dfrac{z^3}{(\mathrm{z}^2+a^2)(\mathrm{z}^2+b^2)}$. Τότε η ρητή συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.16, αλλά όχι τη (γ) της 6.15. Η f έχει απλούς πόλους στο άνω ημιεπίπεδο τα σημεία ia και ib. Υπολογίζοντας τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)\cdot \mathrm{e}^{iz}$ σε αυτά τα σημεία με τον συνήθη τρόπο, εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.16 και εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}(b^2 e^{-b} - a^2 e^{-a}) \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 0 .$$

Το ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα οφείλει να ισούται με μηδέν είναι προφανές (γιατί;).

2) Αποδείξτε ότι: (α) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{e^a}$, όπου $a>0$ και

(β) χρησιμοποιώντας αυτόν τον υπολογισμό, δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi .$$

Λύση. Η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z}{z^2+a^2}$, ικανοποιεί τη συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.16 και έχει έναν απλό πόλο στο άνω ημιεπίπεδο, το σημείο ia. Έτσι έχουμε

$$Res(f(z)\cdot \mathrm{e}^{iz}, ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)\cdot f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{ze^{iz}}{z+ia} = \frac{ia\cdot e^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2}.$$

Άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cdot e^{ix}}{x^2+a^2} dx = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2} = \pi i e^{-a}$, από όπου έπεται

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx = \pi \cdot e^{-a} = \frac{\pi}{e^a} \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+a^2} dx = 0 \qquad (1)$$

(Ανάλογα αποδεικνύεται ότι, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+\beta^2} dx = \frac{\pi}{\beta}\cdot e^{-a\beta}$, όπου $a, \beta > 0$. Τα ολοκληρώματα αυτά, όπως και αυτά στην (1), ονομάζονται ολοκληρώματα Laplace.)

Αν αφήσουμε το $a \to 0$ στον πρώτο από τους τύπους της (1) και λάβουμε υπ'όψη ότι $|\sin x| \le |x|, \mathrm{x} \in \mathbb{R}$ και ότι $\displaystyle\int \frac{a^2}{x^2+a^2} dx = a\cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \ x\in\mathbb{R}$ τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi . \qquad (2)$$

Πράγματι,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-a^2 \sin x}{x(x^2+a^2)} dx \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{x^2+a^2}dx \ = \pi a \qquad (3)$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα τείνει στο 0 καθώς $a \to 0$.

Επειδή η συνάρτηση $\dfrac{\sin x}{x}$ είναι άρτια, έπεται ότι

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

(Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι η $\dfrac{\sin x}{x}$ δεν έχει στοιχειώδη παράγουσα.)

Παρατηρούμε ότι: α) Η (3) διασφαλίζει συγχρόνως τη σύγκλιση αλλά και τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ (γιατί;).

Για μια διαφορετική απόδειξη (μόνο) της σύγκλισης αυτού του ολοκληρώματος παραπέμπουμε στις ασκήσεις.

β) Η f προφανώς δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.15. Μάλιστα το Γ.Ο.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}dx$ δε συγκλίνει (υπό την ισχυρή έννοια της συνθήκης (2)) εφ' όσον

$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+a^2}dx \ = \frac{1}{2}\log(x^2+a^2)$ και συνεπώς $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}dx \ = +\infty$. (Βέβαια, για την κύρια τιμή Cauchy έχουμε $\displaystyle P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}dx \ = 0$.)

γ) Όταν θεωρούμε το Γ.Ο. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, εννοούμε ότι ολοκληρώνουμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \ x \neq 0$ και $f(0) = 1$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \right)$.

3) Αποδείξτε ότι $\displaystyle I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+2x+2}dx = \frac{\pi}{e^2}\cos 2$ και

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2}dx = -\frac{\pi}{e^2}\sin 2.$$

Λύση. Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη (γ) της Πρότασης 6.16 (αλλά και τη (γ) της 6.15) και έχει έναν απλό πόλο στο σημείο $z_1 = -1+i$ ο οποίος ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο. (Η εξίσωση $z^2+2z+2=0$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς $z_1 = -1+i$ και $z_2 = -1-i$.) Έτσι έχουμε

$$Res(f(z)\cdot e^{2iz}, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{e^{2iz}}{z-z_2} = \frac{e^{2iz_1}}{z_1-z_2} = \frac{e^{2i(-1+i)}}{2i}.$$

Έπεται ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{2ix}dx = 2\pi i\frac{\cos 2 - i\sin 2}{2ie^2} = \frac{\pi\cos 2 - i\pi\sin 2}{e^2}$, από όπου συμπεραίνουμε τις τιμές των I_1 και I_2.

<u>Παρατηρήσεις 6.17</u> 1) Έστω $f(z) = e^{i\lambda z}\cdot\frac{P(z)}{Q(z)}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και P,Q πολυώνυμα ώστε βαθμός $Q \geq$ βαθμό $P+2$ και το Q δεν έχει πραγματικές ρίζες. Τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ έπεται και από την Πρόταση 6.15. Πράγματι, έστω $\lambda \geq 0$, τότε για $z = x+iy$ στο άνω ημιεπίπεδο έχουμε $\lambda y \geq 0$ και έτσι

$|e^{i\lambda z}| = |e^{i\lambda(x+iy)}| = |e^{i\lambda x - \lambda y}| = e^{-\lambda y} \leq e^0 \leq 1$. Επομένως

$|f(z)| = |e^{i\lambda z}|\cdot\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{C}{|z|^2}$, για κάποια σταθερά $C>0$ και για μεγάλο $|z|$.

Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη (α) της Πρότασης 6.15.

Αν $\lambda < 0$, τότε για $z = x+iy$ με $y \leq 0$ έχουμε $\lambda y \leq 0$ και άρα

$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leq e^0 = 1$. Κατά συνέπεια η f συμπεριφέρεται όπως προηγουμένως για μεγάλα $|z|$.

Έπεται ότι το παράδειγμα 3 μπορεί να υπολογισθεί και με τη βοήθεια της Πρότασης 6.15. (Πρβλ. και το παράδειγμα 2 μετά την Πρόταση 6.15.)

2) Παρατηρούμε ότι η Πρόταση 6.16 ισχύει κάτω από σημαντικά ασθενέστερες συνθήκες επί της f από τις αντίστοιχες της Πρότασης 6.15. Αυτό οφείλεται στην παρουσία του παράγοντα $e^{i\lambda z}$, ο οποίος για $\lambda > 0$ εξασφαλίζει ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση συγκλίνει αρκετά γρήγορα στο 0 όταν $|z| \to +\infty$ και $\operatorname{Im} z \geq 0$.

3) Σημειώνουμε ότι υπάρχει μια ευρεία ποικιλία μεθόδων υπολογισμού ολοκληρωμάτων, βασιζόμενες στη Μιγαδική Ανάλυση, τις οποίες δεν είναι δυνατόν να εξετάσουμε σ' αυτές τις σημειώσεις. Έτσι παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη για αυτές τις μεθόδους (αλλά και μια πληθώρα αποτελεσμάτων που δεν αγγίζουμε εδώ) στη βιβλιογραφία που παραθέτουμε.

Ασκήσεις Κεφ. 6

1) Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(\mathrm{z}) = \dfrac{z}{1+z^3}$,

α) σε μια σειρά θετικών δυνάμεων του z και

β) σε μια σειρά αρνητικών δυνάμεων του z.

Σε κάθε περίπτωση βρείτε τον τόπο του $\mathbb{C}$ που το ανάπτυγμα ισχύει.

[Υπόδειξη. Για το (α) έχουμε, αν $|z|<1$ ότι $f(\mathrm{z}) = z\cdot\dfrac{1}{1-(-z^3)} = z\cdot\dfrac{1}{1-w}$, όπου $w=-z^3$ και χρησιμοποιώντας την Γ.Σ. βρίσκουμε ότι $f(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{3n+1}, \quad |z|<1$.

Για το (β) έχουμε, αν $|z|>1$ ότι $f(\mathrm{z}) = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z^3}} = \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-w}$, όπου $w=-\dfrac{1}{z^3}$. Έτσι πάλι με χρήση της Γ.Σ. βρίσκουμε $f(\mathrm{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{z^{3n+2}}, \quad |z|>1$.]

2) Βρείτε τα αναπτύγματα Laurent των ακόλουθων συναρτήσεων στους δακτυλίους που υποδεικνύονται.

α) $\dfrac{z}{z+2}, \quad |z|>2$, β) $\cos\dfrac{1}{z}, \quad z\neq 0$ και γ) $\dfrac{1}{z-3}, \quad |z|>3$.

[Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $\dfrac{z}{z+2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{z}}, \quad |z|>2$ και με χρήση της Γ.Σ. βρίσκουμε $\dfrac{z}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{z}\right)^n, \quad |z|>2$. Για το (γ) γράφουμε $\dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{z}}, \quad |z|>3$ και με χρήση της Γ.Σ. βρίσκουμε $\dfrac{1}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^{n+1}}$. Πρβλ. και το Παράδειγμα 6.2 (1).]

3) Έστω $f(\mathrm{z}) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Βρείτε τη σειρά Laurent της f,

α) στον δίσκο $|z|<1$,

β) στον δακτύλιο $1<|z|<2$ και

γ) στον δακτύλιο $2<|z|$.

[Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f(\mathrm{z}) = -\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$.

Για το (α) έχουμε ότι, αν $|z|<1$, τότε $-\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ και

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Για το (β) έχουμε ότι, αν $1<|z|<2$, τότε $-\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\dfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$ και

(όπως στο (α)) $\dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$.

Για το (γ) έχουμε, αν $|z|>2$, τότε (όπως στο (β)) $-\dfrac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$ και

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n.$$]

4) Βρείτε τα αναπτύγματα Laurent των ακόλουθων συναρτήσεων στους δακτυλίους που υποδεικνύονται.

α) $f(z) = \dfrac{10}{(z+2)(z^2+1)}, \quad 1<|z|<2$, β) $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}, \quad |z|>3$ και

γ) $f(z) = \dfrac{24}{z^2(z-1)(z+2)}, \quad 0<|z|<1$.

[Υπόδειξη. (α) $f(z) = \dfrac{2}{z+2} + \dfrac{-1+2i}{z+i} + \dfrac{-(1+2i)}{z-i}$ και $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}$,

$\dfrac{1}{z+i} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{i}{z}}$ και $\dfrac{1}{z-i} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{i}{z}}$.

(β) $f(z) = 1 + \dfrac{3}{z+2} + \dfrac{-8}{z+3}$ και $\dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{z}}$, $\dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3}{z}}$.

(γ) $f(z)=\frac{-6}{z}+\frac{-12}{z^2}+\frac{8}{z-1}+\frac{-2}{z+2}$ και $\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n$,

$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}$. Επομένως $f(z)=\frac{-6}{z}+\frac{-12}{z^2}-8\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n$,

για $0<|z|<1$.]

5) Έστω $f(\mathrm{z})=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$.

α) Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά κέντρου 0 την f και βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R αυτής της δυναμοσειράς.

β) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent στον δακτύλιο $|z-1|>3$ την f .

[Υπόδειξη. (α) $f(\mathrm{z})=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{1-(-z)}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}$ και με χρήση της Γ.Σ. σειράς βρίσκουμε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot z^n$, για $|z|<1$. Το ότι $R=1$ προκύπτει υπολογίζοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{2^{n+1}}}=1$.

(β) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^n-3^n\right)\cdot(z-1)^{-n-1}$, για $|z-1|>3$.]

6) Βρείτε τα αναπτύγματα Laurent των ακόλουθων συναρτήσεων στους δακτυλίους που υποδεικνύονται.

α) $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2-2z+2)}$, $1<|z-1|<2$,

β) $f(z)=\frac{1}{(\mathrm{z}-1)^2(z-2)(z+1)}$, $0<|z-1|<1$,

γ) $f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^3}$, $0<|z|<1$,

δ) $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z-3)}$, $1<|z|<2$,

ε) $f(z)=\frac{2z-3}{(z-1)^2(z+i)}$, $|z|>1$

[Υπόδειξη.

(α) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\left(z-1\right)^n+(-1+2i)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n\left(z-1\right)^{-n-1}-(1+2i)\sum_{n=0}^{\infty}i^n\left(z-1\right)^{-n-1}$

(β) $f(z)=-\frac{1}{2(z-1)^2}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n$

(γ) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-3}}{n!}$.]

7) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)=\frac{1}{z(z+1)}$ στους δακτυλίους $0<|z|<1$ και $1<|z|<+\infty$ και κατόπιν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{C(0,\rho)} f(z)dz, \quad 0<\rho<1.$$

[<u>Υπόδειξη.</u> Στον δακτύλιο $0<|z|<1$ έχουμε $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=$

$=\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. Άρα $\mathrm{Re}s(f,0)=1=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)} f(z)dz$, για $0<\rho<1$.

Στον δακτύλιο $1<|z|<+\infty$ έχουμε

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{z^{n+1}} \quad .]$$

8) Καθορίστε το είδος των ανωμαλιών και βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στις περιπτώσεις των ακόλουθων συναρτήσεων.

α) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$, β) $f(z)=\frac{1}{1-e^z}$ και γ) $f(z)=\frac{z}{1-\cos z}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> (α) Η f έχει πόλους (πρώτης τάξης) στα σημεία $a_k=k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$ τα οποία είναι ρίζες πρώτης τάξης της $\sin z=0$.

Έτσι υπολογίζουμε το $\mathrm{Re}s(f,a_k)=\lim_{z\to a_k}(z-a_k)f(z)=(-1)^k$.

β) Η f έχει πόλους (πρώτης τάξης) τις ρίζες πρώτης τάξης $z_k=2k\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}$ της $1-e^z=0$. Έπεται ότι $\mathrm{Re}s(f,z_k)=\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=-1$.

γ) Οι ρίζες $z_k=2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$ της εξίσωσης $1-\cos z=0$ είναι οι μεμονωμένες ανωμαλίες της f. Επειδή $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C}$ για τη ρίζα $z_0=0$ έχουμε

$f(z)=\frac{1}{z}g(z)$, όπου $g(z)=\frac{1}{1/2!-z^2/4!+z^4/6!+\cdots}$. Έπεται ότι η z_0 είναι πόλος πρώτης τάξης της f και $\mathrm{Re}s(f,0)=g(0)=2$. Για τις ρίζες z_k με $k\neq 0$ παρατηρούμε ότι $\cos z=\cos(z-z_k)$, άρα $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-z_k)^{2n}}{(2n)!},\quad z\in\mathbb{C}$. Έπεται ότι $1-\cos z=(z-z_k)^2\cdot h(z)$, όπου $h(z)=\frac{1}{2!}-\frac{(z-z_k)^2}{4!}+\frac{(z-z_k)^4}{6!}-\ldots$ και έτσι έχουμε $h(z_k)=\frac{1}{2}$ και το z_k είναι ρίζα δεύτερης τάξης της $1-\cos z=0$. Κατά συνέπεια, $f(z)=\frac{1}{(z-z_k)^2}\cdot g(z)$, όπου $g(z)=\frac{z}{h(z)}$ και επειδή $g(z_k)=4k\pi\quad(k\neq 0)$ η z_k είναι πόλος δεύτερης τάξης της f. Έτσι έχουμε $\mathrm{Re}s(f,\mathrm{z}_k)=g'(\mathrm{z}_k)$ και επειδή $\mathrm{h}'(\mathrm{z}_k)=0$ και $g'(\mathrm{z})=\frac{h(z)-zh'(z)}{(h(z))^2}$ έπεται ότι $\mathrm{Re}s(f,\mathrm{z}_k)=g'(\mathrm{z}_k)=\frac{h(z_k)}{(h(z_k))^2}$

$=\frac{1}{h(z_k)}=2$, όταν $k\neq 0$.]

9) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|e^{i\theta}-a\right|^2}d\theta$, όπου $|a|<1$.

[<u>Υπόδειξη.</u> $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(e^{i\theta}-a)\overline{(e^{i\theta}-a)}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-a)(1-\overline{a}e^{i\theta})}d\theta=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)(1-\overline{a}z)}dz$.

Εφαρμόζουμε τώρα τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για τη συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{1-\overline{a}z}$, η οποία είναι ολόμορφη στον δίσκο $\Delta\left(0,\frac{1}{\overline{a}}\right)$ και την καμπύλη $\gamma(\theta)=e^{i\theta},\quad \theta\in[0,2\pi]$ και έχουμε $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-a}dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{|z|=1}\frac{1}{(z-a)(1-\overline{a}z)}dz$, απ' όπου έπεται ότι $I=\frac{2\pi}{1-|a|^2}$.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων για την ολόμορφη συνάρτηση $g(z)=\frac{1}{(z-a)(1-\overline{a}z)}$, η οποία έχει έναν απλό πόλο στο $z=a$ και $\mathrm{Re}s(g,a)=\frac{1}{1-|a|^2}$. Ουσιαστικά πρόκειται για τη μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία περιγράφεται στην Πρόταση 6.14.]

10) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|ae^{i\theta}-b\right|^4}d\theta$, όπου $0<a<b$.

[Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\left|ae^{i\theta}-b\right|^4}=\frac{1}{(ae^{i\theta}-b)^2\cdot(ae^{-i\theta}-b)^2}=\frac{e^{2i\theta}}{(ae^{i\theta}-b)^2(a-be^{i\theta})^2}.$$

Επομένως $I=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{e^{2i\theta}}{(ae^{i\theta}-b)^2(a-be^{i\theta})^2}d\theta=\frac{1}{2\pi ib^2}\int_{|z|=1}\frac{z}{(az-b)^2\left(z-\frac{a}{b}\right)^2}dz$.

Εφαρμόζουμε τώρα τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους (n=1) για τη συνάρτηση $f(z)=\dfrac{1}{b^2}\dfrac{z}{(az-b)^2}$, η οποία είναι ολόμορφη στο δίσκο $\Delta\left(0,\dfrac{b}{a}\right)$ και την καμπύλη $\gamma(\theta)=e^{i\theta},\quad \theta\in[0,2\pi]$.

Άρα $f'\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{\left(z-\frac{a}{b}\right)^2}dz=\frac{1}{2\pi ib^2}\int_{|z|=1}\frac{z}{(az-b)^2\left(z-\frac{a}{b}\right)^2}dz=I$.

Επειδή $f'(z)=-\dfrac{1}{b^2}\cdot\dfrac{az+b}{(az-b)^3}$, έπεται ότι $I=f'\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{a^2+b^2}{(b^2-a^2)^3}$.

Επειδή η $R(\cos\theta,\sin\theta)=\dfrac{e^{2i\theta}}{(ae^{i\theta}-b)^2(a-be^{i\theta})^2}$ είναι ρητή συνάρτηση των $\cos\theta,\sin\theta$ μπορούμε να εφαρμόσουμε και την μέθοδο της Πρότασης 6.14. Έτσι βρίσκουμε τη συνάρτηση $g(z)=\dfrac{1}{iz}R\left(z+\dfrac{1}{z},\dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\right)=\dfrac{1}{i}\dfrac{z}{(az-b)^2(a-bz)^2}$. Ο μόνος πόλος της g στον δίσκο $\Delta(0,1)$ είναι ο $\rho_1=\dfrac{a}{b}$, ο άλλος πόλος είναι ο $\rho_2=\dfrac{b}{a}$ και $\rho_2>1$. Ο ρ_1 είναι πόλος τάξης 2 και $\mathrm{Re}s(g,\rho_1)=\dfrac{1}{i}f'\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{a^2+b^2}{(b^2-a^2)^3}$. Επομένως

$I=i\cdot\mathrm{Re}s(g,\rho_1)=\dfrac{a^2+b^2}{(b^2-a^2)^3}$.]

11) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z(2z+1)^2}dz$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(z)=\dfrac{e^z}{z\left(2z+1\right)^2}$ έχει πόλους στα σημεία $z=0$ τάξης 1 και $z=-\dfrac{1}{2}$ τάξης 2, οι οποίοι ευρίσκονται εντός του δίσκου $|z|<1$. Άρα $\delta_C(0)=\delta_C\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$, όπου C ο μοναδιαίος κύκλος με τη συνήθη παραμέτρηση. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έπεται ότι

$$\int_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\cdot\left[\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right)\right].$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα υπολογίζονται με τις γνωστές μεθόδους και είναι:

$\operatorname{Res}\left(f,0\right)=1$ και $\operatorname{Res}\left(f,-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Επομένως $I=2\pi i\left(1-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.]

12) Έστω $a\in\mathbb{C}$ και $0<\rho<+\infty$. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I_n(a)=\int_{C(a,\rho)}\frac{z^n}{(z-a)^n}dz,\quad n\geq 1.$$

[<u>Υπόδειξη.</u> Αν $a=0$ τότε $I_n(0)=\displaystyle\int_{C(a,\rho)} dz=0$. Έτσι υποθέτουμε ότι $a\neq 0$ και θέτουμε $f(z)=z^n$. Εν συνεχεία εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για παραγώγους για την f και τον ακέραιο $n-1$. Τότε έχουμε

$$f^{(n-1)}(a)\cdot\delta_{C(a,\rho)}(a)=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot\int_{C(a,\rho)}\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\cdot I_n(a). \qquad (1)$$

Προφανώς $\delta_{C(a,\rho)}(a)=1$ και επειδή $f^{(k)}(z)=n(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k},\quad 1\leq k\leq n$ έπεται ότι

$$f^{(n-1)}(a)=n!a. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $I_n(a)=2\pi i n a$.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων για την $g(z)=\dfrac{f(z)}{(z-a)^n}=\dfrac{z^n}{(z-a)^n}$, η οποία έχει πόλο τάξης n στο $a\neq 0$. Επειδή $\operatorname{Res}(g,a)=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=\dfrac{n!a}{(n-1)!}=na$, έπεται ότι $I_n(a)=2\pi i\cdot\operatorname{Res}(g,a)=2\pi i n a$.

Σημειώνουμε ότι είναι δυνατός ο υπολογισμός του $I_n(a)$ μόνο με χρήση του ορισμού του επικαμπυλίου ολοκληρώματος. Πράγματι, $I_n(a)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\frac{a+\rho e^{it}}{\rho e^{it}}\right)^n i\rho e^{it}dt$. Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μετά τις πράξεις

$\varphi(t)=\dfrac{i}{\rho^{n-1}}\cdot e^{it}\cdot g(t)$, όπου $g(\mathrm{t})=\left(\dfrac{a}{e^{it}}+e\right)^{n}$. Αναπτύσσουμε την $g(t)$ με χρήση του διωνύμου Newton και παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι του προκύπτοντος αθροίσματος, όταν πολλαπλασιαστούν με τον παράγοντα e^{it}, εκτός του όρου $z_n=\begin{pmatrix} n \\ n-1\end{pmatrix}\dfrac{a}{e^{it}}\cdot\rho^{n-1}$ ο οποίος μετά τον πολλαπλασιασμό είναι $e^{it}\cdot z_n=na\rho^{n-1}$, έχουν ως παράγοντα κάποιο e^{-ikt} με $1\le k\le n-1$. Έτσι κατά την ολοκλήρωση στο $[0,2\pi]$ δίνουν τιμή 0. Ο όρος $e^{it}\cdot z_n$ (πολλαπλασιασμένος και με τον παράγοντα $\dfrac{i}{\rho^{n-1}}$) δίνει κατά την ολοκλήρωση στο $[0,2\pi]$ την αναμενόμενη τιμή $I_n(a)=2\pi i n a$.]

13) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{|z|=2/3} f(z)dz$, όπου $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(2z-1)\log^2(1-z)}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Η f έχει πόλους πρώτης τάξης στα σημεία $\dfrac{1}{2}$ και 0. Στο σημείο $\dfrac{1}{2}$ εύκολα υπολογίζουμε $\mathrm{Re}s\left(f,\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\log^2 2}$.

Για το σημείο $z=0$ παρατηρούμε ότι

$$\sin\pi z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi z)^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad z\in\mathbb{C}\quad \text{και}\quad \log(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-z)^{n+1}}{n+1},\quad |z|<1.$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε $f(z)=\dfrac{1}{2z-1}\cdot\dfrac{zh(z)}{z^2\varphi^2(z)}=\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{2z-1}\cdot\dfrac{h(z)}{\varphi^2(z)}\right)$, όπου

$$h(z)=\pi-\frac{\pi^3}{3!}z^2+\frac{\pi^5}{5!}z^4-\ldots \quad \text{και} \quad \varphi(z)=-1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}-\ldots\ .$$

Έπεται ότι $\mathrm{Re}s(f,0)=\dfrac{1}{2\cdot 0-1}\cdot\dfrac{h(0)}{\varphi^2(0)}=-\pi$. Επειδή $0,\dfrac{1}{2}\in\Delta\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$, από το Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων συμπεραίνουμε ότι

$$I=2\pi i\left[\mathrm{Re}s\left(f,\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Re}s(f,0)\right]=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2\log^2 2}-\pi\right)=i\cdot\left(\frac{\pi}{2\log^2 2}-2\pi^2\right).\ ]$$

14) Έστω $\gamma(t)=e^{it},\quad t\in[0,2\pi]$ και $a>1$. Θέτουμε

$$I_1=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a-\cos t}\qquad \text{και}\qquad I_2=\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2-2az+1}.$$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα I_1, I_2 και αποδείξτε ότι $I_1=2iI_2$.

[Υπόδειξη. Η ζητούμενη ισότητα έπεται εύκολα. (Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 6.14, η οποία μας λέει ότι αν $f(z)=\dfrac{2i}{z^2-2az+1}$, τότε

$I_1=2\pi i\cdot\sum\{\mathrm{Re}s(f,z):z$ πόλος της f με $|z|<1\}$.) Οι (απλοί) πόλοι της $\dfrac{1}{2i}f$ είναι οι ρίζες $\rho_1=a+\sqrt{a^2-1},\ \rho_2=a-\sqrt{a^2-1}$ του τριωνύμου $z^2-2az+1$ για τις οποίες έχουμε $\rho_1>1$ και $|\rho_2|<1$. Επειδή $\dfrac{1}{2i}f(z)=\dfrac{1}{z^2-2az+1}=\dfrac{1}{z-\rho_2}\cdot\dfrac{1}{z-\rho_1}$, έπεται ότι

$$\mathrm{Re}s\left(\frac{1}{2i}f(z),\rho_2\right)=\frac{1}{\rho_2-\rho_1}=-\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

και συνεπώς $I_2=2\pi i\cdot\mathrm{Re}s\left(\dfrac{1}{2i}f(z),\rho_2\right)=-\dfrac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}}$. (Για τον υπολογισμό του I_2 μπορούμε ακόμη να παρατηρήσουμε ότι $\dfrac{1}{z^2-2az+1}=\dfrac{1}{\rho_1-\rho_2}\cdot\left(\dfrac{1}{z-\rho_1}-\dfrac{1}{z-\rho_2}\right)$ και κατόπιν να ολοκληρώσουμε την παράσταση επί της καμπύλης γ.)]

15) Αποδείξτε ότι $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{4\cos^2\theta+9\sin^2\theta}=\frac{\pi}{3}$.

[Υπόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.14, η f που αντιστοιχεί στη ρητή συνάρτηση $R(cos\theta,\sin\theta)=\dfrac{1}{4\cos^2\theta+9\sin^2\theta}$ είναι η $f(z)=\dfrac{4}{i}\cdot\dfrac{z}{(5-z^2)(5z^2-1)}$. Οι (απλοί) πόλοι της f εντός του δίσκου $\Delta(0,1)$ είναι $z_1=\dfrac{1}{\sqrt5},\ z_2=-\dfrac{1}{\sqrt5}$. Έτσι έχουμε,

$$I=2\pi i\cdot\left(\mathrm{Re}s(f,z_1)+\mathrm{Re}s(f,z_2)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{12i}+\frac{1}{12i}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Μια εναλλακτική προσέγγιση στον ανωτέρω υπολογισμό έχει ως ακολούθως.

Η καμπύλη $\gamma(\theta)=2\cos\theta+3i\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi]$ είναι μια έλλειψη (γιατί;). Η γ είναι απλή κλειστή καμπύλη, η οποία περιέχει στο εσωτερικό της το 0. Επομένως $1=\delta_\gamma(0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}$. Έτσι έχουμε

$$2\pi i=\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=\int_0^{2\pi}\frac{-2\sin\theta+3i\cos\theta}{2\cos\theta+3i\sin\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{5\sin\theta\cos\theta}{4\cos^2\theta+9\sin^2\theta}d\theta+i\int_0^{2\pi}\frac{6}{4\cos^2\theta+9\sin^2\theta}d\theta$$

Από όπου έπεται ότι $I=\dfrac{\pi}{3}$.]

16) Αποδείξτε ότι $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+2\cos^2\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Σύμφωνα με την Πρόταση 6.14, η f που αντιστοιχεί στη ρητή συνάρτηση $R(cos\theta,\sin\theta)=\frac{1}{1+2\cos^2\theta}$ είναι η $f(z)=\frac{2}{i}\cdot\frac{z}{z^4+4z^2+1}$. Οι απλοί πόλοι της f εντός του δίσκου $\Delta(0,1)$ είναι (δύο από τις ρίζες της διτετράγωνης εξίσωσης $z^4+4z^2+1=0$) $z_1=i\sqrt{2-\sqrt{3}},\ z_2=-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Έτσι υπολογίζουμε

$I=2\pi i\left(\operatorname{Re}s(f,z_1)+\operatorname{Re}s(f,z_2)\right)=2\pi i\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.]

17) Έστω $f(z)=e^{\frac{1}{z}},\quad z\neq 0$ και g ολόμορφη στο δίσκο $\Delta(0,r)\quad(r>0)$, η οποία δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h=g\cdot f$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο $z=0$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Θεωρούμε τις μηδενικές ακολουθίες $z_n=\frac{1}{2\pi ni}$ και $w_n=\frac{1}{(2n+1)\pi i},\quad n\geq 1$.

Αν $g(0)\neq 0$ τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι
$\lim_{n\to\infty}h(z_n)=g(0)\cdot 1=g(0)\neq -g(0)=g(0)\cdot(-1)=\lim_{n\to\infty}h(\mathrm{w}_n)$. Άρα το όριο $\lim_{z\to 0}h(z)$ δεν υπάρχει στο $\tilde{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ και η h έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0.

Έστω ότι $g(0)=0$. Επειδή $g\not\equiv 0$, υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και μια ολόμορφη συνάρτηση h_1 στον δίσκο $\Delta(0,r)$ με $h_1(0)\neq 0$, ώστε $g(z)=z^m\cdot h_1(z),\quad z\in\Delta(0,r)$. Όπως πριν, η $\varphi(z)=h_1(z)\cdot f(z)$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0˙ επομένως για το ανάπτυγμα Laurent της φ, έστω $\varphi(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$ στον δίσκο $\Delta(0,r)$ θα ισχύει ότι το σύνολο $M=\{n\in\mathbb{N}:c_{-n}\neq 0\}$ είναι άπειρο. Επειδή $h(z)=\mathrm{z}^m\cdot\varphi(z),\quad \mathrm{z}\in\Delta(0,\mathrm{r})$ έπεται ότι και το ανάπτυγμα Laurent της h στον $\Delta(0,r)$ θα έχει την ίδια ιδιότητα.]

18) Έστω $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $\gamma:[a,\mathrm{b}]\to\Omega$ κλειστή καμπύλη ώστε $\gamma(t)\neq 0$, για κάθε $t\in[a,b]$. Υποθέτουμε ότι αν $\sigma(t)=\frac{1}{\gamma(t)},\quad t\in[a,b]$ τότε $[\sigma]\subseteq\Omega$.

Αποδείξτε ότι $$\int_\gamma f(z)dz=-\int_\sigma\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2}dw\quad\left(=\int_{-\sigma}\frac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2}dw\right).$$

[<u>Υπόδειξη.</u> $-\int\limits_{\sigma}\dfrac{f\left(\frac{1}{w}\right)}{w^2}dw=-\int\limits_a^b\dfrac{f\left(\frac{1}{\sigma(t)}\right)}{\left(\sigma(t)\right)^2}\cdot\sigma'(t)\,\mathrm{dt}=-\int\limits_a^b f(\gamma(t))\cdot\dfrac{\sigma'(t)}{\left(\sigma(t)\right)^2}\mathrm{dt}=....$]

19) Αποδείξτε ότι: α) Αν $0<a<b$ τότε $\int\limits_a^b\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\cos a}{a}-\dfrac{\cos\mathrm{b}}{b}-\int\limits_a^b\dfrac{\cos x}{x^2}dx$ και κατόπιν συμπεράνατε ότι το Γ.Ο. $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ συγκλίνει.

β) Η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\,x^{2n+1}$ ισούται με $+\infty$ και κατόπιν ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(\mathrm{x})=\dfrac{\pi}{2}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> (α) Εφαρμόστε ολοκλήρωση κατά μέρη και παρατηρήστε ότι το Γ.Ο. $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$ $(a>0)$ συγκλίνει απόλυτα.

(β) Παρατηρούμε ότι $F(x)=\int\limits_0^x\dfrac{\mathrm{sint}}{t}dt$ για $x\in\mathbb{R}$.]

20) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{a+\cos\theta}$, όπου $a\in\mathbb{R}$ και $|a|>1$.

[<u>Υπόδειξη.</u> $I=-2i\int\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{z^2+2az+1}$ και $I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, αν $a>1$, $I=-\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, αν $a<-1$. Πρβλ. και το Παράδειγμα 6.14 (1).]

21) Αποδείξτε ότι $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\dfrac{3\pi}{8}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Υπάρχει μόνο ένας πόλος στο άνω ημιεπίπεδο, το σημείο i. Άρα, $I=2\pi i\,\mathrm{Re}s(f,i)$, όπου $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$. Για να βρούμε το $\mathrm{Re}s(f,i)$ μπορούμε να αναπτύξουμε την f σε δυνάμεις του $z-i$. Θέτουμε $\zeta=z-i$ και έχουμε για $|\zeta|<2$,

$f(\zeta)=\dfrac{1}{\left[(i+\zeta)^2+1\right]^3}=\dfrac{1}{\zeta^3(2i+\zeta)^3}=-\dfrac{1}{8i\zeta^3}\left(1+\dfrac{\zeta}{2i}\right)^{-3}=$ (με χρήση του τύπου των Newton-Abel, πρβλ. Θεώρημα 3.45) $=-\dfrac{1}{8i\zeta^3}\left(1-\dfrac{3t}{2i}-\dfrac{3t^2}{2}+\cdots\right)$. Ο συντελεστής του $\dfrac{1}{\zeta}$

σ’ αυτό το ανάπτυγμα είναι $\left(-\dfrac{1}{8i}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{16i}$. Κατά συνέπεια

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = 2\pi i\cdot\frac{3}{16i} = \frac{3}{8}\pi .$$

Σημειώνουμε ότι με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται το γενικότερο αποτέλεσμα

$I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2}}\cdot\frac{(2n-2)!}{\left[(n-1)!\right]^2},\quad n\geq 1$. Βέβαια το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει συντομότερα με χρήση του Παραδείγματος 6.9 (4), όπου έχουμε ήδη υπολογίσει την τιμή του $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^n}, i\right)$. Άρα $I_n = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^n}, i\right) =$ η ανωτέρω τιμή.]

22) Αποδείξτε ότι, αν $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta$, τότε $I=0$ όταν $n=2k$ και $I=2\pi$ όταν $n=2k-1,\quad k\geq 1$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Με την αντικατάσταση $z=e^{i\theta},\quad d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ της Πρότασης 6.14 έχουμε

$$I = \int_{|z|=1}\frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}\cdot\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}\cdot\frac{1}{z^n}dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}(1+z^2+\ldots+z^{2n-2})\cdot\frac{1}{z^n}dz\ .\ ]$$

23) Αποδείξτε ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Χρησιμοποιήστε το γνωστό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ (παράδ. 6.16.1 (2)) και ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\sin^2 x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}-\frac{1}{x}\sin 2x dx = \ldots = \frac{\pi}{2}.\ ]$$

24) Έστω $a>0$, αποδείξτε ότι: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x-ia}dx = 2\pi i e^{-a}$ και $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x+ia}dx = 0$.

Κατόπιν, προσθέτοντας και αφαιρώντας αυτούς τους τύπους συμπεράνατε ότι

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{e^a}$ και $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{ae^a}$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 6.16 και συγκρίνετε με τους τύπους του παραδείγματος 6.16.1 (2).]

25) Αποδείξτε ότι, αν $a>0$ τότε $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a})$.

[Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(z)=\frac{e^{iz}-1}{z(z^2+a^2)}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο 0 και έναν απλό πόλο στο ia.]

26) Αποδείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{x}^3\sin x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2e}$ και $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{x}\sin x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{2e}$.

[Υπόδειξη. Εργασθείτε με τις συναρτήσεις $f(z)=\frac{e^{iz}\cdot z^3}{(z^2+1)^2}$ και $\mathrm{g}(z)=\frac{e^{iz}\cdot z}{(1+z^2)^2}$.]

27) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{(x^2+i)^2}dx,\quad a\in\mathbb{R}$.

[Υπόδειξη. Αν $a\geq 0$, τότε η f είναι ολόμορφη στο άνω ημιεπίπεδο και από το (α) της Πρότασης 6.15 έπεται ότι $I(a)=0$. Αν $a<0$ τότε από το (β) της 6.15 έπεται ότι $I(a)=-2\pi i\cdot\mathrm{Re}s(f,-i)=-2\pi i\cdot(iae^a)=2\pi ae^a$.]

28) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

α) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos nx}{1+x+x^2}dx$, β) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos nx}{x^4+1}dx$, γ) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

δ) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$, ε) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x+x^2\right)^2}$,

στ) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x^2-2x+4}dx$

[Υπόδειξη. (α) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{n\sqrt{3}}{2}}\cdot\cos\frac{n}{2}$, (β) $\frac{\pi e^{-\frac{n}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{n}{\sqrt{2}}+\sin\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$, (γ) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(δ) $\frac{\pi}{2e^4}\cdot\left(2\cos 2+\sin 2\right)$, (ε) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, (στ) $\frac{\pi e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}}$.]

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[AP] T. Apostol, Mathematical Analysis, Addison-Wesley, 1974.

[B-N] J. Bak, D. Newman, Complex Analysis, Springer, 1997.

(Έχει μεταφρασθεί και στα Ελληνικά από τις εκδόσεις Leader Books.)

[Ch-Br] R. Churchill, J. Brown, Complex variables and applications, McGraw-Hill, 1984.

(Έχει μεταφρασθεί και στα Ελληνικά από τις Π.Ε.Κ.)

[Co] J. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer, 1978.

[D] J. Dieudonne, Infinitesimal Calculus, Hermann, 1971.

[Du] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon inc., 1975.

[G-L] E. Grove, G. Ladas, Introduction to complex analysis, Houghton Mifflin Co., 1974.

[Κα] Δ. Κάππος, Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων, Αθήνα, 1963.

[Ko] K. Kodaira, Introduction to complex analysis, Cambridge Univ. Press, 1984.

[M-H] J. Marsden, J. Hoffman, Basic complex analysis, Freeman,1987.

(Έχει μεταφρασθεί και στα Ελληνικά από τις εκδόσεις Συμμετρία.)

[M-X] Σ. Μερκουράκης και Τ. Χατζηαφράτης, Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[M]$_1$ Σ. Μερκουράκης, Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ, Αθήνα, 2010.

[M]$_2$ Σ. Μερκουράκης, Σημειώσεις παραδόσεων Τοπολογίας, Αθήνα, 2015.

[N] Σ. Νεγρεπόντης, Θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1993.

[Neh] Z. Nehari, Conformal Mapping, Dover, 1975.

[N-P] R. Nevanlina, V. Paatero, Introduction to Complex Analysis, Chelsea, 1982.

[Ru] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw Hill, 1974.

[Sp] M. Spivak, Calculus, Publish or Perish, 2008.

(Έχει μεταφρασθεί και στα Ελληνικά από τις Π.Ε.Κ.)

[Sv-Ti] A. Sveshnikov, A. Tikhonov, The Theory of Functions of a Complex Variable, Mir Publishers, 1978.

[S-T] I. Stewart, D. Tall, Complex Analysis, Cambridge Univ. Press, 2001.

[Str] K. Stromberg, Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth, 1981.

[So-Si] P.N. de Souza, J.N. Silva, Berkeley Problems in Mathematics, Springer, 2001.

[Sh] R. Shakarchi, Problems and Solutions for Complex Analysis, Springer, 1999.