

Differential Forms in Algebraic Topology

A tic-tac-toe proof of the Künneth formula

Καλογεράς Ιωάννης

1 Γενικευμένη αρχή Mayer-Vietoris

1.1 Αναδιατύπωση της ακολουθίας Mayer-Vietoris

Έστω U και V δύο ανοιχτά σύνολα μιας πολλαπλότητας. Γνωρίζουμε ότι από την ακολουθία των εγκλεισμών:

$$U \cup V \longleftarrow U \sqcup V \xleftarrow{\quad} U \cap V$$

προκύπτει μια ακριβής ακολουθία συμπλόκων (Mayer-Vietoris sequence)

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Είδαμε ότι από την αντίστοιχη μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \longrightarrow H^q(U \cup V) \longrightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \longrightarrow H^q(U \cap V) \longrightarrow H^{q+1}(U \cup V) \longrightarrow \dots$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνομολογία της ένωσης $U \cup V$ αν γνωρίζουμε τη συνομολογία των ανοιχτών συνόλων U και V . Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε την ακολουθία Mayer-Vietoris σε αριθμησιμο πλήθος ανοιχτών συνόλων.

Αρχικά, θα δείξουμε τη διαδικασία για δύο σύνολα. Έστω $\mathfrak{U} = \{U, V\}$. Θεωρούμε το διπλό σύμπλοκο

$$C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) = \oplus K^{p,q} = \oplus C^p(\mathfrak{U}, \Omega^*) \quad (1)$$

όπου,

$$K^{0,q} = C^0(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) \quad (2)$$

$$K^{1,q} = C^1(\mathfrak{U}, \Omega^q) = \Omega^q(U \cap V) \quad (3)$$

$$K^{p,q} = 0, \quad p \geq 2 \quad (4)$$

Το διπλό σύμπλοκο διαθέτει δύο διαφορικούς τελεστές, την εξωτερική παράγωγο d στην κατακόρυφη διεύθυνση και τον τελεστή διαφοράς δ στην οριζόντια, όπως φαίνονται στο σχήμα 1.

The diagram shows a grid representing the double complex $K^{p,q}$. The vertical axis is labeled q and the horizontal axis is labeled p . The grid has three columns for $p=0, 1, 2$ and four rows for $q=0, 1, 2, 3$. The entries in the grid are:

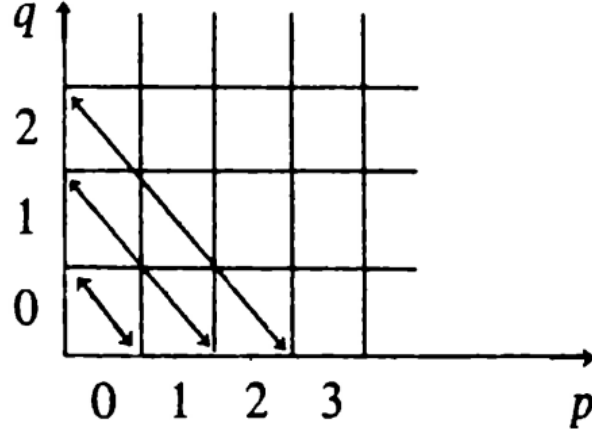
	\vdots	\vdots	\vdots
3	$\Omega^2(U) \oplus \Omega^2(V)$	$\Omega^2(U \cap V)$	0
2	$\Omega^1(U) \oplus \Omega^1(V)$	$\Omega^1(U \cap V)$	0
1	$\Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$	$\Omega^0(U \cap V)$	0
0			
	0	1	2

Arrows indicate the differentials: d points upwards and δ points to the right.

Σχήμα 1:

Οι τελεστές d και δ είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και επομένως μετατίθενται. Σε αυτή την περίπτωση, από το διπλά βαθμωτό σύμπλοκο $K^{*,*}$ με τους μεταθετικούς τελεστές, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονά

βαθμωτό σύμπλοκο K^* μέσω της άθροισης των στοιχείων κατά τις αντιδιαγωνίους, δηλαδή $K^n = \oplus_{p+q=n} K^{p,q}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2:

Ο διαφορικός τελεστής του συμπλόκου K^n είναι ο $D = \delta + (-1)^p d$ πάνω στα $K^{p,q}$. Σχηματικά, έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα που συνδέει τα $\Omega^*(M)$ και $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) & \xrightarrow{r} & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \\ d \uparrow & & \uparrow D \\ \Omega^*(M) & \xrightarrow{r} & C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \end{array}$$

Σχήμα 3:

Με $r : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \subset C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ ο περιορισμός των μορφών. Χωρίς απόδειξη, δίνεται και το παρακάτω θέωρημα:

Θεώρημα 1. Το διπλό σύμπλοκο $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ υπολογίζει τη συνομολογία de Rham της πολλαπλότητας M

1.2 Γενίκευση σε αριθμήσιμου πλήθους ανοιχτά σύνολα

Έστω πολλαπλότητα M με κάλυμμα $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ με \mathcal{J} αριθμήσιμο, άπειρο ή μη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε την παρακάτω ακολουθία εγκλεισμών

$$M \longleftarrow U_{\alpha_0} \xleftarrow[\partial_1]{\partial_0} \coprod_{\alpha_0 < \alpha_1} U_{\alpha_0 \alpha_1} \xleftarrow[\partial_2]{\partial_1} \coprod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \xleftarrow{\quad} \cdots$$

όπου με ∂_i συμβολίζεται η ένθεση που αγνοεί το i -σύνολο, για παράδειγμα:

$$\partial_0 : U_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \hookrightarrow U_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (5)$$

Η παραπάνω ακολουθία εγκλεισμάτων επάγει την ακολουθία περιορισμών των μορφών:

Ορισμός 2. Η τελευταία γραμμή

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

είναι ένα διαφορικό σύμπλοκο και η αντίστοιχη συνομολογία του $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ καλείται *Čech* συνομολογία του καλύμματος \mathfrak{U} .

Πόρισμα 2. Αν οι διευρυμένες στήλες του συμπλόκου $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ είναι ακριβείς, τότε ισχύει ο ακόλουθος ισομορφισμός

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} \quad (13)$$

Τέλος, κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με την παρατήρηση ότι σε ένα καλό κάλυμμα, οι διευρυμένες στήλες είναι ακριβείς και έτσι ισχύει η παραπάνω πρόταση, η οποία μας λέει και με βάση τα προηγούμενα ότι

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} \simeq H_{DR}^*(M) \quad (14)$$

Επίσης, η *Čech* συνομολογία είναι η ίδια για κάθε καλό κάλυμμα \mathfrak{U} του M .

2 Απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων

Έστω $\pi : E \rightarrow M$ μια απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων. Ένα κάλυμμα \mathfrak{U} της M επάγει ένα κάλυμμα $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ στο E και ισχύουν οι ακόλουθοι εγκλεισμοί:

$$\begin{array}{c} E \longleftarrow \coprod \pi^{-1}U_\alpha \longleftarrow \coprod \pi^{-1}U_{\alpha\beta} \longleftarrow \dots \\ \downarrow \pi \\ M \longleftarrow \coprod U_\alpha \longleftarrow \coprod U_{\alpha\beta} \longleftarrow \dots \end{array}$$

Γενικά, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ δεν συνεπάγεται ότι $\pi^{-1}U_\alpha \cap \pi^{-1}U_\beta \neq \emptyset$. Όμως, αν η π είναι επιμορφισμός, τότε οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες και αυτό συνεπάγεται ότι η συνδυαστική των υποσυνόλων των καλυμμάτων θα είναι η ίδια. Σε αυτή την περίπτωση, το διπλό σύμπλοκο του αντίστροφου καλύμματος υπολογίζει τη συνομολογία του E , η οποία σχετίζεται με τη συνομολογία του M , καθώς το αντίστροφο κάλυμμα προέρχεται από το κάλυμμα της M .

Ως παράδειγμα εφαρμογής του αντίστροφου καλύμματος $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ για τη μελέτη απεικονίσεων αναφέρεται το ακόλουθο: Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη εικόνα ενός καλού καλύμματος δεν είναι απαραίτητα ένα καλό κάλυμμα, όμως σε μια διανυσματική δέσμη $\pi : E \rightarrow M$ εξασφαλίζεται ότι το κάλυμμα θα παραμένει καλό.

Επειδή η συνομολογία de Rham καθορίζεται από ένα καλό κάλυμμα (όπως είδαμε στην εξ. (14)), έπεται ότι:

$$H_{DR}^*(E) \simeq H_{DR}^*(M) \quad (15)$$

3 Künneth formula

Πρόταση 3. (Künneth formula) Αν M και F δύο πολλαπλότητες και η F έχει πεπερασμένη διάσταση συνομολογία, τότε η συνομολογία de Rham του γινομένου $M \times F$ θα είναι:

$$H^*(M \times F) = H^*(M) \otimes H^*(F) \quad (16)$$

3.1 Ιδέα της απόδειξης

Έστω $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ ένα καλό κάλυμμα για την M και $\pi : M \times F \rightarrow M$ η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Τότε, η $\pi^{-1}\mathfrak{U} = \{\pi^{-1}U_\alpha\}$ είναι ένα κάλυμμα της $E = M \times F$, όχι απαραίτητα καλό. Μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση π^* ανάμεσα στα $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ και $C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*)$, που είναι το pullback των διαφορικών μορφών στα ανοιχτά σύνολα.

$$\begin{array}{c} C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*) \\ \pi^* \uparrow \\ C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \end{array}$$

Επιλέγουμε μια βάση του $H^*(F)$, έστω $\{[\omega_\alpha]\}$ με αντιπροσώπους τις διαφορικές μορφές ω_α . Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια απεικόνιση μεταξύ των διπλών συμπλόκων

$$\begin{array}{c} C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*) \\ \pi_{\mathfrak{U}}^* \uparrow \\ H^*(F) \otimes C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \end{array}$$

ως εξής

$$\pi_{\mathfrak{U}}^*([\omega_\alpha] \otimes \phi) = \rho^*\omega_\alpha \wedge \pi^*\phi \quad (17)$$

όπου ρ η προβολή στο νήμα

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\rho} & F \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

και ρ^* το pullback αυτής.

Επειδή ο $H^*(F)$ είναι διανυσματικός χώρος, τότε το γινόμενο $H^*(F) \otimes C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ θα είναι ένας αριθμός από αντίγραφα του $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ και ο διαφορικός τελεστής D του διπλού συμπλόκου $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ επάγει ένα τελεστή στο $H^*(F) \otimes C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$, για του οποίου τη συνομολογία θα ισχύει

$$H^*(F) \otimes H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} = H^*(F) \otimes H^*(M) \quad (18)$$

Και επειδή η D -συνομολογία του $C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*)$ είναι ισόμορφη με την $H^*(E)$, αν δείξουμε ότι η $\pi_{\mathfrak{U}}^*$

$$\begin{array}{c} C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*) \\ \pi_{\mathfrak{U}}^* \uparrow \\ H^*(F) \otimes C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*) \end{array}$$

επάγει έναν ισομορφισμό στην D -συνομολογία, τότε ο τύπος του Künneth προκύπτει άμεσα. Η απόδειξη αυτή χωρίζεται σε δύο βήματα.

Βήμα 1 Αρχικά θα δείξουμε ότι για ένα καλό κάλυμμα \mathfrak{U} , η απεικόνιση $\pi_{\mathfrak{U}}^*$ επάγει ένα ισομορφισμό στην H_d των δύο συμπλόκων.

Απόδειξη

Η p -οστή στήλη του $C^p(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*)$ αποτελείται από μορφές στις $(p+1)$ -πλάσιες τομές $\coprod \pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ και του $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ από μορφές στα $\coprod U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$. Η d -συνομολογία του $C^p(\mathfrak{U}, \Omega^*)$ είναι η

$$\coprod H^*(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \simeq H^*(F) \otimes \coprod H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) \quad (19)$$

διότι το $U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$ είναι συσταλτό και άρα έχει τετριμμένη συνολογία $H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ και το $(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ είναι ομοτοπικό με το F , με αποτέλεσμα και τα δύο σκέλη της παραπάνω εξίσωσης να είναι ισομορφικά με τον $H^*(F)$. Ο ισομορφισμός δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο των pullbacks όπως το ορίσαμε προηγουμένως. Επομένως, η π_1^* επάγει έναν ισομορφισμό της d -συνολογίας του $C^*(\pi^{-1}\mathfrak{U}, \Omega^*)$ και $H^*(F) \otimes C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$

Βήμα 2 Όταν ένας ομομορφισμός $f : K \rightarrow K'$, όπου K, K' διπλά σύμπλοκα επάγει έναν H_d -ισομορφισμό, τότε επάγει και έναν H_D -ισομορφισμό. (Με τον όρο ομομορφισμό μεταξύ διπλών συμπλόκων, εννοούμε έναν ομομορφισμό διανυσματικών χώρων, ο οποίος διατηρεί τους αμφιβαθμούς (p, q) (bidegrees) και είναι μεταθετικός με τις d και D).

Απόδειξη

Έστω K και K' δύο σύμπλοκα, και έστω d τα κατακόρυφα διαφορικά και D το συνολικό διαφορικό. Επίσης, υποθέτουμε ένα μορφισμό $f : K \rightarrow K'$, ο οποίος επάγει έναν ισομορφισμό στην d -συνολογία.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι τα K και K' έχουν πεπερασμένες μη-μηδενικές στήλες. Αυτό ισχύει στις περιπτώσεις που εξετάζουμε διότι το σύμπλοκο de Rham μιας πολλαπλότητας έχει πεπερασμένο μήκος.

Έστω τώρα K_1 και K'_1 υποσύμπλοκα των K και K' , αντίστοιχα, που έχουν όλες τις στήλες θετικού βαθμού και έστω C και C' οι πρώτες στήλες του K και του K' . Τότε έχουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα συμπλόκων

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{h} & K & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & K'_1 & \xrightarrow{h} & K' & \xrightarrow{g} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

όπου h ένας μονομορφισμός που εμφυτεύει τα K_1, K'_1 στα K, K' και g ένας επιμορφισμός. Ισχύει ότι $\text{Im}(h) = \ker(g)$, ή αλλιώς $C \simeq K/\text{Im}(h)$. Επομένως, οι γραμμές είναι ακριβείς ακολουθίες και μπορούμε να φτιάξουμε μια άπειρη σειρά ακολουθιών

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{i-1}(C) & \longrightarrow & H_i(K_1) & \longrightarrow & H_i(K) & \longrightarrow & H_i(C) & \longrightarrow & H_{i+1}(K_1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\ H_{i-1}(C') & \longrightarrow & H_i(K'_1) & \longrightarrow & H_i(K') & \longrightarrow & H_i(C') & \longrightarrow & H_{i+1}(K'_1) \end{array}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι τα κατακόρυφα βέλη $H_{i-1}(C) \rightarrow H_{i-1}(C')$ και $H_i(C) \rightarrow H_i(C')$ είναι ισομορφισμοί. Επαγωγικά καταλαβαίνουμε ότι και τα βέλη $H_i(K_1) \rightarrow H_i(K'_1)$ και $H_{i+1}(K_1) \rightarrow H_{i+1}(K'_1)$ θα είναι ισομορφισμοί καθώς τα K_1 και K'_1 έχουν μια λιγότερη μη-μηδενική στήλη από τα K και K' . Επομένως, με βάση το 5-lemma έπεται ότι και $H_i(K) \rightarrow H_i(K')$ ισομορφισμός.