

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Vector bundles

Δημήτριος Βαρδακώστας

Ορισμός (Διανυσματική δέσμη)

Δοθείσας μιας πολλαπλότητας M , C^∞ πραγματική διανυσματική δέσμη (real vector bundle) ονομάζουμε μια πολλαπλότητα E μαζί με μια C^∞ επί απεικόνιση $\pi : E \rightarrow M$, αν:

- για κάθε $p \in M$ η αντίστροφη εικόνα (fiber) $\pi^{-1}(p)$ είναι ένας n -διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος.
- υπάρχει ανοιχτή κάλυψη $\{U_a\}$ του M τέτοια ώστε οι απεικονίσεις

$$\phi_a : \pi^{-1}(U_a) \xrightarrow{\cong} U_a \times \mathbb{R}^n$$

να είναι αμφιδιαφορίσεις.

Το σύνολο $\{(U_a, \phi_a)_a\}$ που αποτελείται από την ανοιχτή αυτή κάλυψη και τις αντίστοιχες αμφιδιαφορίσεις ονομάζεται trivialization (απλοποιούσα κάλυψη) της διανυσματικής δέσμης. Γενικά αυτό το σύνολο δεν είναι μοναδικό.

Οι απεικονίσεις αυτές επάγουν αμφιδιαφορίσεις της μορφής:

$$\phi_a \phi_\beta^{-1} : U_a \cap U_\beta \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U_a \cap U_\beta \times \mathbb{R}^n$$

στις οποίες αν σταθεροποιήσουμε ένα σημείο της $U_a \cap U_\beta$, τότε η απεικόνιση είναι ένας αυτομορφισμός στο \mathbb{R}^n . Επομένως ταυτίζεται με έναν αντιστρέψιμο πίνακα και άρα επάγονται οι απεικονίσεις:

$$g_{a\beta} : U_a \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

δηλαδή $g_{a\beta}(x) = \phi_a \phi_\beta^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{R}^n}$ ή αλλιώς ότι

$$\phi_a \phi_\beta^{-1}(x, u) = (x, g_{a\beta}(x)u) \quad (1)$$

Τα $g_{\alpha\beta}$ ονομάζονται *συναρτήσεις μεταφοράς*. (transition functions)

Έτσι η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ είναι μια *structure group*. Γενικά μια ομάδα είναι *structure group* αν ικανοποιεί την παραπάνω διαδικασία με την $GL(n, \mathbb{R})$.

Ορισμός

- Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο του M . Μια λεία απεικόνιση $s : U \rightarrow E$ καλείται *section* (τομή) της διανυσματικής δέσμης, αν ισχύει $\pi s = 1_U$.

Με λίγα λόγια κάθε *section* απεικόνιση s στέλνει κάθε σημείο του U στο *fiber* του U ως προς την π .

- Ένα σύνολο s_1, \dots, s_n από *section* απεικονίσεις στο U ονομάζονται *frame* αν για κάθε $p \in U$, τα $s_1(p), \dots, s_n(p)$ αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου $E_p = \pi^{-1}(p)$.

Παρατήρηση

Οι συναρτήσεις μεταφοράς της διανυσματικής δέσμης ικανοποιούν την σχέση:

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$

στο $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Η σχέση αυτή βγαίνει εύκολα κοιτώντας την σχέση (1).

Λήμμα

Αν τα $g'_{\alpha\beta}$ προέρχονται από ένα άλλο *trivialization* $\{\phi'_a\}$, τότε υπάρχουν $\lambda_a : U_a \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ τέτοιες ώστε:

$$g_{\alpha\beta} = \lambda_a g'_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

στο $U_\alpha \cap U_\beta$.

Απόδειξη.

Προφανώς, υπάρχουν $\lambda_a : U_a \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ τέτοιες ώστε

$$\phi_a = \lambda_a \phi'_a$$

Επομένως, έχουμε:

$$g_{\alpha\beta} = \phi_a \phi_\beta^{-1} = \lambda_a \phi'_a \phi_\beta'^{-1} \lambda_\beta^{-1} = \lambda_a g'_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}$$

- Τα $g_{\alpha\beta}, g'_{\alpha\beta}$ ονομάζονται *ισοδύναμα*.

Παρατήρηση

Ισχύει και το αντίστροφο ως προς την προηγούμενη παρατήρηση. Αν μας δίνονται cocycles $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διανυσματική δέσμη E που να έχει τα $g_{\alpha\beta}$ συναρτήσεις μεταφοράς του.

Ένα παράδειγμα είναι να πάρουμε

$$E = (\Pi_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^n) / \sim, \text{ με σχέση ισοδυναμίας}$$

$$V_\alpha \times \mathbb{R}^n \ni (p, u) \sim (p, w) \in V_\beta \times \mathbb{R}^n \text{ ανν } w = g_{\alpha\beta} u.$$

Ορισμοί

- Ένας ομομορφισμός μεταξύ δύο διανυσματικών δεσμών $f : E_1 \rightarrow E_2$ καλείται *απεικόνιση δέσμης* αν είναι μια λεία συνάρτηση που διατηρεί τα fibers, δηλαδή ισχύει $\pi_2 f = \pi_1$.
- Δοθέντος μιας διανυσματικής δέσμης E με cocycle $\{g_{\alpha\beta}\}$, μπορούμε να βρούμε ισοδύναμο cocycle που παίρνουν τιμές σε μια υποομάδα H της $GL(n, \mathbb{R})$. Τότε λέμε ότι η structure group του E μπορεί να περιοριστεί στην H .
- Μια διανυσματική δέσμη είναι *προσανατολίσιμη* αν η structure group μπορεί να περιοριστεί στην $GL^+(n, \mathbb{R})$.
- Ένα trivialization $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ του E είναι *προσανατολισμός*, αν για κάθε α, β το $g_{\alpha\beta}$ έχει θετική ορίζουσα.
- Δύο προσανατολισμένα trivializations $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha, (V_\beta, \psi_\beta)_\beta$ λέγονται *ισοδύναμα* αν για κάθε $x \in U_\alpha \cap V_\beta$, η $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει θετική ορίζουσα.

Παρατήρηση

Πρόφανώς ο τελευταίος ορισμός είναι μια σχέση ισοδυναμίας και διαμερίζει το σύνολο των προσανατολισμένων trivializations σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, εκ των οποίων η κάθε μια ονομάζεται προσανατολισμός του E .

Παράδειγμα (Εφαπτόμενη δέσμη)

Έστω M μια πολλαπλότητα.

Ορίζουμε ως εφαπτόμενη δέσμη (tangent bundle) του M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Έστω (U_a, ψ_a) ένας άτλας του M . Τότε η αμφιδιαφύριση $\psi_a : U_a \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$, επάγει την απεικόνιση:

$$\psi_a^* : T_{U_a} \xrightarrow{\cong} T_{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^{2n}$$

η οποία είναι εξίσου αμφιδιαφύριση και έτσι μπορούμε να πάρουμε ένα τοπικό trivialization του TM .

Από αυτό μπορούμε να δούμε ότι, αν έχουμε δύο χάρτες $(U_a, \phi_a), (U_\beta, \phi_\beta)$, οι συναρτήσεις μεταφοράς του TM είναι της μορφής $D(\phi_\beta \phi_a^{-1})(\phi_a(x))$ για κάθε $x \in U_a \cap U_\beta$ και άρα ταυτίζονται με τους Jacobi πίνακες των συναρτήσεων μεταφοράς της M .

Επομένως, η M είναι προσανατολίσιμη αν η εφαπτόμενη δέσμη είναι.

- Θα δείξουμε ότι η structure group κάθε πραγματικής διανυσματικής δέσμης E μπορεί να περιοριστεί στην $O(n)$.

Αρχικά θα εφοδιάσουμε την πολλαπλότητα E με μια δομή Riemann. Έστω μια ανοιχτή κάλυψη $\{U_a\}$ του M ώστε να trivialize το E . Σε κάθε U_a επιλέγω ένα frame στο E_{U_a} και ορίζω να είναι ορθοκανονικό. Επομένως, σε κάθε E_{U_a} ορίζεται μια μετρική Riemann $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_a}$ και επομένως μέσω της διαμέρισης της μονάδας εξασφαλίζω μια μετρική Riemann σε όλη την πολλαπλότητα.

Ως trivializations, αν πάρουμε μόνο τις απεικονίσεις ϕ_a που ορθοκανονικά frames του E σε ορθοκανονικά frames του \mathbb{R}^n , τότε τα $g_{a\beta}$ θα διατηρούν ορθοκανονικά frames και επομένως θα παίρνουν τιμές στο $O(n)$. Επίσης αν τα $g_{a\beta}$ έχουν θετική ορίζουσα, τότε θα παίρνουν τιμές στην $SO(n)$. Έτσι αποδείχθηκε η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Η structure group μιας πραγματικής διανυσματικής δέσμης τάξης n μπορεί πάντα να περιοριστεί στην ομάδα $O(n)$. Μπορεί επίσης να περιοριστεί στην $SO(n)$ αν η διανυσματική δέσμη είναι προσανατολίσιμη. \square

- Προκειμένου να καταλήξουμε στο ζητούμενο που είναι να δείξουμε ότι κάθε διανυσματική δέσμη μιας συσταλτής πολλαπλότητας είναι τετριμμένη, το οποίο είναι αρκετά χρήσιμο για την απόδειξη του Thom Isomorphism, θα αναφέρουμε κάποια παραδείγματα διανυσματικών δεσμών που κατασκευάζονται από άλλες διανυσματικές δέσμες:

Έστω E, E' δύο διανυσματικές δέσμες πάνω από το M τάξης n, m αντίστοιχα.

Ευθύ άθροισμα:

Το ευθύ άθροισμα $E \oplus E' = \Pi_{p \in M}(E_p \oplus E'_p)$ με τον προφανή επιμορφισμό $\Pi : E \oplus E' \rightarrow M$ είναι μια διανυσματική δέσμη του M με τάξη $n + m$.

Τα trivializations $\{\phi_a\}$ και $\{\phi'_a\}$ των E και E' αντίστοιχα, επάγουν επάγουν ένα τοπικό trivialization στο $E \oplus E'$:

$$\phi_a \oplus \phi'_a : E \oplus E'|_{U_a} \xrightarrow{\cong} U_a \times \mathbb{R}^{n+m}$$

με:

$$(\phi_a \oplus \phi'_a)(u, u') = (\Pi(u, u'), (\pi_{\mathbb{R}^n} \circ \phi_a(u), \pi_{\mathbb{R}^m} \circ \phi_a(u')))$$

Επίσης αν $g_{a\beta}, g'_{a\beta}$ είναι συναρτήσεις μεταφοράς των E, E' αντίστοιχα, τότε η επαγόμενη συνάρτηση μεταφοράς του $E \oplus E'$ είναι ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} g_{a\beta} & 0 \\ 0 & g'_{a\beta} \end{pmatrix} \in GL(n + m, \mathbb{R})$$

Τανυστικό Γινόμενο:

Το τανυστικό γινόμενο $E \otimes E'$ μια διανυσματική δέσμη του M τάξης nm , της οποίας για κάθε $p \in M$ το fiber θα είναι $E_p \otimes E'_p$. Επίσης έχει συναρτήσεις μεταφοράς της μορφής $g_{a\beta} \otimes g_{a\beta} \in GL(nm, \mathbb{R})$.

Hom δέσμη:

Ο $Hom(E, E') \cong E^* \otimes E'$ είναι μια διανυσματική δέσμη του M και για κάθε $p \in M$ το fiber της είναι $\{f : E_p \rightarrow E'_p \mid f \text{ γραμμική}\}$.

Δυσικός χώρος:

Το $E^* \cong \text{Hom}(E, \mathbb{R})$ είναι μια διανυσματική δέσμη του M .

Αν τα $\phi_a : E|_{U_a} \rightarrow U_a \times \mathbb{R}^n$ είναι ένα trivialization του E , τότε τα

$(\phi_a^*)^{-1} : E^*|_{U_a} \rightarrow U_a \times (\mathbb{R}^n)^*$ αποτελούν ένα trivialization του E^* .

Οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι:

$$(\phi_a^*)^{-1} \phi_\beta^* = ((\phi_\beta^*)^{-1} \phi_a^*)^{-1} = ((\phi_\beta^{-1})^* \phi_a^*)^{-1} = ((\phi_a \phi_\beta^{-1})^*)^{-1} = (g_{a\beta}^*)^{-1}$$

Pullback διανυσματική δέσμη:

Έστω M, N δύο πολλαπλότητες και $\pi : E \rightarrow M$ μια διανυσματική δέσμη του M . Τότε κάθε απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ επάγει μια διανυσματική δέσμη $f^{-1}E$ του N η οποία ονομάζεται pullback του E ως προς την f .

Το $f^{-1}E$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\{(n, e) : f(n) = \pi(e)\} \subseteq N \times E$.

Προφανώς είναι το μοναδικό μεγιστικό υποσύνολο που κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Το fiber του $f^{-1}E$ ως προς ένα σημείο $n \in N$, είναι ισόμορφο με το $E_{f(n)}$, αφού

$$(f^{-1}E)_n = \{(n, e) : f(n) = \pi(e)\} = \{(n, e) : e \in E_{f(n)}\} \cong E_{f(n)}$$

Έτσι, το $f^{-1}E$ είναι τοπικά τετριμμένο και άρα είναι μία διανυσματική δέσμη. Επίσης, αν έχουμε τις απεικονίσεις

$f : M'' \rightarrow M'$ και $g : M' \rightarrow M$, τότε ισχύει ότι:

$$(g \circ f)^{-1}E \cong f^{-1}(g^{-1}E) \quad (2)$$

αφού $\forall m \in M''$:

$$(f^{-1}(g^{-1}E))_m \cong (g^{-1}E)_{f(m)} \cong E_{g(f(m))} = E_{(g \circ f)(m)} \cong ((g \circ f)^{-1}E)_m$$

$$\begin{array}{ccccc}
(g \circ f)^{-1}E & \longrightarrow & E & & \\
\downarrow & & \downarrow \pi & & \\
M'' & \longrightarrow & M & & \\
f^{-1}(g^{-1}E) & \longrightarrow & g^{-1}E & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
M'' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M
\end{array}$$

- Θεωρούμε $Vect_k(M)$ ως το σύνολο των ισόμορφων κλάσεων των τάξης k διανυσματικών του δεσμών του M , το οποίο είναι ένα pointed set με base point να είναι η ισόμορφη κλάση των δεσμών-γινόμενο του M . Επίσης, αν $f : M \rightarrow N$ μια απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, ορίζουμε $Vect_k(f) = f^{-1}$ να είναι η pullback απεικόνιση στις διανυσματικές δέσμες.

Επομένως, λόγω της (2), ο $Vect_k()$ είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία των πολλαπλοτήτων στην κατηγορία των pointed sets.

Παρατήρηση

Αν τα $\{U_a\}$ είναι μια trivializing ανοιχτή κάλυψη για το E , τότε τα $\{f^{-1}U_a\}$ είναι μια trivializing ανοιχτή κάλυψη για το $f^{-1}E$ πάνω από το N και ισχύει $(f^{-1}E)|_{f^{-1}U_a} = f^{-1}(E|_{U_a})$ αφού:

- $(f^{-1}E)|_{f^{-1}U_a} = \{(n, e) \in f^{-1}U_a \times E : f(n) = \pi(e)\} = \{(n, e) \in f^{-1}U_a \times E : \pi(e) = f(n) \in U_a\} = \{(n, e) \in f^{-1}U_a \times E|_{U_a} : f(n) = \pi(e)\}$
- $f^{-1}(E|_{U_a}) = \{(n, e) \in N \times E|_{U_a} : f(n) = \pi(e)\} = \{(n, e) \in N \times E|_{U_a} : f(n) = \pi(e) \in U_a\} = \{(n, e) \in f^{-1}U_a \times E|_{U_a} : f(n) = \pi(e)\}$

Επομένως, οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι οι $f^*g_{a\beta} = g_{a\beta} \circ f$, αφού:

αν $\phi_a : E|_{U_a} \rightarrow U_a \times \mathbb{R}^n$ με $\phi_a(e) = (\pi(e), \tilde{\phi}_a(e))$, τότε παίρνουμε

$$f^{-1}(E|_{U_a}) = (f^{-1}E)|_{f^{-1}U_a} \rightarrow f^{-1}U_a \times \mathbb{R}^n \text{ με} \\ (n, e) \mapsto (n, \tilde{\phi}_a(e))$$

και άρα η συνάρτηση μεταφοράς της $f^{-1}E$ στο $U_a \cap U_\beta$ είναι

$$(\tilde{\phi}_a \circ \tilde{\phi}_\beta)(f(n)) = (f^*g_{a\beta})(n)$$

Θεώρημα (Ομοτοπική ιδιότητα των διανυσματικών δεσμών)

Έστω Y μια συμπαγής πολλαπλότητα και X μια πολλαπλότητα. Αν $f_1, f_2 : Y \rightarrow X$ είναι δύο ομοτοπικές απεικονίσεις και E μια διανυσματική δέσμη του X , τότε

$$f_1^{-1}E \cong f_2^{-1}E$$

,δηλαδή οι ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν ισόμορφες δέσμες.

Απόδειξη.

Γνωρίζουμε ότι αν V, W είναι διανυσματικές δέσμες τάξης k μιας B , τότε το $Hom(V, W)$ είναι μια διανυσματική δέσμη του B , με fibers το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το V_p στο W_p για κάθε $p \in B$.

Ορίζουμε $Iso(V, W)$ να είναι το υποσύνολο του $Hom(V, W)$ του οποίου το fiber αποτελείται από όλους τους ισομορφισμούς από το V_p στο W_p για κάθε $p \in B$.

Επομένως, το $Iso(V, W)$ είναι ένα fiber bundle με fiber $GL(k, \mathbb{R})$.

Έτσι κάθε ισομορφισμός από το V στο W είναι ένα section του $Iso(V, W)$.

Έστω $f : Y \times I \rightarrow X$ μια ομοτοπία των f_1, f_2 και έστω $\pi : Y \times I \rightarrow Y$ η φυσική προβολή.

Έστω ότι για κάποιο t_0 έχουμε $f_{t_0}^{-1}E \cong F$, για κάποια διανυσματική δέσμη F του Y .

Τα $f^{-1}E, \pi^{-1}F$ είναι pullback διανυσματικές δέσμες του $Y \times I$, και αφού $f_{t_0}^{-1}E \cong F$, τότε η $Iso(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$ έχει ένα section στο $Y \times t_0$. Επομένως, είναι και section του $Hom(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$. Αφού η Y συμπαγής, τότε το $Y \times t_0$ καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος trivializing ανοιχτά σύνολα για το $Hom(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$. Καθώς κάθε fiber του $Hom(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$ είναι ευκλείδειος χώρος, η section στο $Y \times t_0$ μπορεί να επεκταθεί σε μία section του $Hom(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$ στο σύνολο των πεπερασμένων ανοιχτών συνόλων που είπαμε πριν.

Εφόσον κάθε γραμμική απεικόνιση πολύ κοντά σε έναν ισομορφισμό είναι ισομορφισμός (βγαίνει εύκολα αν κοιτάξουμε την συνεχή απεικόνιση $\det : Hom(V, W) \rightarrow \mathbb{R}$), τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την υπάρχουσα section του $Iso(f^{-1}E, \pi^{-1}F)$ σε μια λωρίδα που περιέχει το $Y \times t_0$.

Επομένως, λόγω συμπίεσης του I έχουμε ότι $f_t^{-1}E \cong F$ για κάθε $t \in I$. \square

Παρατήρηση

Το θεώρημα ισχύει ακόμα και αν η Y είναι παρασυμπαγής. Επίσης κάθε πολλαπλότητα είναι παρασυμπαγής.

Άρα επάγεται το εξής πόρισμα:

Πόρισμα

Κάθε διανυσματική δέσμη μιας συσταλτής πολλαπλότητας M είναι τετριμμένη.

Απόδειξη.

Υπάρχουν $f : \{*\} \rightarrow M$, $g : M \rightarrow \{*\}$ ώστε $f \circ g \sim 1_M$ και επομένως από το προηγούμενο θεώρημα:

$$E \cong (f \circ g)^{-1}E = g^{-1}(f^{-1}E)$$

Αφού το $f^{-1}E$ είναι διανυσματική δέσμη του $\{*\}$, τότε η δέσμη είναι τετριμμένη, άρα και η $g^{-1}(f^{-1}E) \cong E$. \square