

Ορίζεται  $\Omega_c^k(\mathbb{R}^n) = \{ C^\infty \text{ συναρτήσεις } : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ε ευπαράγωγοι μορφές} \} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

Θεωρούμε τον  $\Omega_c^*$  ως έναν αναδιωρισμένο συναρτητή

Mayer-Vietoris για ευπαράγωγοι μορφές

$$0 \rightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \rightarrow \Omega_c^*(U \cup V) \rightarrow 0$$

βραχυία ακριβής ακολουθία, και εναίςσειν μια παρει ακριβής ακολουθία:

$$\begin{array}{ccccccc} \hookrightarrow & H_c^{q+1}(U \cup V) & \leftarrow & H_c^{q+1}(U) \oplus H_c^{q+1}(V) & \leftarrow & H_c^{q+1}(U \cap V) & \xrightarrow{d_x} \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & H_c^q(U \cup V) & \leftarrow & H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) & \leftarrow & H_c^q(U \cap V) & \searrow \end{array}$$

Poincaré:  $H_c^*(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{στη διάσταση } n \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

και η ανεικόνισι  $H_c^n(\mathbb{R}^n) \ni [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega \in \mathbb{R}$  είναι ισομορφισμός.



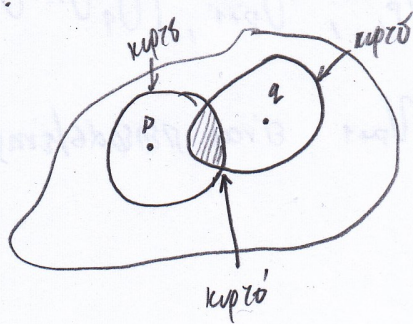
## Κάλι καλύψατα (Good covers) πολλατοσητων

Αν  $M$  πολλατα δλοσας  $n$ , ενα καλυφα  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  της  $M$  λλγεται καλο αν οδς οι περπαδλρες ροτες  $U_\alpha, \dots, U_{\alpha_n}$  εναα αλρλοδαφορες με τον  $\mathbb{R}^n$

Οερλητα: Καθε πολλατα εχε καλο καλυφα

Αοδωζη: Εφοδιαζουε την πολλατα  $M$  με μια λεψη Riemann.

Ααδ θεωρητα της διαφορηης γεωμετρλας, καθε οηκτορεχε μια γεωδαμετακα κερη περλοη,  $U_p$ . Το  $\mathcal{U} = \{U_p\}_{p \in M}$  εναα καλο καλυφα, αφω περ ροη γεωδαμετακα κερων εναα γεωδαμετακα κερδ εωτοδο, και καθε γετοδο εναα αλρλοδαφορλο με τον  $\mathbb{R}^n$ .



Προσμεως, αν  $M$  εωηατης το καλυφα ημρη να ελρλεχθει να εναα περπαδλρενο. (ορσλαε, αφω το καλο καλυφα που κατακωδλαε θα εχε περπαδλρενο υποκαλυφα).

Γηκοτερα, ημρωε να δωζουε οε για καθε καλυφα  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  υπαρχε καλυφα

$\mathcal{V} = \{V_j\}$  με  $V_j \subseteq U_i$  για καηοιο  $i$ , και το  $\mathcal{V}$  εναα καλο καλυφα.

(αα καλα καλυφατα εναα ορρεθλα οο καεωμετρλο εωτοδο των καλυφατων.)



## Περσφάκεια διάσταση της ομολογίας De Rham

Πρόταση: Αν η πολλαπλά M έχει περσφάκεια καδός καδύλλα, τότε η ομολογία της  $H^q(M)$  είναι περσφάκεια διάστασης.

Απόδειξη: Mayer-Vietoris:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^q(U \cap V) \xrightarrow{r} H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow \cdots$$

παιρνουμε:  $H^q(U \cap V) \simeq \ker r \oplus \operatorname{im} r$  (το δ.Ι. στα δ.χ.)  
 $\simeq \operatorname{im} d^* \oplus \operatorname{im} r$  (αφού η ακολ. είναι ακριβής  $\operatorname{im} d^* = \ker r$ )

$$\text{υποχωρος} \rightarrow \leq H^{q-1}(U \cap V) \oplus H^q(U) \oplus H^q(V)$$

Άρα, αν οι διαστάσεις των ομολογιών των  $U, V, U \cap V$  είναι περσφάκεια, τότε είναι και των  $U \cup V$

Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στον αριθμό των (περσφάκεια) καδός καδύλλων

- Αν  $M$  αμφισχιστική κρον  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dim H^q(M) = \begin{cases} 1, & q=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} < \infty$
- Έστω ότι ισχύει για κάθε πολλαπλά που καδόντεται με  $p$  ονομα.

Έστω  $M$  με καδύλλα  $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$

Τότε η πολλαπλά  $M = (U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$  έχει καδός καδύλλα με  $p$  ονομα ( $U_i \cap U_{p+1}$ )

Από υποθέση, οι ομολογίες των  $U_1 \cup \dots \cup U_p, U_{p+1}, (U_1 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$  είναι περσφάκεια διάστασης.

Άρα και η ομολογία της  $M = (U_1 \cup \dots \cup U_p) \cup U_{p+1}$  είναι περσφάκεια διάστασης

□

(Ομοίως, και η  $H_c^q(M)$  έχει περσφάκεια διάσταση)



### Διότι, Poincaré (Poincaré Duality) na προτανα τοδισιν ποδδρα

Μια αντιστοιχία  $\langle, \rangle: V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$  είναι nondegenerate (ή εκφυλιστική) αν  $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \Rightarrow v = 0$ . Ισοδυναμικά,  $v \mapsto \langle v, - \rangle$  ισοδοιχείται με  $V \xrightarrow{\sim} W^*$ .

Da  $\delta$   $\mathbb{R}$ -bilinear ist, so  $\int : H^q(M) \otimes H_c^{n-q}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -bilineares  
Skalarprodukt.  $H^q(M) \cong (H_c^{n-q}(M))^*$

Арифма (20 5-Арифма) Ёру 20 йедағебес Сидғарма

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \rightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E & \rightarrow & \cdots \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Ar o1 spal'tej sirau akpibeis rae  $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$  1600p416/01, 2522  $\gamma$  1600p416/03

## Answer (Diagram Chasing)



Λήμμα: Οι παρακάτω διαγράμματα είναι  $\pm$  τεταυρωμένα

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow H^q(\mathcal{U} \cup V) & \xrightarrow{r} & H^q(\mathcal{U}) \oplus H^q(V) & \xrightarrow{d|_U^p} & H^q(\mathcal{U} \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{q+1}(\mathcal{U} \cup V) \rightarrow \cdots \\
 \downarrow \int_{\mathcal{U} \cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{\mathcal{U} \cap V} & & \downarrow \int_{\mathcal{U} \cup V} \\
 \cdots \rightarrow (H_c^{n-q}(\mathcal{U} \cup V))^* & \xrightarrow{p} & (H_c^{n-q}(\mathcal{U}))^* \oplus (H_c^{n-q}(V))^* & \xrightarrow{q} & (H_c^{n-q}(\mathcal{U} \cap V))^* & \rightarrow & (H_c^{n-q-1}(\mathcal{U} \cup V))^* \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots \rightarrow H^q(\mathcal{U} \cup V) & \xrightarrow{r} & H^q(\mathcal{U}) \oplus H^q(V) & \xrightarrow{d|_U^p} & H^q(\mathcal{U} \cap V) & \xrightarrow{d^*} & H^{q+1}(\mathcal{U} \cup V) \rightarrow \cdots \\
 \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes \\
 \cdots \leftarrow H_c^{n-q}(\mathcal{U} \cup V) & \xleftarrow{\text{sum}} & H_c^{n-q}(\mathcal{U}) \oplus H_c^{n-q}(V) & \xleftarrow{\text{ext}} & H_c^{n-q}(\mathcal{U} \cap V) & \xleftarrow{d_*} & H_c^{n-q-1}(\mathcal{U} \cup V) \leftarrow \cdots \\
 \downarrow \int_{\mathcal{U} \cup V} & & \downarrow \int_U + \int_V & & \downarrow \int_{\mathcal{U} \cap V} & & \downarrow \int_{\mathcal{U} \cup V} \\
 \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
 \end{array}$$

όπου  $H^* \ni \omega \mapsto \int \omega_n = \in (H_c^{n-*})^*$ , δηλαδή  $\int \omega_n \tau \in \mathbb{R}$  αν  $\tau \in H_c^{n-*}$

και αν  $\omega \in H^q(\mathcal{U} \cap V)$ ,  $d^* \omega \in H^{q+1}(\mathcal{U} \cup V)$  ζω

$$d^* \omega|_U = -d(p_U \omega)$$

$$d^* \omega|_V = d(p_V \omega) \quad \text{έχει support στο } \mathcal{U} \cap V$$

$$\left( \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{p_U} & \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \cap V & & \\ & \xrightarrow{p_V} & V \end{array} \right)$$

και αν  $z \in H_c^{n-q-1}(\mathcal{U} \cup V)$ ,  $d_* z \in H_c^{n-q}(\mathcal{U} \cap V)$  και είναι γένη, ώστε

αν ενσωματωθεί με 0 στο  $\mathcal{U}$  είναι  $-d(p_U z)$

$V$  είναι  $d(p_V z)$

παρατηρούμε ότι  $d(p_V z) = d p_V z + p_V d z^0 = d p_V z$  αφού  $z$  κλειστό

και αντιστοίχα  $d(p_U \omega) = d p_U \omega$



Απόδειξη:

Είναι άμεσο ότι τα δύο πρώτα τελεστές είναι κλειστά

για το γέωμετρο τελεστή:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \omega_n d_* z &= \int_{\partial V} \omega_n d(p_V z) = \int_{\partial V} \omega_n (dp_V)_n z = \\ &= \pm \int_{\partial V} (dp_V)_n \omega_n z = \int_{\partial V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{και } \int_{\partial V} d^* \omega_n z &= - \int_{\partial V} (dp_V \omega)_n z \quad (\text{αφού } \text{supp}(d^* \omega) \subseteq \partial V) \\ &= - \int_{\partial V} (dp_V)_n \omega_n z\end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_{\partial V} \omega_n d_* z = \pm \int_{\partial V} d^* \omega_n z$$

και έπεται ότι το διάνυσμα είναι κλειστό.

Δεμπούμε το παρακάτω διάγραμμα με ακριβείς ραβδες, το οποίο (τάς δείξτε ότι) είναι τεταθισκό'.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^{q-1}(U) \oplus H^{q-1}(V) & \longrightarrow & H^{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^q(U \cup V) & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) \longrightarrow H^q(U \cap V) \\
 \int_U + \int_V \downarrow \sim & & \int_{U \cap V} \downarrow \sim & & \int_M \downarrow & & \int_U + \int_V \downarrow \sim & & \int_{U \cap V} \downarrow \sim \\
 (H_c^{n-q+1}(U))^* \oplus (H_c^{n-q+1}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q+1}(U \cap V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U \cup V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U))^* \oplus (H_c^{n-q}(V))^* & \longrightarrow & (H_c^{n-q}(U \cap V))^*
 \end{array}$$

Από 5-ήνθα αν οι ακριβείς είναι ισομορφισμοί, τότε είναι και η τελεία  $\Rightarrow H^q(U \cup V) \simeq (H_c^{n-q}(U \cup V))^*$

Από 4-ήνθα Poincaré στο  $\mathbb{R}^n$  έχουμε ότι:

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & , q=0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & , p=n \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

άρα  $H^q(\mathbb{R}^n) \simeq H_c^{n-q}(\mathbb{R}^n) \simeq (H_c^{n-q}(\mathbb{R}^n))^*$  (λόγω περσ. διαιρέσης)

και το  $\int$  είναι ισομορφισμός



θα επαρκούσε επαρκώς στον (πενεράδειο) οπιοθίρτο ενός καδού καδύλλας της  $M$ .

Έστω ότι ισχύει αν το καδύλλο έχει  $P$  οπιοθίρτα.

Έστω  $M$  με καδύλλο  $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$

Έτσι, όπως πριν,  $(U_0 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$  έχει καδύλλο από τα  $p$  το οπιοθίρτα  $\{U_i \cap U_{p+1}\}_i$ .

Από υπόθεση, το duality ισχύει για ως  $U_0 \cup \dots \cup U_p$ ,  $U_{p+1}$ ,  $(U_0 \cup \dots \cup U_p) \cap U_{p+1}$ .

Άρα θα ισχύει και για τη  $M = (U_0 \cup \dots \cup U_p) \cup U_{p+1}$ .

Άρα τελικά αν η  $M$  έχει πενεράδειο καδύλλο

$$H^q(M) \cong (H^{n-q}_c(M))^* \quad \square$$

Σημείωση: Αυτό ισχύει γενικότερα για προαναμετρήσιμες επιφάνειες

όπως δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο ( $H^q_c(M) \cong (H^{n-q}(M))^*$ ) και ο λόγος

επέρχεται στην (απώτερη) σχέση δεικνύει των  $\pi$  και  $\oplus$ .



Πρόταση: i) Αν  $M$  είναι συνεκτική προσανατολισμένη πολλαδιά διάστασης  $n$  τότε

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$$

ii) Αν  $M$  είναι επίσης συμπαγής, τότε  $H^n(M) \cong \mathbb{R}$

Πράγματι, i)  $(H_c^n(M))^* \cong H^{n-n}(M) = H^0(M) \cong \mathbb{R}$

$$\Rightarrow H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$$

ii) Αν είναι συμπαγής, τότε οι τοπικές σμ  $M$  έχουν συμπαγή φερτά

$$\Rightarrow H^n(M) = H_c^n(M) \cong \mathbb{R} \quad \square$$

Αν  $f: M \rightarrow N$ , όπου  $M, N$  προσανατολισμένες συμπαγείς πολλαδιές,  
ορίζεται το  $f^*: H^n(N) \rightarrow H^n(M)$

Αν  $\omega \in H^n(N)$  είναι γεννήτορας (υπάρχει γιατί  $\dim = 1$ )

αφού το βάθος της  $f$  να είναι  $\int_M f^* \omega$

προκρίνει ότι είναι αρέσκειος αριθμός, και είναι ίσος με το πλήθος σημείων  
στο  $f^{-1}(\{p\})$  για οποιοδήποτε  $p$  στη  $N$ .