

Ορισμός: Έστω X τοπολογικός χώρος και $x_0, x_1 \in X$. Στο X μια διαδρομή (δρόμος) από το x_0 στο x_1 είναι μια συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow X$ έτσι ώστε $f(0) = x_0$ και $f(1) = x_1$. Το x_0 είναι το αρχικό σημείο και το x_1 το τελικό σημείο. Η $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow X$, $\tilde{f}(s) = f(1-s)$ είναι η αντίστροφη διαδρομή της f . Ένας κλειστός δρόμος (θηλιά) στο x_0 είναι μια διαδρομή που αρχίζει και τελειώνει στο x_0 .

Θεώρημα: Έστω $X = A \cup B$, όπου A, B κλειστά. Έστω ακόμη $f: A \rightarrow Y$ και $g: B \rightarrow Y$ συνεχείς. Αν $f(x) = g(x) \forall x \in A \cap B$, τότε οι f, g δίνουν μια συνεχή συνάρτηση $h: X \rightarrow Y$ με $h(x) = f(x)$, $x \in A$ και $h(x) = g(x)$, $x \in B$.

Ορισμός²: Έστω $f: [0,1] \rightarrow X$ μια διαδρομή στο X από το x_0 στο x_1 και $g: [0,1] \rightarrow X$ μια διαδρομή στο X από το x_1 στο x_2 . Το γινόμενο $f \star g$ των f, g ορίζεται ως η διαδρομή $h: [0,1] \rightarrow X$

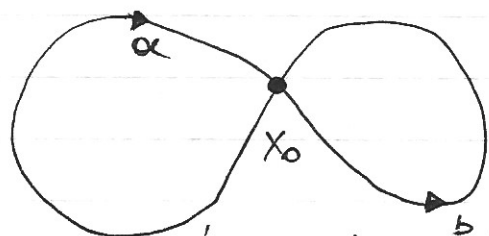
$$h(x) = \begin{cases} f(2x), & x \in [0, 1/2] \\ g(2x-1), & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

* Ουσιαστικά, το $f \star g$ "κολλάει" δύο διαδρομές μαζί για να σχηματίσουν μια καινούργια.

Ομοτοπία

Έστω $f, g: X \rightarrow Y$ συνεχείς συναρτήσεις. Μια ομοτοπία από το f στο g είναι μια συνεχής συνάρτηση $F: X \times [0,1] \rightarrow Y$ τέτοια ώστε για όλα τα $x \in X$: $F(x,0) = f(x)$ και $F(x,1) = g(x)$. * $f \simeq g$ ομοτοπικές

Δύο χώροι είναι ομοτοπικοί αν μπορούν με συνεχή τρόπο να παραμορφωθούν και να προκύψει ο ένας από τον άλλον.



Ένα γινόμενο δρόμων

Από τους προηγούμενους ορισμούς και ειδικά τον ορισμό των loops (το x_0 καλείται base point) θα καταλήξω στο εξής: Έστω $x_0 \in X$ και $D(x, x_0)$ το σύνολο όλων των loops με x_0 base point.

Στο σύνολο κλάσεων ομοτοπίας των loops του $D(X, x_0)$ ορίζεται μια πράξη και σχηματίζει ομάδα.

Από τον ορισμό Σ και αν ορίσω: a, b κλειστούς δρόμους με x_0 ως base point, τότε το ab γινόμενο είναι ο κλειστός δρόμος που πρώτα διατρέχει το a και ύστερα το b .

Δηλαδή:

$$ab(x) = a(2x), \quad t \in [0, 1/2]$$

$$ab(x) = b(2x-1), \quad t \in [1/2, 1]$$

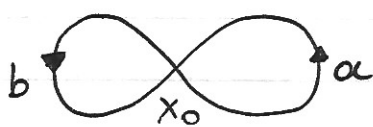
$[a]$ κλάση ομοτοπίας (περιέχει όλα τα loops, ομοτοπικά με το a). Άρα $[ab] = [a][b]$ (καλά ορισμένη πράξη στο σύνολο κλάσεων ομοτοπίας)

ιδιότητες
 διμετρική
 ομοστροφική
 μεταβατική

Τώρα, $\pi_1(X, x_0)$: σύνολο κλάσεων ομοτοπίας των loops με x_0 base point.

Έστω e το ταυτοτικό loop: $e(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$. Τότε: $ae = ea = e$ για κάθε άλλο loop με το x_0 base point, οπότε $[ea] = [ae] = [e]$. Δηλαδή, το $[e]$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της $\pi_1(X, x_0)$.

Τώρα, εάν a είναι loop με base point το x_0 , ορίζουμε $a^{-1}(t) = a(1-t)$. Τότε, $aa^{-1} = a^{-1}a$ ομοτοπικά με την ταυτοτική διαδρομή, οπότε $[aa^{-1}] = [a^{-1}a] = [e]$. Συμπέρασμα: Κάθε στοιχείο της $\pi_1(X, x_0)$ αντιστρέψιμο. Το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ σχηματίζει ομάδα και λέγεται θεμελιώδης ομάδα του X στο x_0 .



$$a^5 b^2 a^{-3} b a^2$$

: Η θηλιά που πηγαίνει 5 φορές γύρω από το A, 2 φορές γύρω από το B, 3 φορές γύρω από το A στην αντίθετη κατεύθυνση, μια φορά γύρω από το B, 2 φορές γύρω από το A

Δύο κύκλοι A, B με x_0 base point
 Οι A, B σχηματίζουν τον χώρο X.
 Κάθε γινόμενο δωδίκων των a, b δίνει στοιχείο του $\pi_1(X)$

Ελεύθερα γινόμενα ομάδων και ελεύθερες ομάδες

Έστω G ομάδα και $\{G_\alpha\}$ οικογένεια υποομάδων της G . Οι υποομάδες αυτές παράχουν την G , αν κάθε στοιχείο $x \in G$ μπορεί να γραφτεί σαν πεπερασμένο γινόμενο στοιχείων των υποομάδων G_α . Υπάρχει μια ακολουθία (x_1, \dots, x_n) όπου $x_i \in G_{\alpha_i}$ ώστε $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Η ακολουθία (x_1, \dots, x_n) ονομάζεται λέξη μήκους n που αναπαριστά το x .

Ερώτημα: Είναι μοναδική η αναπαράσταση κάθε στοιχείου $x \in G$; Υπάρχουν, δηλαδή, δύο ξεχωριστές λέξεις που αναπαριστούν το ίδιο στοιχείο x ;

\Rightarrow Δεν έχουμε απαραίτητα αβελιανή ομάδα, οπότε δεν μπορώ απαραίτητα να αναδιατάζω τους παράγοντες, τα στοιχεία κάθε G_α του x .

\Rightarrow Αν οι παράγοντες x_i, x_{i+1} ανήκουν στην ίδια υποομάδα μπορούν να συνδυαστούν. Τότε, παίρνουμε τη λέξη μήκους $n-1$ $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ που αναπαριστά το ίδιο στοιχείο x : στοιχειώδης αναγωγή.

\Rightarrow Κάθε στοιχείο που ισούται με το ταυτοτικό στοιχείο 1 μπορεί να διαγραφεί. Πάλι έχουμε αναγωγή.

Έστω το σύνολο των ανηγμένων λέξεων στο $\bigsqcup_\alpha G_\alpha$, $P(W)$ ομάδα μεταθέσεων του W .

Υποθέτουμε: Μια λέξη (g_1, \dots, g_n) με $g_i \in G_{\alpha_i}$ λέγεται ανηγμένη αν διαδοχικά g_i ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και $g_i \neq 1_{\alpha_i} \forall i$. Δηλ. $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ και $g_i \neq 1_{\alpha_i} \forall i$.

Για κάθε $\alpha \in I$ και $g \in G_\alpha$ ορίζω τη μετάθεση $L_g^\alpha \in P(W)$:
Εάν $1_\alpha = g$, τότε $L_g^\alpha = \text{id}_W$. Εάν $g \neq 1_\alpha$, τότε:

$$L_g^\alpha (g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g, g_1, \dots, g_n), & \alpha \neq \alpha_1 \\ (g g_1, \dots, g_n), & \alpha = \alpha_1 \wedge g g_1 \neq 1_\alpha \\ (g_1, \dots, g_n), & \alpha = \alpha_1 \wedge g g_1 = 1_\alpha \end{cases}$$

Ορίζεται επίσης:

$$(g) = L_g^\alpha (\emptyset)$$

Παρατηρώ τότε: $L_{g'g}^a = L_{g'}^a \circ L_g^a, \forall g', g \in G_\alpha$ (1)

Άρα: $L_{g^{-1}}^a \circ L_g^a = L_g^a \circ L_{g^{-1}}^a = \text{id}_W$. Η L_g^a είναι 1-1 και επί
δηλαδή πράγματι $L_g^a \in P(W)$

Η απεικόνιση

$\iota_\alpha: G_\alpha \rightarrow P(W), \iota_\alpha(g) = L_g^a$ είναι μονομορφισμός

Λόγω (1) ομομορφισμός. Για "1-1": αν $g \in G_\alpha \setminus \{1_\alpha\}$, τότε

$\iota_\alpha(g)(\emptyset) = L_g^a(\emptyset) = (g)$. Άρα $L_g^a \neq \text{id}_W$ και έτσι η ι_α είναι "1-1".

Ορισμός: Το ελεύθερο γινόμενο των $G_\alpha, \alpha \in I$ είναι η υποομάδα της $P(W)$ που παράγεται από τις υποομάδες $\iota_\alpha(G_\alpha), \alpha \in I$ και συμβολίζεται με $\star_{\alpha \in I} G_\alpha$: $\star_{\alpha \in I} G_\alpha = \langle \iota_\alpha(G_\alpha) : \alpha \in I \rangle \leq P(W)$

⊗ Οι G_α ομάδες λέγονται ελεύθεροι παράγοντες του ελεύθερου γινομένου.

Ορισμένες βασικές ιδιότητες του ελεύθερου γινομένου

Έχω $\iota_\alpha(G_\alpha) \cap \iota_\beta(G_\beta) = 1, \forall \alpha \neq \beta$ (1)

Δηλ. αν $g \in G_\alpha \setminus \{1_\alpha\}$ και $h \in G_\beta \setminus \{1_\beta\}$, τότε $\iota_\alpha(g)(\emptyset) = (g) \neq (h) = \iota_\beta(h)(\emptyset)$. Άρα $\iota_\alpha(g) \neq \iota_\beta(h)$

Αφού η $\star_{\alpha \in I} G_\alpha$ παράγεται από τις εικόνες $\iota_\alpha(G_\alpha), \alpha \in I$, κάθε

$g \in \star_{\alpha \in I} G_\alpha$ γράφεται σαν γινόμενο στοιχείων των $\iota_\alpha(G_\alpha), \alpha \in I$.

Δηλαδή: $g = \iota_{\alpha_1}(g_1) \iota_{\alpha_2}(g_2) \dots \iota_{\alpha_n}(g_n), g_i \in G_{\alpha_i}$

Αν διαδοχικά g_i ανήκουν στον ίδιο παράγοντα, έστω ότι $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, τότε το $\iota_{\alpha_i}(g_i) \iota_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$ από την (1) γράφεται $\iota_{\alpha_i}(g_i g_{i+1})$

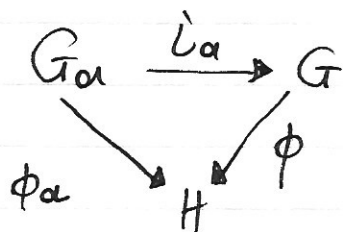
* Η ανηγμένη μορφή ενός στοιχείου είναι μοναδική (Απόδειξη παραλείπεται).

Πρόταση: Έστω $G_\alpha, \alpha \in I$ οικογένεια ομάδων και $G = \star_{\alpha \in I} G_\alpha$. Τότε:

- (i) Για κάθε $a \in I$ υπάρχει εμφύτευση $\iota_a: G_a \hookrightarrow \star_{a \in I} G_a$. Οπότε, μπορούμε να παίρνουμε τους παράγοντες G_a ως υποομάδες της G .
- (ii) $G = \langle \iota_a(G_a) : a \in I \rangle$
- (iii) Κάθε $g \in G \setminus \{1\}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο στοιχείων των $\iota_a(G_a)$ σε αυξημένη μορφή: $g = \iota_{a_1}(g_1) \iota_{a_2}(g_2) \dots \iota_{a_n}(g_n)$ για $g_i \in G_{a_i}, g_i \neq 1_{a_i}$ και $a_i \neq a_{i+1} \forall i$

Θεώρημα (Καθολική Ιδιότητα)

Έστω $G_a, a \in I$ μια οικογένεια ομάδων, $G = \star_{a \in I} G_a$ το ελεύθερο γινόμενο τους. Για κάθε H ομάδα και κάθε οικογένεια ομομορφισμών $\phi_a: G_a \rightarrow H$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\phi: G \rightarrow H$ με $\phi \circ \iota_a = \phi_a \forall a \in I$



Ελεύθερες ομάδες: Έστω X μη κενό σύνολο. Για κάθε $a \in X$, παίρνουμε την απειρη κυκλική ομάδα $\langle a \rangle$ που παράγεται από το a . Η ελεύθερη ομάδα επί του X είναι το ελεύθερο γινόμενο των ομάδων $\langle a \rangle, a \in X$, συμβολίζεται με $F(X)$. Η $F(X)$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο αντισώπων της απειρης κυκλικής \mathbb{Z} , ένα αντίτιπο για κάθε στοιχείο του X , $F(X) = \star_{a \in X} \langle a \rangle = \star_{a \in X} \mathbb{Z}a, \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}$.

Ορίζεται $F(\emptyset) = \{1\}$
 Το X λέγεται βάση της $F(X)$ και το $|X|$ διάσταση της $F(X)$