

Η γενικευμένη αρχή Mayer-Vietoris

Αναδιατύπωση της ακριβολογίας Mayer-Vietoris

Έστω U και V δύο ανοιχτά σύνολα σε μια πολλαπλότητα. Όπως ήδη γνωρίζουμε

$$U \cup V \leftarrow U \sqcup V \xrightarrow{\cong} U \cap V$$

αδυνατεί σε μια ακριβολογία διαφορικών

$$0 \rightarrow \Omega^*(U \cup V) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

η οποία ονομάζεται ακριβολογία Mayer-Vietoris.

Η μακρά αλυσίδα ακριβολογίας

$$\dots \rightarrow H^q(U \cup V) \xrightarrow{\cong} H^q(U) \oplus H^q(V) \xrightarrow{\cong} H^q(U \cap V) \xrightarrow{\cong} H^{q+1}(U \cup V) \rightarrow \dots$$

μας επιτρέπει να υπολογίζουμε σε πολλές περιπτώσεις τη δομή της ένωσης $U \cup V$ από τη δομή των ανοιχτών υποσυνόλων U και V .

Η γενίκευση της ακριβολογίας Mayer-Vietoris αφορά από τα δύο ανοιχτά σύνολα σε αριθμήσιμα πεπεσμένα ανοιχτά διαστήματα.

Προκειμένου να αποδείξουμε αυτή τη γενίκευση, πρώτ-
 ος θα αναδιατυπώσουμε την ακριβολογία Mayer-Vietoris
 για δύο ανοιχτά σύνολα, ως ακριβολογία

Έστω U ένα ανοιχτό κάτοικο $\{U, V\}$

Θεωρούμε το διπλό σύμπλεγμα $C^*(U, \mathbb{Q}) = \bigoplus \mathbb{Q}^{p,q} = \bigoplus C^p(U, \mathbb{Q}^q)$

$$\text{όπου } \mathbb{Q}^{0,q} = C^0(U, \mathbb{Q}^q) = \mathbb{Q}^q(U) \oplus \mathbb{Q}^q(V)$$

$$\mathbb{Q}^{1,q} = C^1(U, \mathbb{Q}^q) = \mathbb{Q}^q(U \cap V)$$

$$\mathbb{Q}^{p,q} = 0, \quad p \geq 2$$

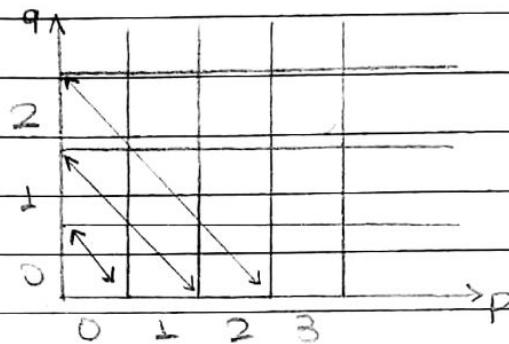
$q \uparrow$				
$d \uparrow$	2	$\mathbb{Q}^2(U) \oplus \mathbb{Q}^2(V)$	$\mathbb{Q}^2(U \cap V)$	0
	1	$\mathbb{Q}^1(U) \oplus \mathbb{Q}^1(V)$	$\mathbb{Q}^1(U \cap V)$	0
	0	$\mathbb{Q}^0(U) \oplus \mathbb{Q}^0(V)$	$\mathbb{Q}^0(U \cap V)$	0
		0	1	2

Αυτό το διπλό σύμπλεγμα είναι
 εφοδιασμένο με δύο διαφορικούς
 τελεστές, των εξωτερικών
 παραγώγων d στην κατακόρυφη
 κατεύθυνση και τον τελεστή
 διαφορών δ στην οριζόντια
 κατεύθυνση.

Φυσικά, ο δ είναι μηδέν μετά την πρώτη στήλη, καθώς ο d και ο δ είναι ανεξάρτητοι τελεστές, αντιμετατίθενται.

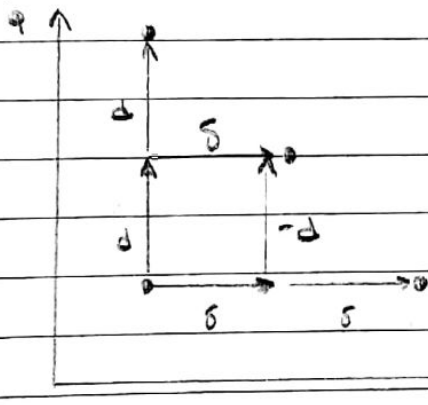
Γενικά όταν δίνεται ένα δεύτερου βαθμού complex K^{**} με αντιμεταθετική διαφορικά d και δ , μπορεί να εκληφθεί ένα χωριστό βαθμωτό complex K^* αφορίζοντας τις διαγωνίους γραμμές.

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$



και καθορίση των διαφορικών τελεστών να είναι $D = D' + D''$ με $D' = \delta$, $D'' = (-1)^p d$ στο $K^{p,q}$

Παρατήρηση στον υπολογισμό του D^2



Αν το D είχε διαδομένα υποθέσει ως $D = d + \delta$ δεν θα ήταν διαφορικός τελεστής αφού

$$D^2 = 2d\delta \neq 0$$

Εισαγάσοντας το σύμβολο του d στο τη μία στήλη στην επόμενη

τότε, όπως φαίνεται και από

$$\text{το διάγραμμα } D^2 = d^2 + \delta d - d\delta + \delta^2 = 0$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύμβολο $C^*(U, \mathcal{O}^*)$ για να συνδυάσουμε το διάνυσμα \mathcal{O}^* και το αντίστοιχο του μωο \mathcal{O}^* με αυτό το πρόβλημα η ανιστορία Mayer-Vietoris προτάσσεται στην ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 8.1

Το διπλό σύμπλεγμα $C^*(U, \Omega^*)$ υποδοχίζει τη δομή του de Rham της H .

$$H_0\{C^*(U, \Omega^*)\} \cong H_{DR}^*(U)$$

Απόδειξη:

Από την μια κατεύθυνση έχουμε την απεικόνιση

$$r: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(U) \subset C^*(U, \Omega^*)$$

με τους περιορισμούς του τύπου

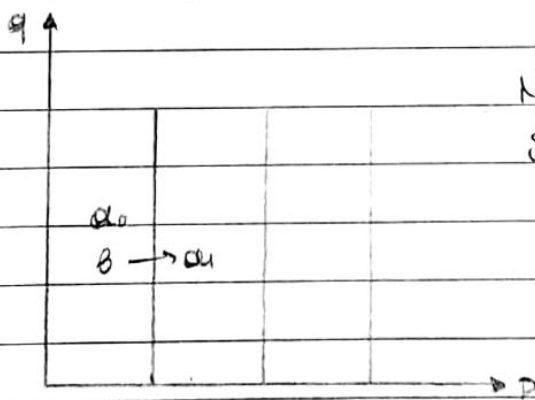
Πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι το r είναι μια αλυσίδα-εξομολογιστική, το οποίο σημαίνει ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι αβελιανό (commutative)

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(U) & \xrightarrow{r} & C^*(U, \Omega^*) \\ \uparrow d & & \uparrow D \\ \Omega^*(U) & \xrightarrow{r} & C^*(U, \Omega^*) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Αυτό σημαίνει readily } D \circ r &= (\delta + (-1)^p d) \circ r \quad p=0 \\ &= dr \\ &= rd \end{aligned}$$

Συμπερασματικά η r δίνει μια απεικόνιση στην ομολογία

$$r^*: H_{DR}^*(U) \rightarrow H_0\{C^*(U, \Omega^*)\}$$



Μια συνδυαστική α σε ένα διπλό σύμπλεγμα $C^*(U, \Omega^*)$ έχει δύο συνιστώσες
 $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_0 \in K^{0,q}, \quad \alpha_1 \in K^{1,q-1}$

Επειδή η ακολουθία Mayer-Vietoris είναι ακριβής υπάρχει ένα β τέτοιο ώστε $\delta\beta = \alpha_1$

Με αυτήν την επιλογή για το β , το $\alpha - \delta\beta$ έχει μόνο τη $(0,q)$ -συνιστώσα.

Έτσι, κάθε συνδυαστική στο $C^*(U, \Omega^*)$ είναι

D-ενομοπαγικό στην \mathcal{A} εναρμονισμένη μόνο με την κορυφαία ενοποίηση

• Γ^* είναι ισομορφισμός:

Βήμα 1^ο: Γ^* είναι επιμορφισμός

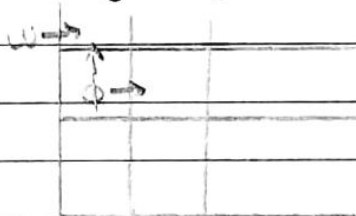
Από την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια ενομοπαγική κλάση στην $H_0\{C^*(\mathcal{U}, 0^*)\}$ αναπαριστάται από έναν φέροντα ϕ μόνο με την κορυφαία (top) του ενοποίηση.

Στην περίπτωση αυτή $D\phi = 0$ αν και μόνο αν $d\phi = \delta\phi = 0$
Έτσι το ϕ είναι μια εραφική κλάση μορφή

Βήμα 2^ο: Γ^* είναι μονομορφισμός

Υποθέτουμε ότι $\Gamma(\omega) = D\phi$ για κάποια εναρμονισμένη ϕ στο $C^*(\mathcal{U}, 0^*)$ και πάλι, σύμφωνα με την παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε $\phi = \phi' + D\phi''$ όπου η ϕ' έχει μόνο την κορυφαία ενοποίηση. Τότε, $\Gamma(\omega) = D\phi' = d\phi'$, $\delta\phi' = 0$.

Έτσι, το ω είναι η εξωτερική παράγωγος μιας εραφικής μορφής στην H



Γενίκευση σε αριθμημένα πολλα ανοιχτά σύνολα

Αντι για ένα κάλυμμα με δύο ανοιχτά σύνολα όπως στη συνδυασμένη ακολουθία Mayer-Vietoris, θεωρούμε το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ στην M , όπου το σύνολο I (δείκτης) μπορεί να είναι πεπερασμένο.

Θεωρούμε ανά δύο τις τομές $U_\alpha \cap U_\beta$ από το $U_\alpha \cap U_\beta$, ανά τρεις τομές $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ από το $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ κτλ

Υπάρχει μια συγκεκριμένη ακολουθία ανοιχτών συνόλων

$$M \leftarrow \coprod_{\alpha \in I} U_\alpha \xleftarrow{\delta_1} \coprod_{\alpha, \beta \in I} U_{\alpha\beta} \xleftarrow{\delta_2} \coprod_{\alpha, \beta, \gamma \in I} U_{\alpha\beta\gamma} \xleftarrow{\delta_3} \dots$$

όπου δ_i είναι η σύγκλιση (όριο) που "αγμοει" το i -στό ανοιχτό

συνολο $\prod_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha} : U_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \rightarrow U_{\alpha_0, \alpha_2}$

Αυτή η ακολουθία εκδηλώσεων ανοικτών ενόθεν συνάγει μια ακολουθία περιορισμών

$$\mathcal{O}^*(M) \xrightarrow{\gamma} \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0}) \xrightarrow{\gamma_1} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0, \alpha_1}) \xrightarrow[\gamma_2]{\gamma_3} \prod_{\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2} \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2}) \xrightarrow{\gamma_4} \dots$$

όπου \mathcal{D}_{α} , για παράδειγμα, ερμηνεύεται από την ευκλείδη

$\mathcal{D}_{\alpha} : \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha \beta \gamma} \rightarrow U_{\alpha \gamma}$ και ως εκ τούτου υπάρχει ο περιορισμός

$$\mathcal{D}_{\alpha} : \mathcal{O}^*(U_{\alpha \gamma}) \rightarrow \bigsqcup_{\alpha} \mathcal{O}^*(U_{\alpha \beta \gamma})$$

Ορίζουμε τον τελεστή διαφορών $\mathcal{D} : \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0, \alpha_1}) \rightarrow \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2})$ να είναι $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ έτσι, $(\mathcal{D}f)_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = f_{\alpha_0, \alpha_2} - f_{\alpha_0, \alpha_1} - f_{\alpha_1, \alpha_2}$

Τενιότερα, ο τελεστής διαφορών καθορίζεται ως ακολουθία:

Ορισμός:

Αν $\omega \in \prod \mathcal{O}^q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p})$, τότε το ω έχει "επιδοχές"

$\omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \in \mathcal{O}^q(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_p})$ και $(\mathcal{D}\omega)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}}$

Πρόταση: $\mathcal{D}^2 = 0$

Απόδειξη: Είναι αληθές επειδή στο $(\mathcal{D}^2\omega)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+2}}$ παραδει-

γουμε δύο σειρές a_i, a_j , δύο φορές με αντίθετα πρόσημα

$$\begin{aligned} \text{Για την αριστερά: } (\mathcal{D}^2\omega)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p+2}} &= \sum (-1)^i (\mathcal{D}\omega)_{\alpha_0, \dots, a_i, \dots, \alpha_{p+2}} \\ &= \sum (-1)^i (-1)^j \omega_{\alpha_0, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, \alpha_{p+2}} \\ &\quad + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \omega_{\alpha_0, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, \alpha_{p+2}} \end{aligned}$$

$$= 0$$

Παραδοχή:

Μέχρι τώρα οι σειρές στο $\omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}$ είναι όμοιες σε αύξουσα σειρά

$\alpha_0 < \dots < \alpha_p$ τρία γενικά, θα επιτρέπαμε σειρές σε οποιαδήποτε

σειρά, ακόμα και με επανάληψη, υψότερα στην παραδοχή

σε όταν δύο σειρές έχουν ανταλλάξει θέση, ο τύπος γίνεται

$$\text{ο αντίθετος των } \omega \dots a \dots b \dots = -\omega \dots b \dots a$$

Συγκεκριμένα, μια μορφή με επαναλαμβανόμενους σειρές είναι το 0

Πρόταση: (Γενικευμένη ανισότητα Mayer-Vietoris)

ανισότητα

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^*(U) \xrightarrow{\sim} \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_i}) \xrightarrow{\sim} \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_i \alpha_j}) \xrightarrow{\sim} \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_i \alpha_j \alpha_k}) \xrightarrow{\sim} \dots$$

είναι ακριβής, με άλλα λόγια η δ -επιμορφία αυτή του συμπλέγματος μηδενίζεται ταυτοτικά.

Απόδειξη:

$\mathcal{O}^*(U)$ είναι ο πυρήνας των πρώτων δ αφού ένα στοιχείο του $\prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_i})$ είναι μια ερασιμική μορφή της \mathcal{H} , αν και μόνο αν οι συνιστώσες του ερασιμότητας στις επικαλύψεις

Έστω τώρα $\{p_{\alpha}\}$ να είναι μια διαμέριση της ένωσης υφιστάμενη στο ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}$

Υποθέτουμε ότι $\omega \in \prod \mathcal{O}^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$ είναι ένας p -ομόκυκλος

Προσδιορίσαμε μια $(p-1)$ -αλυσίδα τ ως:

$$\tau_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$$

$$\text{τότε, } (\delta \tau)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_i (-1)^i \tau_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_p}$$

$$= \sum_{i, \alpha} (-1)^i p_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_p}$$

Επειδή ο ω είναι ομόκυκλος,

$$(\delta \omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p} + \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_p} = 0$$

Οπότε

$$(\delta \tau)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_i \dots \alpha_p}$$

$$= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$$

$$= \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε ομόκυκλος είναι εώνος

ακριβεία έπεται από γνωστή πρόταση \square

Ο ορισμός του τ στην παραπάνω απόδειξη δίνει έναν ομότοπο τελεστή

Θέτουμε $K\omega = \tau$:

$$(K\omega)_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \omega_{\alpha_0 \dots \alpha_{p-1}}$$

τότε

$$(\delta K\omega)_{a_0 \dots a_p} = \sum (-1)^i (K\omega)_{a_0 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_p} \\ = \sum (-1)^i \rho_a \omega_{a_0 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_p}$$

$$(K\delta\omega)_{a_0 \dots a_p} = \sum \rho_a (\delta\omega)_{a_0 \dots a_p} \\ = (\sum \rho_a) \omega_{a_0 \dots a_p} + \sum (-1)^{i+1} \rho_a \omega_{a_0 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_p} \\ = \omega_{a_0 \dots a_p} - (\delta K\omega)_{a_0 \dots a_p}$$

Ός ως εκ τούτου, το K είναι ένας τελεστής από $\Gamma^q_{\mathbb{R}}(U_{a_0 \dots a_p})$ στο $\Gamma^q_{\mathbb{R}}(U_{a_0 \dots a_p})$ τέτοιος ώστε $\delta K + K\delta = 1$

Όπως και στην απόδειξη του λήμματος Poincaré, η ύπαρξη ενός φωτοτυκίου τελεστή K είναι διαφορικό σύμπληγμα υπο-συνόλου ότι η συμφορολογία του συμπλήγματος μηδενίζεται.

Αν ϕ είναι φλόκωτος, τότε από την σχέση $\delta K + K\delta = 1$ ισχύει $\delta K\phi = \phi$. Οπότε στους φλόκωτους το K είναι μια αντίστροφη στο δ . Δοθέντες του ϕ το σύνολο όλων των λύσεων f του $\delta f = \phi$ αποτελείται από $K\phi + \delta$ -φλόκωτα

Η ακολουθία Mayer-Vietoris μπορεί να διαταχθεί σαν ένα αυξανόμενο σύνολο συμπλέγματος όπως $K^{p,q} = C^p(U, \Omega^q) =$

$0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^1(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^2(U) \xrightarrow{\delta} \dots$	$K^{0,2}$	$K^{1,2}$			
$0 \rightarrow \Omega^1(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^2(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^3(U) \xrightarrow{\delta} \dots$	$K^{0,1}$	$K^{1,1}$			
$0 \rightarrow \Omega^2(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^3(U) \xrightarrow{\delta} \Omega^4(U) \xrightarrow{\delta} \dots$	$K^{0,0}$	$K^{1,0}$			

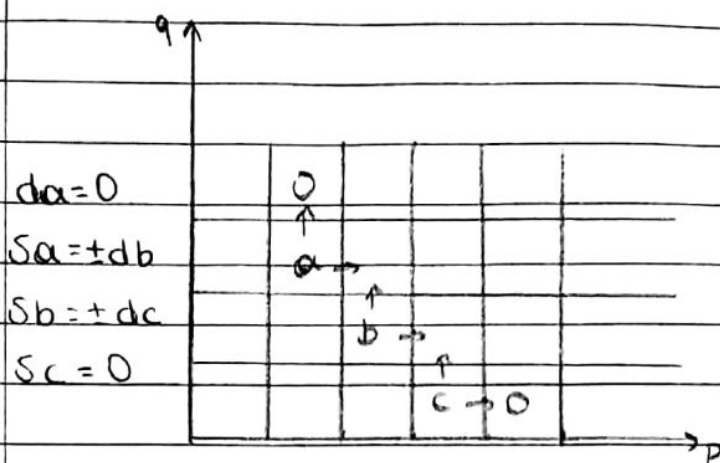
$\Gamma^q_{\mathbb{R}}(U_{a_0 \dots a_p})$ αποτελείται από τις " p -εναλλακτικές" των κατευθύνσεων U με τιμές στις q -μορφές. Οι οριζόντιες απεικονίσεις των συνόλων συμπλέγματος είναι οι τελεστές δια-φωρών δ και οι

κατακόρυφες είναι οι εσωτερικοί παραγωγείς d .

Όπως και πριν, το σύνολο complex μπορεί να γίνει ένα μόνο complex με διαφορικό τελεστή

$$D = D' + D'' = \delta + (-1)^p d$$

Ένας D -φλόκωτος είναι μια χαρδή $\phi = a + b + c$ με



Για να είμαστε ακριβείς

θα πρέπει να γράψουμε

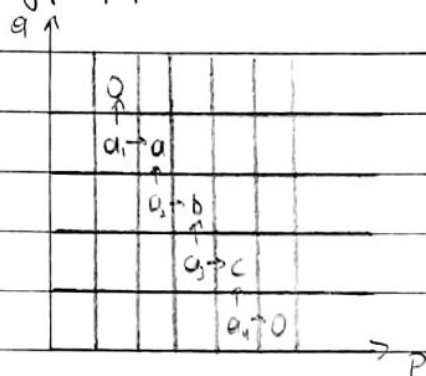
$$Sa = -D''b, Sb = -D''c$$

Οπότε, ένας D-φλοιός

μπορεί να περιγραφεί

ως "zig-zag"

Ένα D-φλοιός είναι μια χορδή όπως η $\Phi = a+b+c$
 στο διαγράμμα από κάτω όπου $a = Sa_1 + D''a_2$ κτλ



Το διπλό συμπλέγμα $C^*(U, \mathcal{O}^*) = \bigoplus C^p(U, \mathcal{O}^q)$

ονομάζεται Čech-de Rham συμπλέγμα ^{p,q=0} ένα στοιχείο του Čech-de Rham συμπλέγματος ονομάζεται αναδυοίσα.

Κάποιες φορές αναφερόμαστε στις αναδυοίσες

Čech-de Rham ως D-cochain (αναδυοίσες)

Το γεγονός ότι όλες οι βέρες του αυξανόμενου συμπλέγματος είναι ακριβείς, είναι το κλειδί στην παρακάτω απόδειξη

πρώτου: (Γενικευμένη ακολουθία Mayer-Vietoris)

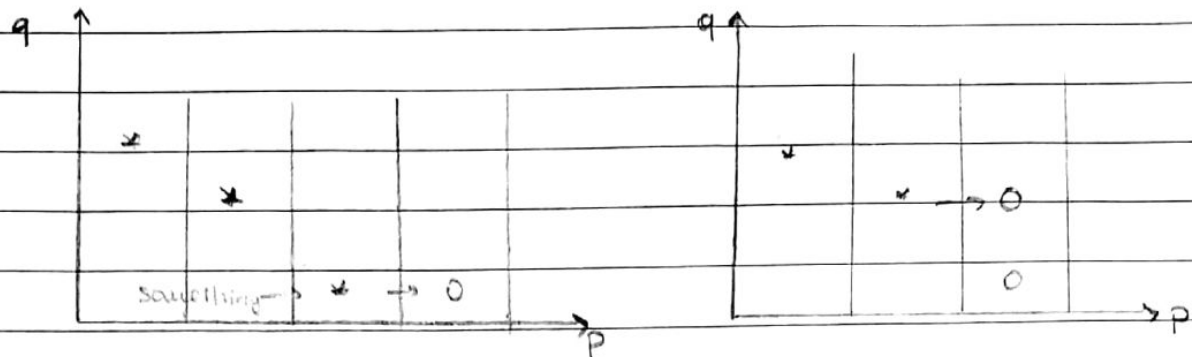
Το διπλό complex $C^*(U, \mathcal{O}^*)$ υποδοχίζει την de Rham αναγωγιμότητα της M . Τίπο γενικευμένα η απεικόνιση $r: \mathcal{O}^*(M) \rightarrow C^*(U, \mathcal{O}^*)$ επιφέρει έναν ισομορφισμό στην αναγωγιμότητα:

$$r^*: H^*_{DR}(M) \rightarrow H^0\{C^*(U, \mathcal{O}^*)\}$$

Απόδειξη:

Εφόσον $D\tau = (S+dt)\tau = d\tau = rdt$ είναι μια αδιειδίκτη σπινθήρας και έτσι επιγράφει μια απεικόνιση τ^* στην ευμετρολογία

Βήμα 1^ο: τ^* είναι επιμορφισμός



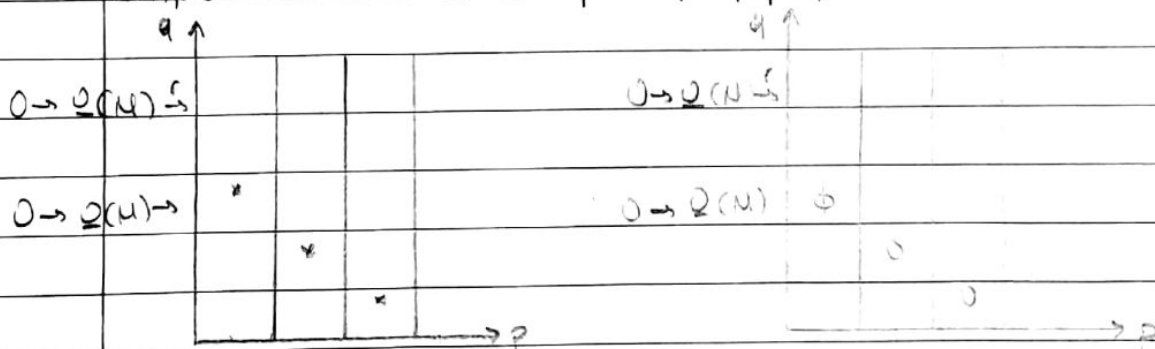
Έστω Φ ένας ομόκυκλος σχετιζόμενος με το D . Από την S -ακρίβεια η μικρότερη συνιστώσα του Φ είναι το δ από "είναι" αφαιρώντας το D (κέρει) από το Φ , μπορούμε να μετακινήσουμε την μικρότερη συνιστώσα του Φ και να παραμερίσουμε στην ίδια ευμετρολογική κλίση με το Φ .

Αφού επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή, αρκετές φορές, μπορούμε να μετακινήσουμε το Φ μέσα στη ευμετρολογική κλίση σε έναν ομόκυκλο Φ' , μόνο με την ακραία (top) συνιστώσα

Το Φ' είναι μια κλειστή ακραία μορφή καθώς

$$d\Phi' = 0 \text{ και } \delta\Phi' = 0$$

Βήμα 2^ο: τ^* είναι μονομορφισμός



Αν $\tau(\omega) = D\Phi$, μπορούμε να "κοντινίσουμε" το Φ , αφαιρώντας όλο και μικρότερα μέρη μέχρι να αποσπαστεί μόνο από την κορυφαία συνιστώσα

Τότε, επειδή $\delta\Phi = 0$ είναι αυθαίρετα μια βραχυκύκλιση μορφή πάνω στην H τότε η ω είναι ακρίβης \square

Ένα συμπέρασμα για την παραπάνω ανόδση θα μπορούσε να είναι ότι: αν όλες οι βίρες ενός αυθαίρετου δίκτυου complex είναι ακριβείς, τότε η D-ομοτοπία των complex είναι ισομορφική στην ομοτοπία της αρχικής δίκτυου

Κάθε βίρη αυθαίρετα από τον πυρήνα των κατωτέρων d , συμβολίζουμε ως $C^*(U, R)$. Η δίσταση των διαμετρικών χώρων $C^p(U, R)$ αποτελείται από τοπικά σταθερές συναρτήσεις στις διστομίες U_{a_0}, \dots, U_{a_p} , $(p+1)$ -πολλαπλότητας

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 0 \rightarrow \underline{C}^2(U) \xrightarrow{\delta} \underline{C}^1(U) \rightarrow \underline{C}^0(U) \rightarrow 0 \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \begin{array}{c}
 \Pi \underline{C}^2(U_{a_0}) \\
 \Pi \underline{C}^1(U_{a_0}) \\
 \Pi \underline{C}^0(U_{a_0})
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Η βίρη $C^0(U, R) \xrightarrow{\delta} C^1(U, R) \xrightarrow{\delta} C^2(U, R) \xrightarrow{\delta}$ είναι ένα διακριτό σύστημα και η ομοτοπία της $H^*(U, R)$ ονομάζεται Čech ομοτοπία των κατωτέρων U και αποτελεί καθαρά συνδυαστικό αντικείμενο.

Σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις είναι τοπικά σταθερές συναρτήσεις έτσι οι διαμετρικές της είναι δεν είναι ισομετρικές, επομένως καταρρίπτεται η αβία της γενικεύσης. Αποδείξεις Mayer-Vietoris για το complex $C^*(U, R)$

Θεώρημα

Αν το U είναι ένα καλό καύσιμο μιας πολλαπλότητας M , τότε η ομοτοπία de-Rham της M είναι ισομορφική στην ομοτοπία Čech των κατωτέρων καυμάτων

$$H_{DR}(M) \cong H(U, R)$$

ανακεφαλώνοντας έχουμε τη βασική απόδειξη

$$M \leftarrow U_0 \hookrightarrow U_{01} \hookrightarrow U_{012} \hookrightarrow \dots$$

η οποία αποδίδεται στο διαγράμμα

Διαφορική γεωμετρία
των μορμών

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \hookrightarrow$$

$$C^*(U, \Omega^*)$$

Ενσωματωτική
των καλύψεων

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ C^*(U, \mathbb{R}) \\ \uparrow \\ \mathbb{R} \end{array}$$

Στην αριστερή μεριά η διαφορική γεωμετρία των μορμών στο M και από κάτω η ενσωματωτική των καλύψεων $U = \{U_\alpha\}$. Στο ίδιο το διπλό complex βλέπουμε και τα δύο.

Αφού το complex είναι η γενικευμένη ακολουθία Mayer-Vietoris οι αυξανόμενες σειρές είναι ακριβείς για κάθε κάλυψη

Η R -homομολογία της M είναι πάντα ισομορφική στη homομολογία των διπλών συμπλέξεων:

$$H^*_{DR}(M) \cong H_0 \{C^*(U, \Omega^*)\}$$

αν επιπλέον το U είναι ένα καλό κάλυμμα τότε από το lemma Poincaré οι αυξανόμενες σειρές θα είναι ακριβείς.

Στην περίπτωση αυτή η Čech homομολογία του καλύμματος είναι επίσης ισομορφική στη homομολογία των διπλών συμπλέξεων

$$H^*(U, \mathbb{R}) \cong H_0 \{C^*(U, \Omega^*)\}$$

Ός εκ τούτων υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των de Rham's και του Čech.

Το αποτέλεσμα αυτό μας εφοδιάζει με έναν τρόπο υπολογισμού της homομολογίας de Rham με όρους ενσωματωτικής. Όπως γνωρίζουμε κάθε πολλαπλότητα έχει ένα καλό κάλυμμα. Και στα 3 σύμπλοκα μπορούν να δοθούν series γνωστών και τότε οι ισομορφισμοί μεταξύ τους θα είναι ισομορφισμοί αλγεβρών.

Δε φαίνεται να υπάρχει λόγος, γιατί, διαφορετικά
κομμάτια της M θα πρέπει να έχουν την ίδια
ομοτοπία $\check{C}hes$.

Όσοδο έχουμε τα ακόλουθα περίγραμμα

Πρόβλημα:

Η ομοτοπία $\check{C}hes$ $H^*(U, \mathbb{R})$ είναι η ίδια για όλα τα κομμάτια
κομμάτια U της M .

- Αν μια πομπιλοτότητα είναι συμπαγής, τότε έχει πεπερασμένο
καθό κομμάτια. Για ένα τέτοιο κομμάτια η ομοτοπία $\check{C}hes$
 $H^*(U, \mathbb{R})$ είναι πεπερασμένο διάστημα.

Πρόβλημα:

Η ομοτοπία de Rham $H^*_{DR}(M)$ μιας συμπαγούς πομπιλοτό-
τητας είναι πεπερασμένο διάστημα.

Πρόβλημα:

Όταν η M έχει ένα πεπερασμένο καθό κομμάτια η ομοτο-
πία de Rham του, $H^*_{DR}(M)$ έχει πεπερασμένο διάστημα.