

## Θεωρία Ομοτοπίας

Θα συμβολίζουμε παρακάτω με  $I := [0, 1]$ ,  $I^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n \text{ φορές}}$ ,  
 $S^n := \partial B^{n+1}(0, 1)$  όπου  $B^{n+1}(0, 1)$  η μοναδιαία μπάλα του  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Ορισμός 1:

Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $f, g: X \rightarrow Y$  συνεχείς απεικονίσεις.  
Αυτές θα λέγονται ομοτοπικές εάν υπάρχει  $F: X \times I \rightarrow Y$  συνεχής απεικόνιση ώστε:  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

Τότε λέμε ότι  $F$  είναι μια ομοτοπία που ενώνει τις  $f$  και  $g$ , και γράφουμε  $f \simeq g$ .

### Παρατήρηση:

Η σχέση " $\simeq$ " είναι σχέση ισοδυναμίας.

- Προφανώς  $f \simeq f$  μέσω της  $F(x, t) = f(x) \forall t \in I$ .
- Αν  $f \simeq g$  και  $F$  η αντίστοιχη ομοτοπία τότε αν  $G(x, t) = F(x, 1-t)$  παρατηρούμε ότι  $G$  συνεχής,  $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ , και  $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x) \forall x \in X$ .
- Αν  $f \simeq g$  και  $g \simeq h$  με αντίστοιχες ομοτοπίες  $F, G$  τότε η ομοτοπία: 
$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
 ενώνει την  $f$  με την  $h$ .

### Ορισμός 2:

Μια απεικόνιση  $f: X \rightarrow Y$  μεταξύ τοπολογικών χώρων λέγεται ομοτοπικά ισοδυναμική αν υπάρχει  $g: Y \rightarrow X$  ώστε:

$g \circ f \simeq \text{id}_X$  και  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ , όπου  $\text{id}_X, \text{id}_Y$  οι ταυτοτικές απεικονίσεις στους χώρους  $X, Y$  αντίστοιχα.

Παρατήρηση:

Η ομοτοπική ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορίσμος 3:

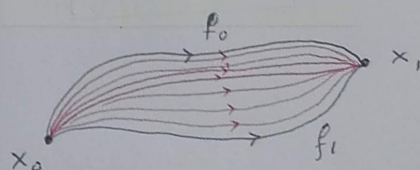
Ένα μονοπάτι στον  $X$  είναι μια συνεχής απεικόνιση  $f: I \rightarrow X$ .

Μια ομοτοπία μονοπατιών είναι μια οικογένεια  $f_t: I \rightarrow X$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  
ώστε  $f_t(0) = x_0$ ,  $f_t(1) = x_1$ ,  $\forall t \in I$  και επιπλέον η απεικόνιση

$F: I \times I \rightarrow X$ ,  $F(s, t) = f_t(s)$  να είναι συνεχής. Για τα μονοπάτια

$f_0$  και  $f_1$  λέμε ότι είναι ομοτοπικά και γράφουμε πάλι  $f_0 \simeq f_1$ .

Φυσικά όλα τα  $f_t, f_{t'}$  θα είναι  
ομοτοπικά μεταξύ τους. Επίσης  
βλέπουμε ότι ο ορίσμος 3 είναι  
ειδική περίπτωση του ορίσμου 1 όπου  
απαιτούμε επιπλέον να σταθεροποιούνται  
τα άκρα.



Παρατήρηση:

Η σχέση ομοτοπίας μονοπατιών με σταθερά άκρα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Μπορούμε να ορίσουμε μια σύνθεση για δύο μονοπάτια  $f, g$  όταν

$$f(1) = g(0) \text{ ως: } (f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Δηλαδή "τρέχουμε" πρώτα το  $f$  με την διπλάσια ταχύτητα και  
έπειτα το  $g$  με την διπλάσια ταχύτητα.

Αυτή η πράξη είναι καλά ορισμένη στο σύνολο των κλάσεων  
ισοδύναμων ομοτοπικά μονοπατιών, αφού αν  $f_0 \simeq f_1$  και  $g_0 \simeq g_1$   
μέσω των ομοτοπιών  $f_t, g_t$  αντίστοιχα, τότε  $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$  μέσω της  $f_t \cdot g_t$ .



Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα κλειστά μονοπάτια, δηλαδή τα  $f: I \rightarrow X$  για τα οποία ισχύει  $f(0) = f(1) = x_0 \in X$ . Αυτά λέγονται βρόχοι (loops) και το  $x_0$  λέγεται βάση (base point).

#### Ορισμός 4:

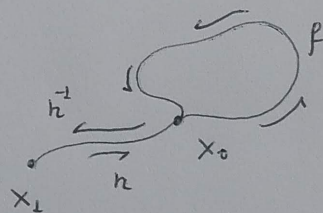
Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των βρόχων στο  $X$  με βάση  $x_0$  συμβολίζεται με  $\pi_1(X, x_0)$ . Το σύνολο αυτό λέγεται θεμελιώδης ομάδα του  $X$  στο  $x_0$ , και είναι ομάδα ως προς την σύνθεση που ορίσαμε. Το ουδέτερο στοιχείο είναι το σταθερό μονοπάτι:

$e: I \rightarrow X$ ,  $e(s) = x_0 \forall s \in I$ . Το αντίστροφο ενός μονοπατιού  $f$  είναι το  $\bar{f}: I \rightarrow X$ ,  $\bar{f}(s) = f(1-s)$ .

Το επόμενο που μας αναγκάζει είναι το κατά πόσο η θεμελιώδης ομάδα εξαρτάται από την επιλογή βάσης για τους βρόχους.

Αν ο χώρος  $X$  είναι κατά τόξα συνεκτικός,

τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα μονοπάτι  $h: I \rightarrow X$  από το  $x_1$  στο  $x_0$ . Τότε αν  $f$  είναι βρόχος στο  $x_0$ , η  $\bar{h} \cdot f \cdot h$  θα είναι βρόχος στο  $x_1$ . Αυτά μας οδηγούν στην παρακάτω πρόταση:



#### Πρόταση:

Με τα παραπάνω δεδομένα, αν ορίσουμε  $\theta_h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  με:  $\theta_h([f]) = [\bar{h} \cdot f \cdot h]$ , τότε αυτή η απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

### Απόδειξη:

Η  $\theta_h$  είναι καλά ορισμένη καθώς δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπου της κλάσης  $f$ , αφού αν  $f_t$  ομοτοπία που συνδέει τις  $f$  και  $g$  τότε η  $h^{-1} f_t h$  είναι ομοτοπία που συνδέει τις  $h^{-1} f h$  και  $h^{-1} g h$ .

Επίσης η  $\theta_h$  είναι ομομορφισμός. Πράγματι, αν  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$  τότε

$$\theta_h([f \cdot g]) = [h^{-1} f g h] = [h^{-1} f h h^{-1} g h] = [h^{-1} f h] [h^{-1} g h] = \theta_h([f]) \theta_h([g]).$$

Τέλος, η αντίστροφη της  $\theta_h$  δίνεται από τον τύπο:  $\theta_h^{-1} = \theta_h^{-1}$ .

Έπεται λοιπόν ότι αν ο  $X$  είναι κατωτόσα συνεκτικός η θεμελιώδης ομάδα είναι ανεξάρτητη από το  $x_0$ , οπότε μπορούμε να γράψουμε  $\pi_1(X)$ .

### Ορισμός 5:

Ο χώρος  $X$  λέγεται απλά συνεκτικός αν η θεμελιώδης ομάδα είναι τετρίμνη.

Η θεμελιώδης ομάδα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν εργαλείο για να αποδειχθούν διάφορα θεωρήματα, όπως το Θεμελιώδες Θέωρημα της Άλγεβρας, ή το Θέωρημα σταθερού σημείου του Brouwer [Κάθε συνεχής  $f: B_2(0,1) \rightarrow B_2(0,1)$  έχει σταθερό σημείο].

Επιπλέον έχει και μια άλλη βασική λειτουργία η οποία στηρίζεται στο παρακάτω Θέωρημα, το οποίο θα διατυπωθεί στην συνέχεια σε γενικότερο πλαίσιο.

### Θέωρημα:

Έστω  $f: X \rightarrow Y$  ομοτοπική ισοδυναμία (ειδικά ομομορφισμός). Τότε επάγεται απεικόνιση  $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$  η οποία είναι ομομορφισμός ομάδων.



Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι αν δύο χώροι δεν έχουν ίδιες θεμελιώδεις ομάδες, δεν μπορούν να είναι ομοιομορφικά ισοδύναμοι, πόσο μάλλον ομοιομορφικοί.

Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, για να δείξει κανείς ότι ο τόπος  $T^2$  δεν είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα  $S^2$  αφού, όπως αποδεικνύεται,  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , ενώ  $\pi_1(S^2) = 0$ .

Ο βτόβο η θεμελιώδης ομάδα αδυνατεί να διακρίνει πολλούς χώρους μεταξύ τους οι οποίοι δεν είναι ομοιομορφικοί. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι ότι  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$  και ότι  $\pi_1(S^n) = 0 \ \forall n \geq 2$ .

Το οποίο σημαίνει ότι δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν είναι ομοιομορφικοί οι χώροι μεταξύ τους μέσω της θεμελιώδους ομάδας.

Η παραπάνω αδυναμία έγκειται στο γεγονός ότι οι βρόχοι είναι απικάμενα χαμηλής διάστασης, και σε χώρους μεγάλων διαστάσεων έχουν "χώρο" να κλείσουν και να "παρακάμψουν" τις τρύπες του χώρου. Αυτό μας οδηγεί να ορίσουμε ομοιομορφικές "μεγαλύτερης τάξης" ώστε να αποκτήσουμε ισχυρότερα εργαλεία για την μελέτη της τοπολογίας ενός χώρου.

Θεωρούμε τον κύβο  $I^n$ . Το σύνορό του,  $\partial I^n$  είναι τα σημεία του κύβου  $S = (S_1, \dots, S_n)$  όπου τουλάχιστον ένα από τα  $S_i$  είναι 0 ή 1.

Τον ρόλο των βρόχων στις πολλές διαστάσεις τον παίρνουν συνεχείς απεικονίσεις  $f: I^n \rightarrow X$  όπου  $f(\partial I^n) = x_0$ .

Θα συμβολίζουμε  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ .

Μια ομοτοπία μεταξύ δύο τέτοιων  $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  είναι μια συνεχής απεικόνιση  $H: I^n \times I \rightarrow X$  με:

$$H(s, 0) = f(s), \quad \forall s \in I^n$$

$$H(s, 1) = g(s), \quad \forall s \in I^n$$

$$H(\partial I^n, t) = x_0 \quad \forall t \in I.$$

### Ορισμός 6:

Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος και  $x_0 \in X$ . Το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας απεικονίσεων  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  θα συμβολίζεται  $\pi_n(X, x_0)$ .

Αυτός ο ορισμός έχει νόημα και για  $n=0$  θεωρίας  $I^0$  να είναι ένα σημείο, οπότε το  $\pi_0(X, x_0)$  θα είναι το σύνολο των κατά τόξα συνεκτικών συνιστωδών του  $X$ .

Για  $n \geq 2$  ορίζουμε μια πράξη σύνδεσης στις  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  που γενικεύει την περίπτωση των βρόχων.



### Ορισμός 7:

Για  $f, g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  ορίζουμε:

$$(f+g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1-1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Αυτό μπορεί να δεικνύεται με τον προφανή τρόπο και στις κλάσεις ομοτοπίας. Αφού μόνο η πρώτη συντεταγμένη  $s_1$  εμπελάκεται στην σύνθεση, με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως στους βράχους δείχνουμε ότι η  $\pi_n(X, x_0)$  αποκτά την δομή ομάδας. Το ουδέτερο στοιχείο της  $\pi_n(X, x_0)$  είναι η σταθερή απεικόνιση (η κλάση της δηλαδή)

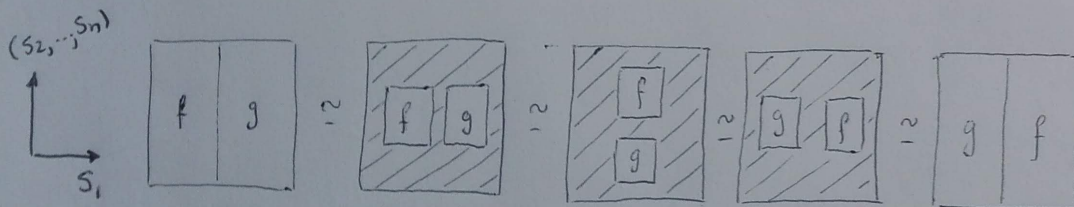
$$f: I^n \rightarrow X, \quad f(s) = x_0 \quad \forall s \in I^n.$$

Η αντιστροφή μιας  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  είναι η  $-f(s) = f(1-s_1, s_2, \dots, s_n)$ .

Ο προσθετικός ευρωβαρισμός δικαιολογείται από το γεγονός ότι για  $n \geq 2$

η  $\pi_n(X, x_0)$  είναι αβελιανή ομάδα. Δηλαδή  $f+g \simeq g+f$ .

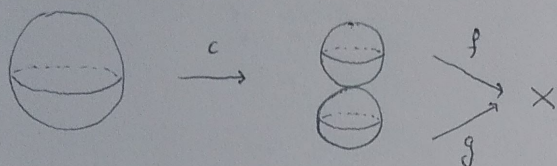
Η ομοτοπία που συνδέει αυτές τις δύο απεικονίσεις θα είναι ουσιαστικά μια αλλαγή παραμέτρου που θα επιτρέψει να "τρέξει" πρώτα η  $g$  και μετά η  $f$ . Αυτό φαίνεται από το επόμενο σχήμα:



Μικραίνοντας τα πεδία ορισμού των  $f, g$  σε δύο μικρότερους κύβους εντός του  $I^n$ , οι οποίοι θα μένουν ξενοί καθ' όλη την διάρκεια, μπορούμε να τους αντιστρέψουμε την σειρά συνδιασμού. Η διαχρονισμένη περιοχή θα απεικονίζεται μέσω της ομοτοπίας στο  $x_0$ , μαζί με το σύνθετο.



Ένας ισοδύναμος τρόπος να αντιληφθούμε απεικονίσεις  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  είναι σαν απεικονίσεις από την  $I^n / \partial I^n = S^n$ , στο  $X$ , που απεικονίζουν το  $\partial I^n / \partial I^n = S_0$  στο  $x_0$ . Η πρόθεση σε αυτήν την περίπτωση αναπαρίσταται από το εξής διάγραμμα:



Ταυτίζουμε τον  $(n-1)$  σφαιρικό  $S^{n-1}$  ως  $S^n$  σε σημείο ενός του  $S^n / S^n$ , το οποίο χρησιμοποιείται σαν βάση.

Και στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων αν ο χώρος  $X$  είναι κατά τόξα εσωτερικός οι ομάδες ομοτοπίας δεν εξαρτώνται από την επιλογή σημείου  $x_0$ . Αν  $\gamma: I \rightarrow X$  μονοπάτι με  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$  μπορούμε, δοθέντας μιας απεικόνισης  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ , να θεωρήσουμε μια νέα απεικόνιση  $(\gamma f): (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  μετακινώντας το πεδίο ορισμού της  $f$  εντός του κύβου  $I^n$  και τοποθετώντας το μονοπάτι  $\gamma$  από το  $x_0$  στο  $x_1$  αυξάνοντας από την επιφάνεια του  $I_n$  προς την επιφάνεια του μικρότερου κύβου στο εσωτερικό. Αυτό γενικεύει την περίπτωση  $n=1$ .

Μερικές ιδιότητες αυτού του μετασχηματισμού είναι οι εξής:

- (1)  $\gamma(f+g) \simeq \gamma f + \gamma g$
- (2)  $\gamma(\eta f) \simeq \gamma(\eta f)$
- (3)  $1f \simeq f$

Η ομοτοπία που περιγράφει την πρώτη σχέση είναι η:

$$h_t(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \gamma(f+g)((2-t)s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(f+g)((2-t)s_1 + t-1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



όπου  $f+0$  είναι η απεικόνιση  $f$  αν την σταθεροποιήσουμε ίση με  $x_0$  στο δεξιά μέρος του  $I^n$ . Αντίστοιχα για την  $0+g$ .

Αν επομένως θεωρήσουμε απεικόνιση  $\beta_\gamma: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  με  $\beta_\gamma([f]) = \beta_\gamma([\gamma f])$  τότε η σχέση (1) δίνει ότι  $\beta_\gamma$  ομομορφισμός, ενώ οι σχέσεις (2), (3) δίνουν ότι  $\beta_\gamma$  ισομορφισμός με αντίστροφο  $\beta_\gamma^{-1}$  όπου  $\gamma^{-1}$  το αντίστροφο μονοπάτι της  $\gamma$ .

Μπορούμε επιπλέον να περιοριστούμε σε κλειστά μονοπάτια  $\gamma$  με βάση το  $x_0$ , και να θεωρήσουμε την απιστοιχία  $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$ . Τότε από το γεγονός ότι  $\beta_{\gamma\eta} = \beta_\gamma \beta_\eta$  έχουμε έναν ομομορφισμό από τον δακτύλιο  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$  στην ομάδα αυτομορφισμών  $\text{Aut}(\pi_n(X, x_0))$  το οποίο καθιστά την  $\pi_n(X, x_0)$  πρότυπο, με πράξη  $(\sum n_i \gamma_i) f = \sum n_i (\gamma_i f)$  όπου  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Εδώ κρατάμε τον προθετικό συμβολισμό και για τα στοιχεία του  $\pi_1$ . Ένας χώρος με τετράμην δράση της  $\pi_1$  στην  $\pi_n$  καλείται συχνά " $n$ -simple", και "simple" ή "abelian" αν αυτό ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Επιτρέφουμε τώρα σε κάποια πράγματα που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

Αν  $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  συνεχής απεικόνιση ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο μια απεικόνιση  $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  με:

$$\varphi_*([f]) = [\varphi f].$$

Είναι φανερό ότι η  $\varphi_*$  είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός. Αυτό καθιστά τον  $\pi_n$  συνάρτηση (συναλλοίωτο) αφού μπορούμε να δούμε ότι  $(\varphi\psi)_* = \varphi_* \psi_*$  και  $1_x = 1$ .



Επιπλέον αποδεικνύεται ότι αν  $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$  τότε  
επάγονται ισομορφισμοί μεταξύ των  $\pi_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

### Ορισμός 8:

Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος. Ένα covering space του  $X$  είναι  
ένας 2.χ.  $\tilde{X}$  μαζί με μια απεικόνιση  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  που ικανοποιεί το  
εξής: Υπάρχει μια ανοικτή κάλυψη  $\{U_\alpha\}$  του  $X$  ώστε για κάθε  $\alpha$   
το  $p^{-1}(U_\alpha)$  να είναι ένωση από ανοικτά σύνολα  $\{V_\beta\}$  και  
για κάθε  $\beta$  η  $p|_{V_\beta}: V_\beta \rightarrow U_\alpha$  να είναι ομομορφισμός.

### Πρόταση:

Αν  $(\tilde{X}, p)$  covering space του  $X$  τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός

$p_*: \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  είναι ισομορφισμός, για κάθε  $n \geq 2$ .

Η απόδειξη αυτού στηρίζεται στο ότι για  $n \geq 2$  η  $\mathbb{S}^n$ , η οποία  
όπως είδαμε μπορεί να θεωρηθεί σαν πεδίο ορισμού των "πολυδιάστατων  
βρόχων"  $f$ , είναι σύνολο αλλά συνεκτικό. Βάση αυτού επιτρέπεται  
να χρησιμοποιηθεί ένα λεγόμενο "lifting criterion" ώστε βρόχοι  
και ομοτοπίες στον  $X$  να "ανυψωθούν" στον  $\tilde{X}$  και από εκεί  
να απεικονιστούν μέσω της  $p_*$  στις αντίστοιχες κλάσεις.

Ειδικότερα αποδεικνύεται ότι όποτε ο  $X$  έχει ένα covering  
space το οποίο είναι αλλά συνεκτικό και συστατικό (δηλαδή  
ομοτοπικά με σημείο) τότε  $\pi_n(X, x_0) = 0 \quad \forall n \geq 2$ , αρκεί ο  $X$  να  
είναι συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.

Έτσι αποδεικνύεται ότι  $\pi_n(T^k) = 0 \quad \forall n \geq 2$ .



### Πρόταση:

Αν  $X_\alpha$  είναι αλθαιρέτη συλλογή από κατά τόξα συνεκτικούς χώρους τότε  $\pi_n(\prod_\alpha X_\alpha) \cong \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha)$

Αυτό συμβαίνει διότι αντιστοιχίας  $f: Y \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$  είναι το ίδιο με συλλογές  $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ . Επομένως οι "βρόχοι"  $f: I^n \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$  βρίσκονται σε αμοιότητα με  $(f_\alpha): I^n \rightarrow X_\alpha$  και οι ομοτοπίες  $H: I^n \times I \rightarrow \prod_\alpha X_\alpha$  είναι οι συλλογές  $(H_\alpha): I^n \times I \rightarrow X_\alpha$ .

Το επόμενο πράγμα που θα ορίσουμε είναι τα relative homotopy groups.

### Ορισμός 9:

Έστω χώρος  $X$ ,  $A \subseteq X$  και  $x_0 \in A$ . Θεωρούμε το  $I^{n-1}$  να είναι η πλευρά του  $I^n$  για την οποία η τελευταία συντεταγμένη μηδενίζεται. Δηλαδή  $I^{n-1} = \{s \in I^n: s_n = 0\}$ . Έστω  $J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}}$ . Δηλαδή οι υπόλοιπες πλευρές του κύβου. Ορίζουμε για  $n \geq 1$  το σύνολο  $\pi_n(X, A, x_0)$  ως το σύνολο των κλάσεων ομοτοπίας αντιστοιχίσεων  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , όπου οι ομοτοπίες είναι της ίδιας μορφής.

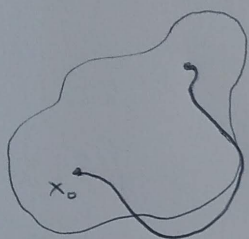
### Παρατήρηση:

Αν  $A = \{x_0\}$  τότε το  $\pi_n(X, A, x_0)$  συμπίπτει με το  $\pi_n(X, x_0)$  οπότε οι ομάδες ομοτοπίας είναι ειδική περίπτωση των relative homotopy groups.



Επιπλέον δεν φαίνεται να υπάρχει ικανοποιητικός τρόπος ορίσμου του  $\pi_0(X, A, x_0)$ , οπότε μένει αδριγτό.

Μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση στην  $\pi_n(X, A, x_0)$  με τον ίδιο τρόπο όπως στην  $\pi_n(X, x_0)$ , μόνο που επειδή η τελευταία συντεταγμένη  $S^n$  δεν είναι διαθέσιμη να την αξιοποιήσουμε στις πράξεις, η πρόσθεση ορίζεται για  $n \geq 2$ . Η  $\pi_1(X, A, x_0)$  δεν είναι δοινόν ομάδα. Επιπλέον η  $\pi_n(X, A, x_0)$  είναι αβελιανή για  $n \geq 3$ .



Η  $\pi_1(X, A, x_0)$  αποτελείται από μονοπάτια τα οποία ξεκινούν από το  $x_0 \in A$ , καταλήγουν όμως σε αυθαίρετο σημείο στο  $A$ . Άρα δεν μπορούν να συνδεθούν.

Ανάλογα με την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ των  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  και των  $\tilde{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  μπορούμε να θεωρήσουμε μια αντιστοιχία  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  εάν απεικονισθ  $\tilde{f}: (B_n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  καθώς η ταύτιση του  $J^{n-1}$  με σημείο  $s_0$  ελέγχει την ταύτιση του  $I^n$  με την  $B_n$  και το  $\partial I^n$  με την  $S^{n-1}$ .

Ένας τρόπος να αντιληφθούμε την μηδενική κλάση στον  $\pi_n(X, A, x_0)$  είναι με το εξής κριτήριο:

Μια  $f: (B_n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  είναι στην μηδενική κλάση του  $\pi_n(X, A, x_0)$  αν και μόνο αν είναι ομοτοπική ( $rel S^{n-1}$ ) με μια απεικόνιση  $g$  της οποίας η εικόνα περιέχεται στο  $A$ ,



### Απόδειξη:

Αφείας αν υπάρχει ισότητα  $[f] = [g]$  στο  $\pi_n(X, A, x_0)$ , και με την σειρά της η  $[g] = 0$  μέσω σύνδεσης με μια συζωτή παραμόρφωσης\* που στελνεί την  $B_n$  στο  $S_0$ .

[\* Συζωτή παραμόρφωσης του  $X$  στο  $A \subseteq X$  είναι μια συνεχής  $F: X \times I \rightarrow X$  με  $F(x, 0) = x \ \forall x \in X$ ,  $F(x, 1) \in A \ \forall x \in X$ ,  $F(\alpha, t) = \alpha \ \forall t \in I$ .

Αντίστροφα, αν  $[f] = 0$  μέσω μιας ομοτοπίας  $F: B_n \times I \rightarrow X$  τότε περιγράφοντας την  $F$  σε μια οικογένεια μπάδων εντός του  $B_n \times I$ , ξεκινώντας από την  $B_n \times 0$  και τελειώνοντας στην  $B_n \times 1 \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \times I$  όπου όλες οι μπάδες θα έχουν το ίδιο εύρος, θα πάρουμε μια ομοτοπία από την  $f$  σε μια απεικόνιση με εικόνα στο  $A$ , σταθερή στο  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Μια απεικόνιση  $\varphi: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  ενάγει ομομορφισμούς  $\varphi_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  για κάθε  $n \geq 2$  με τις αναλογίες ιδιότητες όπως στην κλασική περίπτωση.

Το βασικό χαρακτηριστικό των relative homotopy groups είναι ότι βρίσκονται σε μια αμείβη ακολουθία:

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

όπου  $i$  και  $j$  είναι οι εμφυτεύσεις:  $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  και  $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  αντίστοιχα.

Η απεικόνιση  $\partial$  που λέγεται απεικόνιση ορίου (boundary map)

προκύπτει περιγράφοντας απεικονίσεις  $(I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  στο

$I^{n-1}$  ή ισοδύναμα περιγράφοντας απεικονίσεις  $(B_n, \mathbb{S}^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  στο  $\mathbb{S}^n$ .

Η  $\partial$  είναι ομομορφισμός για  $n \geq 2$ .



Για την απόδειξη αυτού θα κάνουμε κάτι λίγο γενικότερο θεωρώτας  
 $x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$  και την ακολουθία:

$$\rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0)$$

οπότε θέτωντας  $B = \{x_0\}$  προκύπτει το προηγούμενο.

Ακριβώς στο  $\pi_n(X, B, x_0)$ :

Αρχικά, η σύνθεση  $j_* i_*$  είναι μηδενική αφού για μια απεικόνιση  
 $(I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$  είναι φανερό ότι η εικόνα της περιέχεται  
στο  $A$ , οπότε έπεται από το προηγούμενο κριτήριο. Αν από την  
άλλη μια απεικόνιση  $f: (I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  είναι στην μηδενική  
εικόνα του  $\pi_n(X, A, x_0)$  τότε αυτή είναι ομοτοπική  $\text{rel } \partial I^{n-1}$  με μία  
 $g$  που έχει εικόνα στο  $A$ . Άρα η  $f$  είναι στην εικόνα του  $i_*$ .

Ακριβώς στο  $\pi_n(X, A, x_0)$ :

Η σύνθεση  $\partial j_*$  είναι μηδενική διότι για μια  $f: (I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$   
αν την περιορίσουμε στο  $I^{n-1}$  τότε η εικόνα της θα είναι στο  $B$ .  
Άρα θα είναι μηδενική στο  $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$ .

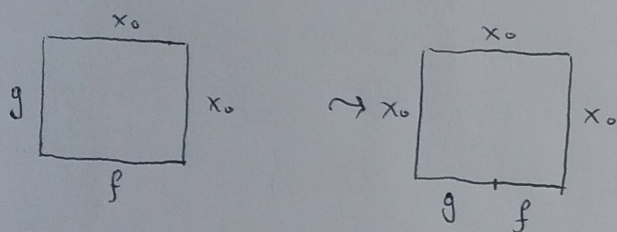
Αν αντίστροφα για μια  $f: (I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  έχουμε ότι  
ο περιορισμός της στο  $I^{n-1}$  είναι μηδενικός, τότε υπάρχει ομοτοπία  
 $F: I^{n-1} \times I \rightarrow A \text{ rel } \partial I^{n-1}$  που την συνδέει με μια απεικόνιση με εικόνα στο  $B$ .

Μπορούμε να φτιάξουμε έτσι μια νέα απεικόνιση συνεχόμενότητας της  
 $f, F$  της μορφής  $(I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ , η οποία εάν απεικόνιση  
 $(I^n, \partial I^n, j^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  θα είναι ομοτοπική με την  $f$  και άρα  
η  $f$  θα είναι στην εικόνα του  $j_*$ .



Ακριβώς στο  $\pi_n(A, B, x_0)$ :

Η σύνθεση  $\iota_* \partial$  είναι μηδενική αφού για μια  $f: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  στον  $I^n$  θα είναι μια απεικόνιση με εικόνα στο  $A$ , όμως αφού το  $J^n$  απεικονίζεται στο  $x_0$  η  $f$  θα είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση. Για το αντίστροφο, αν  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$  η οποία είναι στον πυρήνα του  $\iota_*$ , δηλαδή είναι η μηδενική στον  $\pi_n(X, B, x_0)$ , τότε θεωρούμε μια ομοτοπία  $F, f \simeq 1: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ . και έστω  $g$  ο περιορισμός της  $F$  στο  $I^{n-1} \times I$ . Σχηματικά:



Κάνοντας μια αλλαγή παραμέτρου των τελευταίων  $n$ , η  $n$ -επιτεταγμένη μπορούμε να πετύχουμε να είναι και η  $g$  στην εικόνα του  $\partial$ . Αυτό ωστόσο θα αλλαχθεί αν αυτή η νέα απεικόνιση θα είναι στην ίδια κλάση με την  $f$  στο  $\pi_n(A, B, x_0)$ .

Παράδειγμα:

Έστω  $X$  κατά τόξα συνεκτικός και  $CX$  ο χώρος πηλίκου που προκύπτει αν πάρουμε τον "κύλινδρο"  $X \times I$  και ταυτίσουμε το  $X \times \{0\}$  με ένα σημείο του χώρου. Τότε ο  $X$  μπορεί να θεωρηθεί σαν υπόχωρος του  $CX$ , ονομαζοντας  $X := X \times \{1\}$ . Ο  $CX$  είναι ευδιάττος οπότε η ακερής ακολουθία για το ζεύγος  $(CX, X)$ . Επίσης ισχυρίζομαι  $\pi_n(CX, X, x_0) \cong \pi_{n-1}(X, x_0) \forall n \geq 1$ .

Αν τώρα έχουμε ότι  $\pi_1(X) \cong G$  τότε  $\pi_2(CX, X, x_0) \cong G$ , οπότε η  $\pi_2$  ομάδα μπορεί να θεωρηθεί σαν  $\pi_2$  ομάδα ενός κατάλληλου τοπολογικού χώρου.

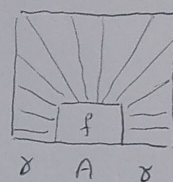


Επίσης να σημειώσουμε ότι η αριθμική απόσταση είναι φυσική (natural), αφού μια απεικόνιση  $(X, A, B, x_0) \rightarrow (Y, C, D, y_0)$  ελέγχει απεικονίσεις μεταξύ των αποστάσεων που κάνουν κάθε τετράγωνο μινωτικό.

Όπως στην περίπτωση των ανώτερων ομάδων ομοτοπίας, έτσι και στα relative homotopy groups, αν  $\gamma$  είναι μονοπάτι στο  $A$ , από το  $x_0$  στο  $x_1$ , υπάρχει μια απεικόνιση:

$$\beta_\gamma: \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

με  $\beta_\gamma([f]) = [\gamma f]$ , όπως στο σχήμα:



Έτσι μπορεί να δείξει ότι αν ο  $A$  είναι κατά τόξα συνεκτικός, η  $\pi_n(X, A, x_0)$  είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου βάσης.

Αν περιοριστούμε σε μονοπάτια κλειστά, τότε ανάλογα, η απεικόνιση  $\gamma \mapsto \beta_\gamma$  ορίζει μια δράση της  $\pi_1(A, x_0)$  στην  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

Μάλιστα η  $\pi_1(A, x_0)$  δρα σε όλη την αριθμική απόσταση με τον φυσικό τρόπο.

### Ορίσμος 10:

Για χώρο  $X$  με βάση  $x_0$ , λέμε ότι είναι  $n$ -connected αν  $\pi_i(X, x_0) = 0 \quad \forall i \leq n$ .

Αρα 0-connected σημαίνει κατά τόξα συνεκτικός

1-connected σημαίνει ολόκληρα συνεκτικός.



Ενδιαφέρον αφού  $n$ -connectedness σημαίνει πάντα και  $0$ -connectedness έπειτα ουδ έχω σημασία η επιλογή της βάσης  $x_0$ .

Η έννοια αυτές μπορούν να διατυπωθούν χωρίς την χρήση του σημείου βάσης  $x_0$ , χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των εξής προτάσεων:

- (1) Κάθε απεικόνιση  $S^i \rightarrow X$  είναι ομοτοπική με μια σταθερή.
- (2) Κάθε απεικόνιση  $S^i \rightarrow X$  επεκτείνεται σε απεικόνιση  $B_{n+1} \rightarrow X$
- (3)  $\pi_i(X, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in X$ .

Αντίστοιχα για τα relative homotopy groups έχουμε τις ισοδυναμίες για  $i > 0$ :

- (1) Κάθε απεικόνιση  $(B_i, \partial B_i) \rightarrow (X, A)$  είναι ομοτοπική rel  $\partial B_i$  με απεικόνιση  $B_i \rightarrow A$ .
- (2) Κάθε απεικόνιση  $(B_i, \partial B_i) \rightarrow (X, A)$  είναι ομοτοπική με απεικόνιση  $B_i \rightarrow A$  μέσω τέτοιων απεικονίσεων.
- (3) Κάθε απεικόνιση  $(B_i, \partial B_i) \rightarrow (X, A)$  είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση  $B_i \rightarrow A$  μέσω τέτοιων απεικονίσεων.
- (4)  $\pi_i(X, A, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in A$ .

Θα λέμε τον  $(X, A)$   $n$ -connected αν τα (1)-(4) ισχύουν  $\forall i \geq n$  και τα (1)-(3) ισχύουν για  $i = 0$ .

(Αντί δίδει για  $i = 0$  τα (1)-(3) είναι ισοδύναμα με το ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του  $X$  τέμνει το  $A$ .)