Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Τυχαίες Μεταβλητές και Ανεξαρτησία

3.1 Τυχαία Μεταβλητή

Όταν μελετάμε ένα τυχαίο πείραμα, δηλ. έναν μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, συνήθως το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε κάποιο αριθμητικό χαρακτηριστικό, έστω $X(\omega)$, του δειγματικού σημείου $\omega \in \Omega$, που θα εξαχθεί από τον δειγματικό χώρο Ω μετά την εκτέλεση του πειράματος, και όχι σε αυτό-καθεαυτό το στοιχειώδες ενδεχόμενο ω. Έτσι, είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε κάποια συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ή $X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, μερικές φορές, με τιμή $X(\omega)$ στο $\omega \in \Omega$.

Για παράδειγμα, εάν ο δειγματικός χώρος Ω περιέχει όλους τους λαμπτήρες που παρήχθησαν από ένα εργοστάσιο, και κάποιος πρόκειται να αγοράσει έναν λαμπτήρα (στην τύχη), τότε το ενδιαφέρον του αγοραστή θα επικεντρωνόταν στην συνάρτηση

$$X(\omega) = \text{διάρκεια ζωής του λαμπτήρα } \omega \quad (\text{σε sec}),$$

η οποία είναι καλά ορισμένη για κάθε $\omega \in \Omega$ (αρκεί να πάρει κανείς όλους τους λαμπτήρες του Ω και να τους αφήσει να λειτουργήσουν μέχρι να καούν!). Ακόμα και τώρα που η συνάρτηση X θεωρείται γνωστή, ο αγοραστής **δεν γνωρίζει** ποιον λαμπτήρα $\omega \in \Omega$ θα αγοράσει, και συνεπώς δεν γνωρίζει την διάρκεια ζωής του. Τον ενδιαφέρει, λοιπόν, η πιθανότητα του ενδεχομένου της μορφής $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\}$, που παριστάνει το «δυσάρεστο» αποτέλεσμα να καεί ο λαμπτήρας πριν λειτουργήσει περισσότερο από b sec, $b \in \mathbb{R}$, και όχι ποιον λαμπτήρα θα διαλέξει.

Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής: Είναι το $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\}$ ενδεχόμενο; Είναι σαφές ότι αν αυτό δεν είναι ενδεχόμενο, τότε δεν θα έχει νόημα η $\mathbb{P}[X(\omega) \leq b]$, δηλ. η $\mathbb{P}(A)$ όπου $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\}$. Επομένως, η μελέτη μας θα πρέπει να περιοριστεί σε εκείνες τις συναρτήσεις X, για τις οποίες η παραπάνω πιθανότητα έχει νόημα – είναι καλά ορισμένη. Αυτό, δυστυχώς, **δεν συμβαίνει για όλες** τις συναρτήσεις $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, όπως δείχνει το επόμενο απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1 Έστω $\Omega = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$ οι έδρες ενός ζαριού (κύβου), για το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι «δίκαιο» όσον αφορά τα εξής υποσύνολα (ενδεχόμενα) εδρών:

$$\mathbb{P}\left(\{\quad,\quad,\quad\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\quad,\quad,\quad\}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

[Τίποτε άλλο δεν γνωρίζουμε για το ζάρι.] Η σ-άλγεβρα που περιέχει όλη την πληροφορία για το πείραμα αυτό είναι η

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{\quad,\quad,\quad\}, \{\quad,\quad,\quad\}, \Omega\},$$

και ο χώρος $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, όπου το μέτρο πιθανότητας, $\mathbb{P}$, ορίζεται από την (3.1) και, φυσικά, τις σχέσεις $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, είναι χώρος πιθανότητας. Ορίζοντας όμως την συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$X(\quad) = 1,\ X(\quad) = 2,\ X(\quad) = 3,\ X(\quad) = 4,\ X(\quad) = 5,\ X(\quad) = 6,$$

παρατηρούμε ότι το[1]

$$A = \{\omega : X(\omega) \le 2\} = \{\quad,\quad\}$$

δεν είναι ενδεχόμενο (δηλ. $A \notin \mathcal{A}$), και συνεπώς, κανείς δεν μπορεί να μιλήσει για την $\mathbb{P}(A)$. Αυτό συνέβη διότι η παραπάνω συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ δεν ικανοποιεί την βασική υπόθεση **μετρησιμότητας**, που θα περιγράψουμε στην συνέχεια. □

Η επιλογή των συμβόλων

$$\quad,\quad,\quad,\quad,\quad,\quad$$

[1] Παρατηρήστε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό b με $1 \le b < 6$, το $\{\omega : X(\omega) \le b\}$ δεν είναι ενδεχόμενο.

έγινε σκόπιμα στο παραπάνω παράδειγμα, για να μας τονίσει το γεγονός ότι ορίζοντας μία συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, και μελετώντας αποκλειστικά τις τιμές της X, και όχι του Ω, απλοποιούμε ουσιαστικά τον δειγματικό χώρο, που, κάποιες φορές, είναι **ιδιαίτερα** περίπλοκος, απεικονίζοντάς τον στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Έτσι, καταλήγουμε φυσιολογικά στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.2 (τυχαία μεταβλητή) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας (ή, γενικότερα, $(\Omega, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος), και $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση. Τότε η X θα καλείται **τυχαία μεταβλητή**[2] (τ.μ.), όταν ισχύει ότι

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Ο ορισμός αυτός, στην ουσία, απαιτεί η X να είναι αρκετά «ομαλή», ώστε να μην παρουσιάζει τον προβληματικό χαρακτήρα που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Αυτό, βέβαια, εξαρτάται από το πώς ορίζεται η X, αλλά και από το πόσο πλούσια είναι η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, τότε **όλες οι συναρτήσεις** $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ., αυτό όμως δεν είναι εφικτό να το έχουμε πάντα, διότι, π.χ., το μέτρο Lebesgue δεν μπορεί να «μετρήσει» όλα τα υποσύνολα του $(0, 1)$ – βλ. Κεφ. ;;.

[2] random variable (r.v.)

Αν συμβολίσουμε με $X^{-1}(B)$ την αντίστροφη εικόνα του υποσυνόλου B των πραγματικών αριθμών μέσω της X, δηλ.

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\},$$

τότε ο ορισμός της τ.μ. γράφεται ισοδύναμα ως

$$X^{-1}\left((-\infty, b]\right) \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Αν τώρα, για τυχούσα οικογένεια, $\mathfrak{D}$, υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, θέσουμε

$$X^{-1}(\mathfrak{D}) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathfrak{D}\},$$

δηλ. η $X^{-1}(\mathfrak{D})$ παριστάνει την **αντίστροφη εικόνα** της οικογένειας $\mathfrak{D}$ μέσω της X (όπου, φυσικά, η $X^{-1}(\mathfrak{D})$ είναι επίσης οικογένεια μέσα στον $\mathcal{P}(\Omega)$), τότε ο ορισμός της τ.μ. γράφεται ισοδύναμα ως

$$X^{-1}(\mathfrak{D}_1) \subset \mathcal{A},$$

όπου $\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, b],\ b \in \mathbb{R}\}$ είναι η «οικογένεια των δεξιά κλειστών ημιευθειών».

Είναι χαρακτηριστικό των σύγχρονων μαθηματικών να ενδιαφέρονται περισσότερο για το πώς απεικονίζονται ολόκληρα σύνολα ή οικογένειες συνόλων, παρά για το πώς απεικονίζονται μεμονωμένες τιμές από μία συνάρτηση X. Έτσι, οι παραπάνω ορισμοί είναι, μερικές φορές, πιο διαδεδομένοι. Η αλήθεια είναι ότι είναι και πιο εύχρηστοι, όπως θα φανεί αργότερα στις αποδείξεις.

Δίνουμε τώρα την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3 Η X είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A})$ όταν και μόνο όταν

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

[Δηλ. $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}$.]

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα Borel στον $\mathbb{R}$ (που παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ – Ορισμός ;;). Ας υποθέσουμε πρώτα ότι

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Αφού κάθε σύνολο B της μορφής $B = (-\infty, b]$ είναι, προφανώς, Borel, η προηγούμενη σχέση συνεπάγεται ότι $X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$, δηλ. η X είναι τ.μ.

Υποθέτουμε τώρα ότι η X είναι τ.μ. και, ακολουθώντας την κλασική τεχνική απόδειξης (βλ. §2.3 του Κεφ. ;;), θεωρούμε την οικογένεια των «καλών συνόλων»

$$\mathcal{B} = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Αφού η X είναι τ.μ., έπεται ότι $(-\infty, b] \in \mathcal{B}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$, δηλ. $\mathfrak{D}_1 \subset \mathcal{B}$, όπου

$$\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, x], \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Όμως η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}$, αφού:

(i) $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$ (διότι $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A}$).

(ii) Αν $B \in \mathcal{B}$ τότε $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, που σημαίνει ότι $X^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \left(X^{-1}(B)\right)^c \in \mathcal{A}$, και συνεπώς $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{B}$.

(iii) Αν $\{B_n,\ n \geq 1\}$ είναι τυχούσα ακολουθία της $\mathcal{B}$, τότε η $\{X^{-1}(B_n),\ n \geq 1\}$ είναι ακολουθία της $\mathcal{A}$, και

$$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X^{-1}(B_n)\right) \in \mathcal{A},$$

δηλ. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Τώρα $\mathfrak{D}_1 \subset \mathcal{B}$ και η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, που σημαίνει ότι (Πρόταση ;; για τον $\mathbb{R}$ αντί του $(0,1)$ - βλ. Άσκηση ;;.10)

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathfrak{D}_1) \subset \mathcal{B},$$

και συνεπώς, αφού $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έπεται ότι

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

δηλ. το ζητούμενο. $\square$

Δίνουμε τώρα τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.4 (μετρήσιμη απεικόνιση (συνάρτηση)) Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A})$ και $(\Omega_2, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι, και $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ τυχούσα απεικόνιση (συνάρτηση). Η f θα λέγεται $\mathcal{A}/\mathcal{B}$–μετρήσιμη (ή απλά $\mathcal{A}$–μετρήσιμη όταν το $\mathcal{B}$ εννοείται, ή απλούστερα **μετρήσιμη**

όταν τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ εννοούνται) όταν

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B},$$

δηλ. όταν $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, και λόγω της Πρότασης 3.3, η συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ. όταν και μόνο όταν είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$–μετρήσιμη. [Δηλ. όταν είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη, αφού η Borel σ-άλγεβρα εννοείται.]

Στα μαθηματικά, η πιο ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση μετρήσιμης συνάρτησης είναι η **Borel μετρήσιμη** συνάρτηση (ή, απλά, **Borel** συνάρτηση), $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s$, που εξ' ορισμού σημαίνει ότι η f είναι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$–μετρήσιμη. Εδώ εννοούνται οι σ-άλγεβρες $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$, αφού καθορίζονται από τις τιμές των k και s, που είναι γνωστές από το γεγονός ότι η f είναι συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^k$ στον $\mathbb{R}^s$.

Οι Borel συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s$ είναι πολύ χρήσιμες, τόσο στη θεωρία μέτρου, όσο και στη θεωρία πιθανοτήτων. Το ενδιαφέρον παρουσιάζεται από το γεγονός ότι περιέχουν όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s$, αλλά και από την σημαντικότατη ιδιότητα ότι αν η ακολουθία $\{f_n,\ n \geq 1\}$ είναι ακολουθία Borel συναρτήσεων, τότε η συνάρτηση (το κατά σημείο όριο των f_n)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

είναι Borel. [Μία ιδιότητα που δεν την έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις.] Άρα, η κλάση των Borel συναρτήσεων είναι πλουσιότατη και με καλές ιδιότητες. Αυτές οι ιδιότητες θα αποδειχθούν στην συνέχεια (βλ. Πρόταση 3.5 και Πρόταση 3.10(iii)).

Αρχικά έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.5 Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s$ είναι Borel.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$,

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k),$$

δηλαδή

$$f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Σύμφωνα με την κλασική τεχνική (§2.3 του Κεφ. ;;), θεωρούμε την οικογένεια (των καλών συνόλων)

$$\mathcal{B} = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \right\},$$

οπότε, προφανώς, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$. Εύκολα προκύπτει ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^s$ (πρβλ. απόδειξη της Πρότασης 3.3), και επειδή η $\mathcal{B}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα U του $\mathbb{R}^s$ (διότι το

$f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^k$ όταν το U είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^s$, επειδή η f είναι συνεχής), έπεται ότι

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{B},$$

όπου $\mathcal{G} = \{U \in \mathbb{R}^s : U \text{ ανοικτό}\}$. Συνεπώς, ισχύει ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^s) = \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{B}$ (επειδή η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα), που σημαίνει ότι

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^s),$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 3.6 Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(i) Η X είναι τ.μ.

(ii) $\{\omega : X(\omega) < b\} \in \mathcal{A}$, για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{\omega : X(\omega) \geq b\} \in \mathcal{A}$, για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

(iv) $\{\omega : X(\omega) > b\} \in \mathcal{A}$, για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα επειδή

$$\begin{aligned}
\{\omega : X(\omega) < b\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \leq b - \tfrac{1}{n}\}, \\
\{\omega : X(\omega) \geq b\} &= (\{\omega : X(\omega) < b\})^c, \quad \text{και} \\
\{\omega : X(\omega) > b\} &= (\{\omega : X(\omega) \leq b\})^c. \quad \square
\end{aligned}$$

Πρόταση 3.7 Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μία τ.μ. Τότε οι παρακάτω είναι τ.μ.

(i) Η $Y_1(\omega) = c \quad (c \in \mathbb{R}$, σταθερά).

(ii) Η $Y_2(\omega) = X(\omega) + c \;\; (c \in \mathbb{R}$, σταθερά).

(iii) Η $Y_3(\omega) = cX(\omega) \;\; (c \in \mathbb{R}$, σταθερά).

(iv) Η $Y_4(\omega) = f\left(X(\omega)\right)$, όπου $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(v) Η $Y(\omega) = f\left(X(\omega)\right)$, όπου $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε το (v), αφού τα υπόλοιπα είναι απλή συνέπεια του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις $x \mapsto c$, $x \mapsto x + c$, $x \mapsto cx$, $x \mapsto f(x)$ (όπου f συνεχής), είναι Borel, επειδή είναι συνεχείς (Πρόταση 3.5 για $k = s = 1$).

Αφού $Y = f \circ X$, έπεται εύκολα ότι

$$Y^{-1}(B) = X^{-1}\left(f^{-1}(B)\right), \quad \text{για κάθε } B \subset \mathbb{R}.$$

Όμως $f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (αφού η f είναι Borel), και $X^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{A}$ (αφού η X είναι τ.μ.), οπότε

$$Y^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = X^{-1}\left(f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)\right) \subset X^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathcal{A},$$

και άρα η Y είναι τ.μ. $\square$

Πρόταση 3.8 Εάν οι X και Y είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τότε τα υποσύνολα $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}$, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)\}$, και $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\}$, είναι ενδεχόμενα.

Απόδειξη: Είναι

$$\{\omega : X(\omega) < Y(\omega)\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big(\{\omega : X(\omega) < r\} \cap \{\omega : Y(\omega) > r\}\big) \in \mathcal{A},$$

λόγω της Πρότασης 3.6 ($\mathbb{Q}$ οι ρητοί). Άρα,

$$\{\omega : X(\omega) \leq Y(\omega)\} = \big(\{\omega : Y(\omega) < X(\omega)\}\big)^c \in \mathcal{A},$$

και, τέλος,

$$\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = \{\omega : X(\omega) \leq Y(\omega)\} \setminus \{\omega : X(\omega) < Y(\omega)\} \in \mathcal{A}. \quad \square$$

Πρόταση 3.9 Εάν οι X και Y είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τότε οι $X+Y$, XY, $\max\{X,Y\}$, $\min\{X,Y\}$, $X^+ = \max\{X,0\}$, και $X^- = \max\{-X,0\} = -\min\{X,0\}$, είναι, επίσης, τ.μ.

Απόδειξη: Είναι

$$\{\omega : X(\omega)+Y(\omega) < b\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big(\{\omega : X(\omega) < r\} \cap \{\omega : Y(\omega) < b-r\}\big) \in \mathcal{A},$$

λόγω της Πρότασης 3.6, οπότε η $X+Y$ είναι τ.μ. Τώρα,

$$XY = \frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(X^2+Y^2),$$

οπότε και η XY είναι τ.μ., διότι η συνάρτηση $x \mapsto x^2$ είναι Borel, και άρα οι

$$X^2, \quad Y^2, \quad (X+Y)^2$$

είναι τ.μ., οπότε οι $\frac{1}{2}(X+Y)^2$ και $-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$ είναι τ.μ.

Παρατηρώντας ότι

$$\{\omega : \max\{X, Y\} \le b\} = \{\omega : X(\omega) \le b\} \cap \{\omega : Y(\omega) \le b\},$$

και

$$\{\omega : \min\{X, Y\} \ge b\} = \{\omega : X(\omega) \ge b\} \cap \{\omega : Y(\omega) \ge b\},$$

έπεται ότι και οι $\min\{X, Y\}$, $\max\{X, Y\}$ είναι τ.μ. Τέλος, οι

$$X^+ = f_1(X) \ \text{ και } \ X^- = f_2(X)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις της τ.μ. X, και άρα τ.μ. $\square$

Μερικές φορές αναγκαζόμαστε να θεωρήσουμε τ.μ.

$$X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty],$$

έτσι ώστε να επιτρέπεται και η τιμή $+\infty$ ή $-\infty$, ως τιμή της X. Αυτό όμως δεν βλάπτει την γενικότητα των ορισμών διότι, π.χ., η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ περιέχει ακριβώς τα σύνολα

$$\{B,\ B \cup \{+\infty\},\ B \cup \{-\infty\},\ B \cup \{+\infty, -\infty\},\ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

και ο ορισμός της τ.μ. γίνεται

$$X^{-1}\left(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right) \subset \mathcal{A}.$$

Θα καλούμε **εκτεταμένη** μία τ.μ. X που παίρνει και τις τιμές $\pm\infty$. Ουσιαστικά, η μόνη επιπλέον συνθήκη για μία εκτεταμένη τ.μ. X είναι η απαίτηση όπως και τα σύνολα $\{\omega : X(\omega) =$

$+\infty\}$ και $\{\omega : X(\omega) = -\infty\}$ είναι ενδεχόμενα. Παρατηρώντας ότι

$$\{\omega : X(\omega) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \le -n\},$$

και

$$\{\omega : X(\omega) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) \ge n\},$$

έπεται ότι ο ορισμός της συνήθους τ.μ.,

$$\{\omega : X(\omega) \le b\} \in \mathcal{A}, \quad \text{για κάθε } b \in \mathbb{R},$$

καλύπτει και τις εκτεταμένες τ.μ.

Οι εκτεταμένες τ.μ. χρειάζονται όταν έχουμε όριο ακολουθίας (συνήθων) τ.μ., π.χ.

$$X(\omega) = \liminf X_n(\omega),$$

οπότε η $X(\omega)$ μπορεί να λάβει και τις τιμές $+\infty$ ή $-\infty$, ακόμα και όταν αυτό δεν συμβαίνει για τις $X_n(\omega)$.

Έχουμε τώρα την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.10 Ας υποθέσουμε ότι η Y και οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι τ.μ. στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$. Τότε

(i) Οι $Y_1(\omega) = \inf_{n\ge 1} X_n(\omega)$, $Y_2(\omega) = \sup_{n\ge 1} X_n(\omega)$ είναι (εκτεταμένες) τ.μ.

(ii) Οι $Y_3(\omega) = \liminf X_n(\omega)$, $Y_4(\omega) = \limsup X_n(\omega)$ είναι (εκτεταμένες) τ.μ.

(iii) Η $Y_5(\omega) = \lim X_n(\omega)$ είναι (εκτεταμένη) τ.μ., όταν το $\lim X_n(\omega)$ υπάρχει (στο $\overline{\mathbb{R}}$).

(iv) Το σύνολο $A = \{\omega : X_n(\omega)$ συγκλίνει$\}$ είναι ενδεχόμενο.

(v) Το σύνολο $B = \{\omega : X_n(\omega) \to Y(\omega)\}$ είναι ενδεχόμενο.

Απόδειξη:

(i) Είναι

$$\{\omega : Y_1(\omega) \geq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \geq b\} \in \mathcal{A},$$

και

$$\{\omega : Y_2(\omega) \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : X_n(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}.$$

(ii) Είναι

$$\liminf X_n(\omega) = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} X_k(\omega) \right), \text{ και } \limsup X_n(\omega) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} X_k(\omega) \right).$$

Όμως οι $Z_n(\omega) = \inf_{k \geq n} X_k(\omega)$ είναι (εκτεταμένες) τ.μ., λόγω του (i), και συνεπώς, $\{\omega : Z_n(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$. Τότε όμως,

$$\liminf X_n(\omega) = \sup_n Z_n(\omega),$$

οπότε

$$\{\omega : Y_3(\omega) \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : Z_n(\omega) \leq b\} \in \mathcal{A},$$

και παρόμοια για την $Y_4(\omega) = \limsup X_n(\omega)$.

(iii) Η $Y_5(\omega) = \lim X_n(\omega)$ ισούται με την $Y_3(\omega)$, όταν το όριο υπάρχει, και άρα είναι (εκτεταμένη) τ.μ.

(iv) Είναι

$$A = \{\omega : X_n(\omega) \text{ συγκλίνει}\} = \{\omega : Y_3(\omega) = Y_4(\omega)\} \in \mathcal{A},$$

λόγω της Πρότασης 3.8 (που ισχύει και για εκτεταμένες τ.μ.).

(v) Είναι

$$B = \{\omega : Y_3(\omega) = Y(\omega)\} \cap \{\omega : Y_4(\omega) = Y(\omega)\} \in \mathcal{A},$$

λόγω της Πρότασης 3.8. □

Φυσικά, αν οι τ.μ. X_n της παραπάνω πρότασης είναι ομοιόμορφα φραγμένες (δηλ. υπάρχει θετική σταθερά $c < +\infty$ τέτοια ώστε $|X_n(\omega)| \le c$ για κάθε $n \ge 1$ και $\omega \in \Omega$), τότε οι Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 και Y_5 (όταν υπάρχει) είναι συνήθεις τ.μ. (αφού $\{\omega : Y_j = \pm\infty\} = \varnothing,\ j = 1, 2, 3, 4, 5$). Το (iii) μας εξασφαλίζει ότι το κατά σημείο όριο, $f(x) = \lim_n f_n(x)$, μιας ακολουθίας f_n Borel συναρτήσεων, είναι (εκτεταμένη) Borel συνάρτηση. [Αρκεί να λάβουμε $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $X = f,\ X_n = f_n$.]

Αλλά οι μετρήσιμες συναρτήσεις έχουν ακόμα ωραιότερες ιδιότητες. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία **απλών** συναρτήσεων, τέτοια ώστε το κατά σημείο όριο της ακολουθίας να είναι δοθείσα μετρήσιμη συνάρτηση. Για τον σκοπό αυτό δίνουμε πρώτα τον ορισμό της απλής τ.μ.

Ορισμός 3.11 (απλή τυχαία μεταβλητή) Απλή τ.μ. (ή, ισοδύναμα, **απλή μετρήσιμη συνάρτηση**) ονομάζεται οποιαδήποτε τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με πεπερασμένο πλήθος τιμών.

Άρα, αν η X είναι απλή, τότε (και μόνο τότε) υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $c_1 < \cdots < c_n$, και n ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, με $A_i A_j = \varnothing$ για $i \neq j$, και $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{A_k}(\omega). \tag{3.2}$$

Η (3.2) λέγεται **κανονική μορφή** της απλής τ.μ. X.
[Ουσιαστικά, μία απλή τ.μ. είναι σταθερή σε κάθε A_j, όπου η $\{A_j,\ 1 \le j \le n\}$ είναι μία πεπερασμένη, $\mathcal{A}$-διαμέριση, του Ω.]

Το παρακάτω θεώρημα είναι θεμελιώδες στην θεωρία πιθανοτήτων (και ολοκλήρωσης), διότι παρουσιάζει τον βασικό δομικό ρόλο των απλών συναρτήσεων, και, κατά συνέπεια, των **δεικτριών**.

Θεώρημα 3.12 (προσέγγιση μη αρνητικών μετρησίμων συναρτήσεων από

απλές) Για οποιαδήποτε μη αρνητική τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (δηλ. $X(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$), του μετρήσιμου χώρου $(\Omega, \mathcal{A})$, υπάρχει **αύξουσα** ακολουθία απλών, μη αρνητικών, τ.μ. X_n (δηλ. $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \geq 1$), τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega.$$

[Συνοπτικά γράφουμε $0 \leq X_n \nearrow X$.]

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{αν } \dfrac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \dfrac{k}{2^n}, \quad k = 1, \ldots, n2^n, \\ \\ n, & \text{αν } X(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Τότε,

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{A_{k,n}}(\omega) + nI_{B_n}(\omega), \qquad (3.3)$$

όπου $A_{k,n} = \left\{\omega : \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}$, $k = 1, \ldots, n2^n$, και $B_n = \{\omega : X(\omega) \geq n\}$. Είναι φανερό ότι $A_{k,n} \cap A_{s,n} = \varnothing$, και $A_{k,n} \cap B_n = \varnothing$, για κάθε $k \neq s$, $1 \leq k, s \leq n$. Επίσης, $A_{1,n} \cup \cdots \cup A_{n2^n,n} \cup B_n = \Omega$. Τελικά η X_n είναι απλή τ.μ., με κανονική μορφή την (3.3). [Είναι τ.μ. διότι η X είναι τ.μ., και άρα τα $A_{k,n}$, $1 \leq k \leq n2^n$, και B_n, είναι ενδεχόμενα.]

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$A_{k,n} = A_{2k-1,n+1} \cup A_{2k,n+1}, \quad \text{για } \ k = 1, 2, \ldots, n2^n, \quad \text{ενώ}$$
$$B_n = B_{n+1} \cup \left(\bigcup_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} A_{k,n+1} \right).$$

Άρα, αν $\omega \in A_{k,n}$ $\left(\text{οπότε } X_n(\omega) = \dfrac{k-1}{2^n}\right)$, τότε:
είτε

$$\omega \in A_{2k-1,n+1} \ \left(\text{οπότε } X_{n+1}(\omega) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = X_n(\omega)\right),$$

ή

$$\omega \in A_{2k,n+1} \ \left(\text{οπότε } X_{n+1}(\omega) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} = X_n(\omega) + \frac{1}{2^{n+1}} > X_n(\omega)\right).$$

Αν, τέλος, $\omega \in B_n$ (οπότε $X_n(\omega) = n$), τότε:
είτε

$$\omega \in B_{n+1} \ (\text{οπότε } X_{n+1}(\omega) = n+1 > n = X_n(\omega)),$$

ή

$$\omega \in A_{k,n+1} \text{ για κάποιο } k, \text{ με } n2^{n+1}+1 \leq k \leq (n+1)2^{n+1}$$
$$\left(\text{οπότε } X_{n+1}(\omega) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = X_n(\omega)\right).$$

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν, $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$, οπότε η $X_n(\omega)$ είναι αύξουσα ακολουθία απλών, μη αρνητικών, τ.μ. Προφανώς, $X_n(\omega) \leq X(\omega)$ για κάθε $n \geq 1$ και $\omega \in \Omega$ (από τον ορισμό των X_n). Όμως, για σταθερό $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq n_0$ για κάποιο n_0. Άρα για $n > n_0$, το ω ανήκει σε κάποιο $A_{k,n}$, $1 \leq k \leq n2^n$, και συνεπώς

$$0 \leq X(\omega) - X_n(\omega) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{για } n > n_0,$$

που σημαίνει ότι $\lim X_n(\omega) = X(\omega)$. Άρα η X_n είναι μία αύξουσα ακολουθία απλών τ.μ., με $0 \leq X_n \nearrow X$. $\square$

ΣΧΗΜΑ 3.1. Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{X_n}$ και $\boldsymbol{X}$ για $\boldsymbol{n=2}$.

Παρατηρήστε ότι ακόμα και αν η X ήταν μία εκτεταμένη, μη αρνητική, τ.μ. (δηλ. έπαιρνε την τιμή $X(\omega)=+\infty$ για κάποια $\omega \in \Omega$, που σχηματίζουν ένα ενδεχόμενο $B \in \mathcal{A}$), τότε για κάθε $\omega \in B$, θα είχαμε $X_n(\omega) = n \to +\infty = X(\omega)$. Άρα,

$$0 \le X_n(\omega) \nearrow X(\omega),$$

ακόμη και για εκτεταμένες τ.μ. $X \ge 0$. Επίσης, παρατηρήστε ότι αν η X είναι φραγμένη (δηλ. $X(\omega) \le c < +\infty$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\omega \in \Omega$), τότε έχουμε

$$0 \le X(\omega) - X_n(\omega) \le \frac{1}{2^n}, \quad \text{για } n > c, \text{ και για κάθε } \omega \in \Omega,$$

οπότε, σε αυτήν την περίπτωση, η X_n συγκλίνει **ομοιόμορφα** προς την X.

Πόρισμα 3.13 Αν η X είναι τυχούσα (ακόμη και εκτεταμένη) τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τότε υπάρχουν απλές τ.μ. X_n στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τέτοιες ώστε

$$X_n(\omega) \to X(\omega), \quad \text{και } |X_n(\omega)| \nearrow |X(\omega)|\,.$$

Απόδειξη: Θέτοντας $X^+ = \max\{X, 0\}$ και $X^- = \max\{-X, 0\}$, έχουμε ότι $X^+ \geq 0$, $X^- \geq 0$, οι X^+, X^- είναι μη αρνητικές τ.μ. (Πρόταση 3.9), και

$$X = X^+ - X^-, \quad |X| = X^+ + X^-.$$

Από το Θεώρημα 3.12, υπάρχουν ακολουθίες απλών τ.μ. $(X_n)^+$ και $(X_n)^-$, έτσι ώστε $0 \leq (X_n)^+ \nearrow X^+$, και $0 \leq (X_n)^- \nearrow X^-$. Άρα, η ακολουθία

$$X_n = (X_n)^+ - (X_n)^-,$$

είναι ακολουθία απλών τ.μ. (γιατί;), και ικανοποιεί τις απαιτήσεις του πορίσματος:

$$|X_n| = (X_n)^+ + (X_n)^- \nearrow X^+ + X^- = |X|,$$

και

$$X_n = (X_n)^+ - (X_n)^- \to X^+ - X^- = X.$$

[Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη (βλ. Άσκηση 3.4) να αποδείξει ότι η $(X_n)^+ - (X_n)^-$ είναι απλή, και ότι, στην περίπτωση μιας εκτεταμένης τ.μ. X, το $\lim (X_n)^+(\omega) - \lim (X_n)^-(\omega)$ δεν είναι της μορφής $\infty - \infty$.] $\square$

3.2 Τυχαίο Διάνυσμα

Αρκετές φορές ενδιαφερόμαστε για περισσότερα από ένα χαρακτηριστικά του δειγματικού σημείου $\omega \in \Omega$, που θα εξαχθεί κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης. Αυτό ισοδυναμεί με το να ορίσουμε περισσότερες από μία τ.μ. στον Ω (π.χ. $X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)$, όπου η $X_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ παριστάνει την τιμή του του αριθμητικού χαρακτηριστικού j στο δειγματικό σημείο ω). Ένα απλό παράδειγμα έχουμε όταν ορίζουμε

$$X_1(\omega) = \textit{ύψος του ατόμου } \omega, \quad \text{και} \quad X_2(\omega) = \textit{βάρος του ατόμου } \omega,$$

με $\Omega = \{\textit{ο πληθυσμός μιας πόλης}\}$. Όλα τα χαρακτηριστικά μαζί μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως ένα (πολυδιάστατο) χαρακτηριστικό $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$, με τιμή

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)),$$

στο $\omega \in \Omega$. Ουσιαστικά, θεωρήσαμε μία πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$, η οποία καλείται τυχαίο διάνυσμα (random vector). Σχετικά, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.14 (τυχαίο διάνυσμα) Μία συνάρτηση $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$, στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, καλείται **τυχαίο διάνυσμα**, όταν οι συναρτήσεις $X_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ., για $j = 1, 2, \ldots, k$.

Έχουμε τώρα την εξής πρόταση.

Πρόταση 3.15 Η $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$, σε έναν μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, είναι τυχαίο διάνυσμα, αν και μόνο αν είναι $\mathcal{A}$—μετρήσιμη, δηλ. $\boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\right) \subset \mathcal{A}$.

Απόδειξη: Όταν η $\boldsymbol{X}$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη (δηλ. $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$–μετρήσιμη), τότε για κάθε $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_k(\omega) \leq x_k\} \in \mathcal{A},$$

διότι $\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_k(\omega) \leq x_k\} = \boldsymbol{X}^{-1}(B)$, όπου

$$B = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Επομένως, η ακολουθία A_n, με

$$A_n = \{\omega : X_1(\omega) \leq n, \ldots, X_{j-1}(\omega) \leq n, X_j(\omega) \leq x_j, X_{j+1}(\omega) \leq n, \ldots, X_k(\omega) \leq n\},$$

είναι αύξουσα ακολουθία της $\mathcal{A}$, και επειδή $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega : X_j(\omega) \leq x_j\} \in \mathcal{A}$, έπεται ότι η X_j είναι τ.μ. Αντιστρόφως, αν η $\boldsymbol{X}$ είναι τυχαίο διάνυσμα, τότε

$$\{\omega : \boldsymbol{X}(\omega) \leq \boldsymbol{x}\} = \{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_k(\omega) \leq x_k\} = \bigcap_{j=1}^{k} \{\omega : X_j(\omega) \leq x_j\},$$

και συνεπώς, $\{\omega : \boldsymbol{X}(\omega) \leq \boldsymbol{x}\} \in \mathcal{A}$. Όμως

$$\{\omega : \boldsymbol{X}(\omega) \leq \boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{X}^{-1}\left((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k]\right).$$

Σύμφωνα με την κλασική τεχνική της §2.3 του Κεφ. ;;, θεωρούμε την οικογένεια (των καλών συνόλων)

$$\mathcal{B} = \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : \boldsymbol{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Από τα προηγούμενα, η $\mathcal{B}$ περιέχει την

$$\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_k],\ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\},$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα (πρβλ. Πρόταση 3.3), θα περιέχει και την $\sigma(\mathfrak{D}_1)$. Άρα

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathfrak{D}_1) \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k),$$

δηλ. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, που αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 3.16 Εάν η $\boldsymbol{X}$ είναι k-διάστατο τυχαίο διάνυσμα στον $(\Omega, \mathcal{A})$, και η $\boldsymbol{Y}(\omega) = f(\boldsymbol{X}(\omega))$ είναι σύνθεση της Borel συνάρτησης $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^s$ με την $\boldsymbol{X}$, τότε η $\boldsymbol{Y}$ είναι s-διάστατο τυχαίο διάνυσμα.

Απόδειξη: Είναι $\boldsymbol{Y}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)) = \boldsymbol{X}^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^s))\right) \subset \boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\right) \subset \mathcal{A}$. $\square$

Για παράδειγμα, αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τ.μ., τότε η $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι τ.μ., όταν η $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel (ειδικότερα, όταν είναι συνεχής). Έτσι έχουμε μία άλλη απόδειξη της Πρότασης 3.9. Ως ειδική περίπτωση, οι $Y_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ και $Y_2 = X_1 X_2 \cdots X_n$ είναι τ.μ., όταν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τ.μ. Παρόμοια, οι διατεταγμένες τ.μ. $Y_1 \le \cdots \le Y_n$, όπου $Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \ldots, Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, είναι, πράγματι, τ.μ. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η θεωρία πολυδιάστατων τ.μ. (τυχαίων διανυσμάτων) ανάγεται σε αυτήν των μονοδιάστατων τ.μ. (ως ένα σημείο φυσικά), και γι΄ αυτό δεν θα τις μελετήσουμε ιδιαίτερα στην συνέχεια, εκτός αν είναι αναγκαίο.[3]

3.3 Παραγόμενη σ-άλγεβρα από Τυχαίες Μεταβλητές

Όπως είδαμε, μία συνάρτηση που είναι τ.μ., μπορεί να χάσει την ιδιότητα αυτή αν μικρύνουμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ και, αντίστροφα, μία συνάρτηση που δεν είναι τ.μ., μπορεί να γίνει μεγαλώνοντας την $\mathcal{A}$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η **ελάχιστη** σ-άλγεβρα που παράγεται από μία τ.μ., σύμφωνα με τον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.17 (σ-άλγεβρα παραγόμενη από τυχαίες μεταβλητές) Έστω X μία τ.μ. σε έναν μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$. Ορίζουμε ως $\sigma(X)$ την ελάχιστη σ-άλγεβρα ως προς την οποία η X παραμένει τ.μ. (μετρήσιμη). Γενικότερα, ορίζουμε ως $\sigma(X_i,\ i \in I)$ την ελάχιστη σ-άλγεβρα ως προς την οποία **όλες** οι $X_i,\ i \in I$, παραμένουν τ.μ. (το I μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο, ή και οποιοδήποτε άλλο σύνολο δεικτών). Η $\sigma(X_i,\ i \in I)$ ονομάζεται σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις $X_i,\ i \in I$. Η $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ συμβολίζεται και ως $\sigma(\boldsymbol{X})$, όπου $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Γενικά ισχύουν τα εξής:

[3] Στοιχειώδεις ιδιότητες πολυδιαστάτων συναρτήσεων κατανομής μελετώνται στο Κεφάλαιο ;;.

Πρόταση 3.18 (i) $\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\} = X^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$.

(ii) $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \left\{\boldsymbol{X}^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right\} = \boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$.

(iii) $\sigma(X_i,\ i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \sigma(X_i)\right)$.

Απόδειξη: (ii) Η $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$–μετρήσιμη, από τον ορισμό της $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Αυτό σημαίνει ότι το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$ είναι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$—μετρήσιμο, δηλ. $\boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Τώρα παρατηρούμε ότι η $\boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω, οπότε η $\boldsymbol{X}$ είναι και $\boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–μετρήσιμη, κατά τετριμμένο τρόπο. Συνεπώς,

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right),$$

διότι η $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι, εξ' ορισμού, η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ για την οποία η $\boldsymbol{X}$ είναι $\mathcal{B}$–μετρήσιμη. Το (i), προφανώς, προκύπτει από το (ii) για $n = 1$.

(iii) Προφανώς $\sigma(X_j) \subset \sigma\left(X_i,\ i \in I\right)$, για κάθε $j \in I$. Άρα,

$$\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j) \subset \sigma\left(X_i,\ \ i \in I\right),$$

και συνεπώς, αφού η $\sigma\left(X_i,\ i \in I\right)$ είναι σ-άλγεβρα,

$$\sigma\left(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\right) \subset \sigma\left(X_i,\ i \in I\right).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η X_j είναι $\sigma(X_j)$–μετρήσιμη, και άρα η X_j είναι

$$\sigma\left(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\right)\text{–μετρήσιμη,}$$

διότι $\sigma(X_j) \subset \sigma\left(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\right)$. Άρα, όλες οι X_j είναι $\sigma\left(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\right)$–μετρήσιμες. Επειδή η $\sigma\left(X_i,\ i\in I\right)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα με αυτήν την ιδιότητα, έπεται ότι

$$\sigma\left(X_i,\ i\in I\right) \subset \sigma\left(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\right),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Όπως γίνεται φανερό από την Πρόταση 3.15 και το Πόρισμα 3.16, αν η $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel, και οι $X_1, \ldots, X_k$ είναι τ.μ., τότε η

$$Y(\omega) = f\left(X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)\right)$$

είναι τ.μ. Στην πραγματικότητα η Y είναι $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$–μετρήσιμη, αφού

$$Y^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = \boldsymbol{X}^{-1}\left(f^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)\right) \subset \boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\right) = \sigma(X_1, \ldots, X_k),$$

λόγω της Πρότασης 3.18. Το σημαντικό όμως είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.19 (Borel) Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι μία τ.μ. Y, στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$–

μετρήσιμη (όπου $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A})$), είναι να υπάρχει Borel συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$Y(\omega) = f\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right), \quad \textit{για κάθε } \omega \in \Omega.$$

Απόδειξη: Όταν $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάποια Borel συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$Y^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

και άρα η Y είναι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$–μετρήσιμη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Y είναι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$–μετρήσιμη. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα:

(i) Υποθέτουμε πρώτα ότι η Y είναι απλή τ.μ. Άρα,

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega,$$

όπου $A_i \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(\boldsymbol{X})$, $A_i A_j = \varnothing$ (για $i \neq j$), $A_1 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$, και $c_1 < \cdots < c_k$. Αφού $A_j = \{\omega : Y(\omega) = c_j\} = Y^{-1}\left(\{c_j\}\right) \in \sigma(\boldsymbol{X})$, και $\sigma(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right)$ (Πρόταση 3.18), έπεται ότι υπάρχει $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, τέτοιο ώστε

$$\boldsymbol{X}^{-1}(B_j) = \{\omega : Y(\omega) = c_j\} = A_j.$$

Θέτουμε

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} c_j I_{B_j}(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Προφανώς η f είναι Borel, διότι $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{B_1, \ldots, B_k\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, αφού $B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ για $j = 1, 2, \ldots, k$. Επίσης,

$$f(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = \sum_{j=1}^{k} c_j I_{A_j}(\omega) = Y(\omega),$$

και άρα το ζητούμενο ισχύει για απλές Y.

(ii) Έστω ότι η Y είναι τυχούσα, $\sigma(\boldsymbol{X})$–μετρήσιμη, τ.μ. Τότε η Y είναι τ.μ. στον χώρο $(\Omega, \sigma(\boldsymbol{X}))$, και συνεπώς, λόγω του Πορίσματος 3.13, θα υπάρχουν απλές, $\sigma(\boldsymbol{X})$–μετρήσιμες, τ.μ. $Y_m(\omega)$, τέτοιες ώστε

$$\lim_{m\to\infty} Y_m(\omega) = Y(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega.$$

Λόγω του (i), υπάρχουν Borel συναρτήσεις $f_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$Y_m(\omega) = f_m(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \text{το } \lim_m f_m(\boldsymbol{x}) \text{ υπάρχει}\right\}.$$

Λόγω της Πρότασης 3.10(iv) (για $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), έπεται ότι $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Άρα, η συνάρτηση

$$I_M(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$

είναι Borel (διότι $I_M^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \{\varnothing, M, M^c, \mathbb{R}^n\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$), και συνεπώς (Πρόταση 3.9), οι συναρτήσεις

$$\widetilde{f}_m(\boldsymbol{x}) = f_m(\boldsymbol{x}) I_M(\boldsymbol{x})$$

είναι Borel (ως γινόμενο Borel συναρτήσεων). Θέτοντας τώρα

$$f(\boldsymbol{x}) = \lim_m \widetilde{f}_m(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \lim_m f_m(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in M, \\ 0, & \boldsymbol{x} \notin M, \end{cases}$$

έχουμε ότι η f είναι Borel (Πρόταση 3.10), και

$$\begin{aligned} f\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) &= \lim_m \widetilde{f}_m\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \\ &= \lim_m \left[I_M\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) f_m\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) \right] \\ &= I_M\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) \lim_m Y_m(\omega) \\ &= I_M\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) Y(\omega). \end{aligned}$$

Ταυτόχρονα όμως, έχουμε ότι

$$\lim_m f_m\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) = \lim_m Y_m(\omega) = Y(\omega),$$

για κάθε $\omega \in \Omega$, διότι $f_m\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) = Y_m(\omega)$. Αν, τώρα, υπήρχε $\omega \in \Omega$, τέτοιο ώστε $\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) \notin M$, τότε θα είχαμε ότι η $f_m\left(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right) = Y_m(\omega)$ δεν συγκλίνει (άτοπο, διότι $Y_m(\omega) \to Y(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$). Συνεπώς, ισχύει ότι $\boldsymbol{X}(\omega) \in M$ για κάθε $\omega \in \Omega$, που σημαίνει ότι $I_M\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) = 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$, και έτσι,

$$f\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) = I_M\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) Y(\omega) = Y(\omega), \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega,$$

δηλ. η αποδεικτέα. $\square$

3.4 Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών

Η ανεξαρτησία ενδεχομένων, και κλάσεων ενδεχομένων, που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δημιούργησε το κατάλληλο υπέδαφος για να μελετήσουμε την **ανεξαρτησία τ.μ.**

Ορισμός 3.20 (ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών) Οι τ.μ. $X_i,\ i \in I$, ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ονομάζονται **(στοχαστικά) ανεξάρτητες**, όταν οι κλάσεις $\sigma(X_i),\ i \in I$, είναι ανεξάρτητες.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός αυτός καλύπτει και την πεπερασμένη περίπτωση (οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες όταν οι κλάσεις $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \ldots, \sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες), αλλά και την περίπτωση της ακολουθίας τ.μ., $\{X_n,\ n \geq 1\}$, η οποία καλείται **ανεξάρτητη ακολουθία**, ή ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ., όταν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $n = 2, 3, \ldots$.

Για την απόδειξη του επόμενου θεμελιώδους αποτελέσματος, σχετικά με την ανεξαρτησία τ.μ., θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.21 Έστω $X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ τυχούσα απεικόνιση (συνάρτηση, όχι κατ΄ ανάγκην μετρήσιμη), και έστω $\mathfrak{D}$ αυθαίρετη οικογένεια υποσυνόλων του Ω_2, δηλ. $\mathfrak{D} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$. Τότε,

$$\sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right) = X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right).$$

Απόδειξη: Προφανώς $\mathfrak{D} \subset \sigma(\mathfrak{D})$, οπότε και

$$X^{-1}(\mathfrak{D}) \subset X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right).$$

Όμως η $X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω_1, διότι:

(i) $\Omega_1 \in X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$ (επειδή $\Omega_2 \in \sigma(\mathfrak{D})$ και $X^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$).

(ii) Αν $A \in X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$, τότε $A = X^{-1}(B)$ για κάποιο $B \in \sigma(\mathfrak{D})$. Τότε όμως $B^c = \Omega_2 \setminus B \in \sigma(\mathfrak{D})$ (αφού η $\sigma(\mathfrak{D})$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω_2), και συνεπώς,

$$X^{-1}\left(\Omega_2 \setminus B\right) = \Omega_1 \setminus X^{-1}(B) = \Omega_1 \setminus A \in X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right).$$

(iii) Αν η A_n είναι ακολουθία της $X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$, τότε $A_n = X^{-1}(B_n)$ για κάποιο $B_n \in \sigma(\mathfrak{D})$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού η $\sigma(\mathfrak{D})$ είναι σ-άλγεβρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma(\mathfrak{D})$, και συνεπώς, $X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$. Είναι όμως $X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, και άρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$, που αποδεικνύει ότι η $X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$ είναι σ-άλγεβρα.

Τώρα προφανώς, αφού $X^{-1}(\mathfrak{D}) \subset X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$, και η $X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right)$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε ότι

$$\sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right) \subset X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right).$$

Προσπαθώντας να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, $X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right) \subset \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$, θεωρούμε την οικογένεια (των καλών – βλ. §2.3 του Κεφ. ;;) υποσυνόλων του Ω_2,

$$\mathcal{B} = \left\{ B \subset \Omega_2 : X^{-1}(B) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right) \right\}.$$

Η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω_2, διότι:

(i) $\Omega_2 \in \mathcal{B}$, επειδή $X^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$, αφού η $\sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω_1.

(ii) Αν $A \in \mathcal{B}$, τότε $X^{-1}(A) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$, και συνεπώς, $\left(X^{-1}(A)\right)^c = \Omega_1 \setminus X^{-1}(A) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$, που σημαίνει ότι $X^{-1}\left(\Omega_2 \setminus A\right) = \Omega_1 \setminus X^{-1}(A) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$. Από τον ορισμό της $\mathcal{B}$ έπεται ότι $A^c = \Omega_2 \setminus A \in \mathcal{B}$.

(iii) Για τυχούσα ακολουθία $\{A_n,\ n \geq 1\}$ της $\mathcal{B}$, $X^{-1}(A_n) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$ για $n = 1, 2, \ldots$, που σημαίνει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right)$, δηλαδή $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$. Επομένως, η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στον Ω_2.

Επειδή, προφανώς,

$$X^{-1}(\mathfrak{D}) \subset \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right),$$

έπεται ότι η $\mathcal{B}$ περιέχει την $\mathfrak{D}$, και άρα περιέχει, ως σ-άλγεβρα, και την $\sigma(\mathfrak{D})$. Από την σχέση $\sigma(\mathfrak{D}) \subset \mathcal{B}$, και τον ορισμό της $\mathcal{B}$, προκύπτει ότι

$$X^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D})\right) \subset \sigma\left(X^{-1}(\mathfrak{D})\right),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι η ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ μπορεί να οριστεί και με στοιχειώδη τρόπο, **χωρίς χρήση παραγόμενων κλάσεων** (πρβλ., π.χ., Χαραλαμπίδης (1991), Ορισμός 6.1, σελ. 37), ως εξής:

Οι $X_1, \ldots, X_n$ καλούνται ανεξάρτητες όταν για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

Ο λόγος που αυτός ο ορισμός δεν περιορίζει την γενικότητα εξηγείται από το κάτωθι σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.22 Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(i) Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για κάθε $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in B_n).$$

(iii) Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n).$$

Απόδειξη: (i)⇒(ii). Αφού οι $\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες, ισχύει ότι για κάθε $A_1 \in \sigma(X_1), \ldots, A_n \in \sigma(X_n)$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j). \tag{3.4}$$

Όμως, $\sigma(X_j) = X_j^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \left\{X_j^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$, και συνεπώς, για τυχόντα $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, υπάρχουν $A_1 \in$

$\sigma(X_1), \ldots, A_n \in \sigma(X_n)$, τέτοια ώστε

$$A_j = X_j^{-1}(B_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Τότε όμως, $A_j = \{\omega : X_j(\omega) \in B_j\}$, και συνεπώς,

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{\omega : X_1(\omega) \in B_1, \ldots, X_n(\omega) \in B_n\},$$

οπότε η αποδεικτέα είναι αναδιατύπωση της (3.4).

(ii)⇒(iii). Είναι προφανής, διότι μπορούμε να εκλέξουμε $B_j = (-\infty, x_j] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, για $j = 1, \ldots, n$.

(iii)⇒(i). Αφού

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n) \tag{3.5}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \tag{3.6}$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_n$, όπου

$$\mathcal{B}_j = \{\{\omega : X_j(\omega) \leq x\},\ x \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Η (3.6) ισχύει και όταν μερικά $A_j = \Omega$ (αρκεί να θέσουμε τα αντίστοιχα $x_j = m$, στην (3.5), και να πάρουμε όρια για $m \to \infty$). Άρα οι $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ είναι ανεξάρτητες, και, από το Θεώρημα ;; και το Θεώρημα του Dynkin (Θεώρημα ;;), προκύπτει ότι και οι $\sigma(\mathcal{B}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{B}_n)$ είναι ανεξάρτητες (διότι είναι π-συστήματα). Όμως, λόγω του Λήμματος 3.21, αφού

$$\mathcal{B}_j = X_j^{-1}(\mathfrak{D}_1), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

όπου $\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, x], \ x \in \mathbb{R}\}$, έχουμε ότι

$$\sigma(\mathcal{B}_j) = \sigma\left(X_j^{-1}(\mathfrak{D}_1)\right) = X_j^{-1}\left(\sigma(\mathfrak{D}_1)\right) = X_j^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right),$$

δηλαδή $\sigma(\mathcal{B}_j) = \sigma(X_j)$ για $j = 1, 2, \ldots, n$, που σημαίνει ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες. $\square$

Το παρακάτω πόρισμα είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 3.22 και των αντίστοιχων ορισμών.

Πόρισμα 3.23 (i) Οι τ.μ. $X_i, \ i \in I$, είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν, για κάθε πεπερασμένη εκλογή δεικτών $i_1, \ldots, i_n \in I$ (με $i_k \neq i_s$ για $k \neq s$), ισχύει η σχέση

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n),$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

(ii) Η ακολουθία τ.μ. $\{X_n, \ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη, όταν και μόνο όταν

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x_n),$$

για κάθε $n \geq 2$, και για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Είναι διαισθητικά προφανές ότι, τ.μ. που είναι συναρτήσεις ανεξαρτήτων τ.μ., θα είναι και μεταξύ τους ανεξάρτητες. Για παράδειγμα, αν έχουμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ., έστω $X_1, X_2, \ldots$, και θεωρήσουμε τις τ.μ.

$$Y_1 = f_1(X_1, X_4), \quad \text{και} \quad Y_2 = f_2(X_2, X_3, X_5),$$

που εξαρτώνται από διαφορετικές X_j, τότε θα πρέπει (διαισθητικά τουλάχιστον) οι Y_1, Y_2 να είναι ανεξάρτητες τ.μ. (οι f_1 και f_2 θα πρέπει να θεωρηθούν, φυσικά, Borel συναρτήσεις). Αυτό πράγματι ισχύει, αλλά και για να δειχθεί αυστηρά θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι σ-άλγεβρες $\sigma(Y_1)$ και $\sigma(Y_2)$ είναι ανεξάρτητες. Παρατηρούμε ότι για μία τ.μ. Y, της μορφής

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(\boldsymbol{X}) = f \circ \boldsymbol{X},$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel συνάρτηση, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\sigma(Y) &= \sigma(f \circ \boldsymbol{X}) = (f \circ \boldsymbol{X})^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \boldsymbol{X}^{-1}\left(f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\right) \\ &\subset \boldsymbol{X}^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n).\end{aligned}$$

Άρα, για να δείξουμε ότι οι τ.μ., που εξαρτώνται από διαφορετικές ομάδες ανεξαρτήτων τ.μ., είναι και μεταξύ τους ανεξάρτητες, είναι αρκετό να δείξουμε το επόμενο γενικό αποτέλεσμα, το οποίο καλύπτει όλες τις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις που εμφανίζονται στην πράξη.

Θεώρημα 3.24 Εάν οι τ.μ.

$$\begin{array}{cccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} & \cdots \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

είναι ανεξάρτητες, και θέσουμε $\mathcal{A}_i = \sigma(X_{i1}, X_{i2}, \ldots)$, δηλ. η $\mathcal{A}_i$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις τ.μ. της i-οστής γραμμής, τότε οι σ-άλγεβρες $\mathcal{A}_i,\ i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες.
[Το θεώρημα αυτό ισχύει και όταν οι γραμμές είναι πεπερασμένες το πλήθος, και όταν οι τ.μ. μερικών (ή και όλων των) γραμμών είναι πεπερασμένες το πλήθος.]

Απόδειξη: Έστω $\mathfrak{D}_i$ η οικογένεια των πεπερασμένων τομών ενδεχομένων της μορφής $\{\omega : X_{ij}(\omega) \in B\}$, όπου $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $j \geq 1$. Προφανώς η $\mathfrak{D}_i$ είναι π-σύστημα, αφού $A_i \in \mathfrak{D}_i$ αν και μόνο αν

$$A_i = X_{ij_1}^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_{ij_k}^{-1}(B_k), \tag{3.7}$$

για κάποιους δείκτες $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, και κάποια Borel σύνολα $B_1, \ldots, B_k$. Εύκολα προκύπτει ότι οι $\mathfrak{D}_i,\ i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες, αφού τα ενδεχόμενα $X_{ij_s}^{-1}(B_s)$ είναι ανεξάρτητα, για $s = 1, 2, \ldots, k$, όπως και τα ενδεχόμενα

$$X_{k_1 s_1}^{-1}(E_1), X_{k_2 s_2}^{-1}(E_2), \ldots, X_{k_m s_m}^{-1}(E_m),$$

με $(k_t, s_t) \neq (k_r, s_r)$ για $t \neq r$, και για οποιαδήποτε $E_1, E_2, \ldots, E_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Επομένως, από το Θεώρημα ;; και το Θεώρημα του Dynkin (Θεώρημα ;;), προκύπτει ότι οι $\sigma(\mathfrak{D}_i),\ i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες. Αφού για τυχόντα Borel σύνολα $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$X_{ij_1}^{-1}(B_1) \in \sigma\left(X_{ij_1}\right), \ldots, X_{ij_k}^{-1}(B_k) \in \sigma\left(X_{ij_k}\right),$$

έπεται ότι για οποιοδήποτε $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$X_{ij_s}^{-1}(B_s) \in \bigcup_{r=1}^{k} \sigma\left(X_{ij_r}\right) \subset \bigcup_{j \geq 1} \sigma\left(X_{ij}\right) \subset \sigma\left(\bigcup_{j \geq 1} \sigma\left(X_{ij}\right)\right) = \sigma(X_{ij},\ j \geq 1) = \mathcal{A}_i.$$

Επομένως, αφού κάθε ενδεχόμενο $A_i \in \mathfrak{D}_i$ είναι της μορφής (3.7), έχουμε $\mathfrak{D}_i \subset \mathcal{A}_i$, και έτσι (η $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα), προκύπτει ότι

$$\sigma(\mathfrak{D}_i) \subset \mathcal{A}_i.$$

Όμως και αντίστροφα, για κάθε $j \geq 1$, $\sigma(X_{ij}) = X_{ij}^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) \subset \mathfrak{D}_i$ (από τον ορισμό της $\mathfrak{D}_i$), και συνεπώς, $\bigcup_{j \geq 1} \sigma(X_{ij}) \subset \mathfrak{D}_i$, που σημαίνει ότι

$$\mathcal{A}_i = \sigma(X_{ij},\ j \geq 1) = \sigma\left(\bigcup_{j \geq 1} \sigma(X_{ij})\right) \subset \sigma(\mathfrak{D}_i),$$

δηλ. $\mathcal{A}_i \subset \sigma(\mathfrak{D}_i)$. Τελικά, $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathfrak{D}_i)$, και συνεπώς οι $\mathcal{A}_i,\ i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες. □

Παράδειγμα 3.25 (i) Θεωρούμε τις ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Τότε, για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, οι $Y_1 = X_1 + \ldots + X_k$ και $Y_2 = X_{k+1} + \ldots + X_n$ (όπως και οι $Y_3 = X_1 \cdots X_k$ και

$Y_4 = X_{k+1} \cdots X_n)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(ii) Αν η ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη, και οι συναρτήσεις $f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ n \geq 1$, είναι Borel, τότε η ακολουθία τ.μ. $\{Y_n = f_n(X_{2n-1}, X_{2n}),\ n \geq 1\}$, είναι ανεξάρτητη. $\square$

3.5 Νόμος 0–1 του Kolmogorov για Τυχαίες Μεταβλητές

Κατ΄ αναλογία με την περίπτωση ακολουθίας ενδεχομένων, όταν έχουμε μία ακολουθία τ.μ., μπορούμε να θεωρήσουμε την τελική τους σ-άλγεβρα.

Ορισμός 3.26 (τελική σ-άλγεβρα ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών) Για οποιαδήποτε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$, ορισμένη στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, η σ-άλγεβρα

$$\mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

καλείται **τελική σ-άλγεβρα** (tail σ-field) της ακολουθίας.

Επειδή οι $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ είναι σ-άλγεβρες για κάθε n, έπεται ότι η $\mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1)$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα, και μάλιστα $A \in \mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1)$ αν και μόνο αν $A \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, για κάθε $n \geq 1$.

Αφού οι (εκτεταμένες) τ.μ.

$$Y_1(\omega) = \liminf X_n(\omega), \quad Y_2(\omega) = \limsup X_n(\omega)$$

(και φυσικά η $Y(\omega) = \lim X_n(\omega)$, όταν το όριο υπάρχει για κάθε $\omega \in \Omega$) εξαρτώνται από την τελική συμπεριφορά της ακολουθίας X_n (διότι, π.χ., ισχύει ότι $Y_2(\omega) = \inf_{n \geq m} \left(\sup_{k \geq n} X_k(\omega) \right)$ για κάθε $m \geq 1$), έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τα ενδεχόμενα $A_j(x) = \{\omega : Y_j(\omega) \leq x\} \in \mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1)$, για $j = 1, 2$. Επίσης, τα ενδεχόμενα

$$B = \left\{ \omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ συγκλίνει} \right\} \quad \text{και} \quad \mathit{\Gamma} = \left\{ \omega : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \to 0 \right\}$$

περιέχονται στην $\mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1)$.

Για τα ενδεχόμενα της τελικής σ-άλγεβρας μιας ανεξάρτητης ακολουθίας τ.μ. έχουμε το εξής σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.27 (νόμος 0–1 του Kolmogorov για τυχαίες μεταβλητές) Αν το ενδεχόμενο A ανήκει στην τελική σ-άλγεβρα της **ανεξάρτητης ακολουθίας** τυχαίων μεταβλητών $\{X_n,\ n \geq 1\}$ (στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), τότε $\mathbb{P}(A) = 0$ ή $\mathbb{P}(A) = 1$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X_n,\ n \geq 1)$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Η $\mathcal{A}_0$ είναι άλγεβρα (και άρα π-σύστημα) στον Ω, διότι:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}_0$ (αφού, π.χ., $\Omega \in \sigma(X_1)$).

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}_0$, τότε $A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάποιο n, οπότε

$$A^c \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \mathcal{A}_0.$$

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{A}_0$, τότε $A \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $B \in \sigma(X_1, \ldots, X_m)$ για κάποια n, m, οπότε $A, B \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, όπου $k = \max\{n, m\}$, διότι $\sigma(X_1, \ldots, X_{k_1}) \subset \sigma(X_1, \ldots, X_{k_2})$ για $k_1 \leq k_2$. Συνεπώς,

$$A \cup B \in \sigma(X_1, \ldots, X_k) \subset \mathcal{A}_0.$$

Επειδή $\sigma(X_n) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, για $n = 1, 2, \ldots$, προκύπτει ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \mathcal{A}_0,$$

και συνεπώς,

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots) = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n)\right) \subset \sigma(\mathcal{A}_0).$$

Όμως, ισχύει ότι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots)$, για κάθε n, και συνεπώς,

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots),$$

που σημαίνει ότι και $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots)$. Τελικά,

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(X_1, X_2, \ldots).$$

Αφού οι τ.μ.

$$\begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ X_{n+1} & X_{n+2} & \ldots & \ldots \end{array}$$

είναι ανεξάρτητες, έχουμε, από το Θεώρημα 3.4, ότι και οι κλάσεις

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \ \text{ και } \ \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$$

είναι ανεξάρτητες. Όμως $\mathcal{T} \subset \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$, και συνεπώς, οι κλάσεις

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ και } \mathcal{T}$$

είναι ανεξάρτητες, για κάθε $n \geq 1$. Ας διαλέξουμε τώρα ένα $B_1 \in \mathcal{A}_0$ και ένα $B_2 \in \mathcal{T}$. Τότε, το $B_1 \in \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάποιο n, και συνεπώς, $\mathbb{P}(B_1B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)$. Αυτό σημαίνει ότι οι κλάσεις

$$\mathcal{A}_0 \ \text{ και } \ \mathcal{T}$$

είναι ανεξάρτητες. Όμως είναι και π-συστήματα (ως σ-άλγεβρα η $\mathcal{T}$ – ως άλγεβρα η $\mathcal{A}_0$), και συνεπώς, οι κλάσεις

$$\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma(X_1, X_2, \ldots) \ \text{ και } \ \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$$

είναι ανεξάρτητες. Αφού, προφανώς, $\mathcal{T} \subset \sigma(X_1, X_2, \ldots)$, και οι κλάσεις

$$\mathcal{T}, \ \ \mathcal{T}$$

θα είναι ανεξάρτητες, και συνεπώς, για κάθε $A \in \mathcal{T}$, $\mathbb{P}(AA) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$, που σημαίνει ότι $\mathbb{P}(A) = 0$ ή 1. $\square$

Ο νόμος 0–1 για τ.μ. επεκτείνει τον νόμο 0–1 για ενδεχόμενα. Πράγματι, αν η $\{A_n, \ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη ακολουθία ενδεχομένων, τότε η $\{I_{A_n}(\omega), n \geq 1\}$, είναι ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., και $\sigma\left(I_{A_n}\right) = \sigma\left(\{A_n\}\right) = \{\varnothing, \Omega, A_n, A_n^c\}$. Επίσης, ισχύει ότι $\sigma\left(I_{A_n}, I_{A_{n+1}}, \ldots\right) = \sigma\left(\{A_n, A_{n+1}, \ldots\}\right)$ για κάθε n, και συνεπώς,

$$\mathcal{T}\left(I_{A_n},\ n \geq 1\right) = \mathcal{T}\left(\{A_n,\ n \geq 1\}\right).$$

Ασκήσεις Κεφ. 3:

3.1. Έστω $X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ μία (αυθαίρετη) συνάρτηση, και $A_i,\ i \in I$, υποσύνολα του Ω_2 (όπου I αυθαίρετο σύνολο δεικτών). Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} X^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} X^{-1}(A_i), \\ X^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} X^{-1}(A_i), \\ X^{-1}(\Omega_2 \setminus A) &= \Omega_1 \setminus X^{-1}(A), \quad \text{για κάθε } A \subset \Omega_2. \end{aligned}$$

Εξετάστε αν ισχύουν τα εξής: Για τυχόντα $B_j,\ j \in J$, υποσύνολα του Ω_1,

$$X\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} X(B_j), \quad X\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big) = \bigcap_{j\in J} X(B_j),$$

όπου $X(B) = \{X(\omega),\ \omega \in B\}$.

3.2. Έστω X, Y δύο τ.μ. στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, οι οποίες ικανοποιούν την εξής ιδιότητα:
Για κάθε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ (το σύνολο των ρητών),

$$\mathbb{P}[X \leq r_1, Y \leq r_2] = \mathbb{P}[X \leq r_1]\, \mathbb{P}[Y \leq r_2]\,.$$

Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

Αν ικανοποιούν την ιδιότητα:

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X < x, Y \geq y] = \mathbb{P}[X < x]\, \mathbb{P}[Y \geq y]\,,$

είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

3.3. Εάν οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, του χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, είναι απλές τ.μ., τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για είναι ανεξάρτητες είναι η εξής:

Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_1 = x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = x_n]\,.$

3.4. Σχετικά με την απόδειξη του Πορίσματος 3.13, πώς προκύπτει ότι

$$|X_n| = (X_n)^+ + (X_n)^-, \quad \text{και} \quad X_n = (X_n)^+ - (X_n)^- \;;$$

[οπότε $X_n^+ = (X_n)^+$, και $X_n^- = (X_n)^-$]

3.5. **(συναρτήσεις Rademacher)** Στον χώρο πιθανότητας $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue, θεωρούμε την διαμέριση

$$(0,1) = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \Delta_{k,n},$$

όπου

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n} &= \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 2, \\ \Delta_{2^n-1,n} &= \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1\right). \end{aligned}$$

Έστω

$$R_n(\omega) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{k+1} I_{\Delta_{k,n}}(\omega), \quad 0 < \omega < 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

η ακολουθία των συναρτήσεων Rademacher. Εξετάστε εάν η ακολουθία $\{R_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη (αφού πρώτα δείξετε ότι είναι ακολουθία τ.μ. στον χώρο αυτό).

3.6. Έστω $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Θέτουμε $\mathfrak{D}_1 = \{[-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$ και $\overline{\mathfrak{D}}_1 = \{[-\infty, x],\ x \in \overline{\mathbb{R}}\}$. Δείξτε ότι

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathfrak{D}_1) = \sigma(\overline{\mathfrak{D}}_1),$$

και ότι $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{B \cup \Gamma : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \Gamma \subset \{-\infty, +\infty\}\}$.

3.7. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μία τ.μ., και $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση Borel. Δείξτε ότι οι τ.μ. X και $f(X)$ είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν

$$\textit{Υπάρχει } \alpha \in \mathbb{R}, \ \textit{τέτοιο ώστε } \mathbb{P}[f(X) = \alpha] = 1.$$

[Η παραπάνω συνθήκη διαβάζεται ως «η $f(X)$ είναι σταθερή με πιθανότητα 1».]

3.8. Δείξτε ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη όταν και μόνο όταν οι κλάσεις $\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})$ και $\sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες, για $n = 2, 3, \ldots$.

3.9. Μία συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με $X(\Omega)$ πεπερασμένο (δηλ. $\{X(\omega),\ \omega \in \Omega\} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1 < \cdots < c_n$), είναι απλή τ.μ. όταν και μόνο όταν $\{\omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη αυτή, αν και δεν είναι τ.μ.

3.10. (i) Δείξτε ότι η X είναι μετρήσιμη ως προς μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ όταν και μόνο όταν $\sigma(X) \subset \mathcal{A}$.
(ii) Η X είναι $\{\varnothing, \Omega\}$–μετρήσιμη εάν και μόνο εάν η X είναι σταθερή.
(iii) Εάν η X είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη και $\mathbb{P}(A) = 0$ ή 1 για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχει σταθερά $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{P}[X = \alpha] = 1$ (δηλ. η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1).
(iv) Για μία ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ του χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{P}\left[\left\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ συγκλίνει}\right\}\right] = 0 \text{ ή } 1.$$

(v) Για τις συναρτήσεις Rademacher (Άσκηση 3.5) $\{R_n,\ n \geq 1\}$, ισχύει ότι

$$\lambda\left(\left\{\omega : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k(\omega) \to 0 \right\}\right) = 0 \text{ ή } 1.$$

3.11. Κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι (εκτεταμένη) Borel συνάρτηση.