Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Κεφάλαιο 4

Συνάρτηση Κατανομής

4.1 Συνάρτηση Κατανομής Τυχαίας Μεταβλητής

Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μία τ.μ., ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Η συνάρτηση κατανομής [distribution function (d.f.) – cumulative distribution function (c.d.f.)] είναι ένα μέσον, το οποίο διευκολύνει ουσιωδώς την μελέτη των βασικών ιδιοτήτων της X. Έτσι, μπορούμε να περιγράψουμε τις στοχαστικές ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν, χωρίς να απαιτείται, καν, να αναφερθούμε στον χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, στον οποίο διεξάγεται το πείραμα, και ο οποίος ενδέχεται να είναι «περίπλοκος». Κατ΄ ουσίαν «μαθηματικοποιούμε» το πρόβλημα, και μετά χρησιμοποιούμε γνωστά εργαλεία της ανάλυσης, για να προσδιορίσουμε όλα τα ενδιαφέροντα στοιχεία που αφορούν στην X.

Ορισμός 4.1 (συνάρτηση κατανομής) Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μία τ.μ. στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ορίζουμε ως **συνάρτηση κατανομής** (σ.κ.) της X, την συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, με τύπο

$$F_X(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}\left[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Ο δείκτης χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ότι η συνάρτηση κατανομής F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X, και μπορεί να παραλείπεται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, και να γράφουμε απλά F. Παρατηρούμε ότι η F_X είναι καλά ορισμένη από την (4.1), διότι η X είναι τ.μ., και άρα, $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$, οπότε έχει νόημα η πιθανότητα με την οποία ορίζεται η F_X. Το ενδεχόμενο

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]),$$

το γράφουμε για απλότητα και ως

$$\{X \leq x\}, \quad \text{ή } [X \leq x], \quad \text{ή και } (X \leq x),$$

τη δε συνάρτηση κατανομής (4.1), την συμβολίζουμε συνήθως ως (πρβλ. Θεώρημα ;;)

$$F_X(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}(X \leq x), \text{ ή και } F_X(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}[X \leq x], \ x \in \mathbb{R}.$$

Η παρακάτω πρόταση έπεται άμεσα:

Πρόταση 4.2 Μία σ.κ. F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, και ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

[Συνήθως, χάριν συντομίας, γράφουμε $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$, εννοώντας φυσικά το ίδιο πράγμα. Επίσης, η δεξιά συνέχεια δηλώνεται και ως $F(x_+) = F(x)$, όπου $F(x_+)$ είναι συντομογραφία του $\lim_{y\searrow x} F(y) = \lim_{y\to x_+} F(y)$.]

Απόδειξη: Ότι η F είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι για $x < y$,

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} \subset \{\omega : X(\omega) \le y\}.$$

Η $F(x)$, ως αύξουσα συνάρτηση, έχει αριστερό (και δεξιό) όριο σε κάθε σημείο $x = x_0 \in \mathbb{R}$, το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω οποιασδήποτε ακολουθίας x_n, τέτοιας ώστε $x_n \to x_0$ από δεξιά (από αριστερά), δηλ. $x_n \searrow x_0$ ($x_n \nearrow x_0$). Επομένως, για $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x_{0+}) &= \lim_{x\searrow x_0} F(x) = \lim_n F\big(x_0 + \tfrac{1}{n}\big) = \lim_n \mathbb{P}\left[X \le x_0 + \tfrac{1}{n}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\lim_n \left\{X \le x_0 + \tfrac{1}{n}\right\}\right] = \mathbb{P}[X \le x_0] = F(x_0), \end{aligned}$$

διότι η ακολουθία $A_n = \left\{X \le x_0 + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$ είναι φθίνουσα, με $\lim_n A_n = \{X \le x_0\}$.

Ομοίως,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_n F(n) = \lim_n \mathbb{P}[X \le n] = \mathbb{P}[\lim_n \{X \le n\}] = \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_n F(-n) = \lim_n \mathbb{P}[X \le -n] = \mathbb{P}[\lim_n \{X \le -n\}] = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

[Επειδή $\{X \le n\} \nearrow \Omega$, και $\{X \le -n\} \searrow \varnothing$.][1] $\square$

[1] Για ακολουθία ενδεχομένων $\{A_n,\ n \ge 1\}$, χρησιμοποιείται ο προφανής συμβολισμός $A_n \nearrow A$ (αντ., $A_n \searrow A$), ο οποίος δηλώνει ότι η A_n είναι αύξουσα (αντ., φθίνουσα) και, ταυτόχρονα, συγκλίνει στο ενδεχόμενο A.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για εκτεταμένες τυχαίες μεταβλητές $X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, με μόνη διαφορά στις οριακές συνθήκες. Πράγματι, εύκολα προκύπτει ότι η σ.κ. μιας εκτεταμένης τ.μ. ικανοποιεί τις οριακές σχέσεις $F(-\infty) = \mathbb{P}(X = -\infty) = \alpha \geq 0$, και $F(+\infty) = 1 - \mathbb{P}(X = +\infty) = \beta \leq 1$, όπου $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ αυθαίρετες σταθερές, ενώ στις συνήθεις τ.μ. ισχύει, αναγκαστικά, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Είναι άμεσο ότι $\{X \leq x_0 - \frac{1}{n}\} \nearrow \{X < x_0\}$, και συνεπώς, $\mathbb{P}[X < x_0] = F(x_{0-})$. Επομένως, αφού $\{X < x\} \subset \{X \leq x\}$, ισχύει η σχέση

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[\{X \leq x\} \smallsetminus \{X < x\}] = F(x) - F(x_-), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, όταν η F είναι **συνεχής** συνάρτηση κατανομής, τότε προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}[X = x] = 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γενικότερα, $\mathbb{P}[X = x] > 0$ όταν και μόνο όταν το x είναι σημείο ασυνέχειας της σ.κ. F, οπότε έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.3 Για οποιαδήποτε τ.μ. X, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[X = x] > 0\}$ είναι (το πολύ) αριθμήσιμο (μπορεί να είναι και το $\varnothing$).

Απόδειξη: Είναι γνωστό (Άσκηση 4.1) ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας κάθε αύξουσας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, και το αποτέλεσμα έπεται από το γεγονός ότι η σ.κ. F_X είναι αύξουσα, και την παρατήρηση ότι $\{x : \mathbb{P}[X = x] > 0\} = \{x : \text{το } x \text{ είναι σημείο ασυνέχειας της } F_X\}$.
□

Όπως ίσως έχει γίνει αντιληπτό, η σ.κ. F_X ορίζει (επάγει) ένα νέο μέτρο πιθανότητας, $\mathbb{P}_X$, στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Συγκεκριμένα, έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.4 (επαγόμενο μέτρο πιθανότητας) Μία τ.μ. X στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, σύμφωνα με τον τύπο:

$$\mathbb{P}_X(B) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}(X \in B), \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ο χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ ονομάζεται **επαγόμενος** χώρος πιθανότητας της τ.μ. X στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ισοδύναμα, το επαγόμενο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ συμβολίζεται και ως $\mathbb{P} \circ X^{-1}$, αφού $\mathbb{P}_X(B) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}(X^{-1}(B))$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
[Το πεδίο ορισμού του νέου μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ είναι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, και όχι η $\mathcal{A}$ στην οποία γίνεται το πείραμα. Έτσι, ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ θεωρείται απλούστερος από τον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.]

Η σπουδαιότητα της έννοιας της *σ.κ.* καθίσταται προφανής, επειδή ισχύει η εξής:

Πρόταση 4.5 (i) Το $\mathbb{P}_X$ είναι, πράγματι, μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Η *σ.κ.* F_X καθορίζει μονοσήμαντα το μέτρο $\mathbb{P}_X$, και αντίστροφα.

Απόδειξη: (i) Είναι $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Επίσης, αν η $\{B_n,\ n \geq 1\}$ είναι ακολουθία ξένων συνόλων Borel (δηλ. $B_i B_j = \varnothing$ για $i \neq j$, $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{-1}(B_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \in B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_X(B_n),
\end{aligned}$$

διότι η $\{X^{-1}(B_n),\ n \geq 1\}$ είναι ακολουθία ξένων ενδεχομένων της $\mathcal{A}$. (γιατί;) Άρα, ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ είναι χώρος πιθανότητας.

(ii) Αν δίδεται το $\mathbb{P}_X$, τότε προφανώς η F_X καθορίζεται ως

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \mathbb{P}[X \in (-\infty, x]] = \mathbb{P}_X((-\infty, x]),\ \ x \in \mathbb{R},$$

διότι $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αντίστροφα, αν ένα άλλο μέτρο, έστω Q, ορίζεται στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, με την ιδιότητα

$$Q((-\infty, x]) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = F_X(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε η οικογένεια (των καλών συνόλων – βλ. §2.3 του Κεφ. ;;)

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : Q(B) = \mathbb{P}_X(B)\},$$

είναι μία λ-κλάση (άρα και κλάση Dynkin), που περιέχει την $\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, x],\ x \in \mathbb{R}\}$, και συνεπώς, θα περιέχει και την $\delta(\mathfrak{D}_1) = \sigma(\mathfrak{D}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλ.

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

που σημαίνει ότι $Q(B) = \mathbb{P}_X(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλ. $Q \equiv \mathbb{P}_X$ (πρβλ. Πόρισμα ;; και Παράδειγμα ;; του Κεφ. ;;). $\square$

Πόρισμα 4.6 Δύο τ.μ. $X_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ και $X_2 : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (σε δύο χώρους πιθανότητας $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$), έχουν την ίδια *σ.κ.*, F, εάν και μόνον εάν $\mathbb{P}_{X_1}(B) = \mathbb{P}_{X_2}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι οι τ.μ. X_1 και X_2 είναι **ισόνομες** (αδιάφορο σε ποιους χώρους πιθανότητας ορίζονται). [Συμβολισμός: $X_1 \stackrel{\mathbf{d}}{=} X_2$.] Άρα, **ισόνομες** είναι δύο τ.μ. X_1 και X_2 όταν[2] $F_{X_1} = F_{X_2}$ (δηλ. όταν έχουν την ίδια *σ.κ.*), και στην περίπτωση αυτή, λόγω του Πορίσματος 4.6, έπεται ότι οι X_1 και X_2 είναι ισόνομες όταν και μόνο όταν επάγουν **το ίδιο** μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

[2]Η έννοια της ισονομίας επεκτείνεται, κατά προφανή τρόπο, και για οποιοδήποτε πλήθος τ.μ.

Πόρισμα 4.7 Εάν δύο τ.μ. X και Y είναι ισόνομες, τότε για οποιαδήποτε Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, οι τ.μ. $X_1 = g(X)$ και $Y_1 = g(Y)$ είναι ισόνομες.

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν οι X_1 και Y_1 είναι τ.μ., ως Borel συναρτήσεις των τ.μ. X και Y (Πρόταση ;;(v)). Παρατηρούμε ότι για τυχόν $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{X_1}(t) &= \mathbb{P}_1[g(X) \le t] = \mathbb{P}_X\left[g^{-1}((-\infty, t])\right], \text{ και} \\ F_{Y_1}(t) &= \mathbb{P}_2[g(Y) \le t] = \mathbb{P}_Y\left[g^{-1}((-\infty, t])\right]. \end{aligned}$$

Επειδή η g είναι Borel, $g^{-1}((-\infty, t]) = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, και άρα

$$F_{X_1}(t) = \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}_Y(B) = F_{Y_1}(t),$$

επειδή, από το Πόρισμα 4.6, $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. $\square$

4.2 Θεωρήματα Ύπαρξης

Όταν μας δίδεται μία συνάρτηση F που ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης 4.2 (δηλ, τις ιδιότητες της σ.κ.), είναι πράγματι σ.κ. κάποιας τ.μ.; Σε αυτό το «αντίστροφο» ερώτημα απαντά το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.8 (ύπαρξης του Kolmogorov) Εάν η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, και $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, τότε υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και τ.μ. X στον χώρο αυτόν, τέτοια ώστε η σ.κ. της X να είναι η F.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ των Borel υποσυνόλων του $(0,1)$, με λ το μέτρο Lebesgue στο $(0,1)$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$X(\omega) = \inf\{x : F(x) \geq \omega\}, \quad 0 < \omega < 1.$$

Σταθεροποιούμε ένα $\omega \in (0,1)$, και θέτουμε $I_\omega = \{x : F(x) \geq \omega\}$. Παρατηρούμε ότι το I_ω είναι μη κενό, διότι $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1 \geq \omega$. Επίσης, το I_ω είναι διάστημα, διότι, αν $x_1 \in I_\omega$ και $x_2 > x_1$, τότε $F(x_2) \geq F(x_1) \geq \omega$, και άρα $x_2 \in I_\omega$. Φυσικά, $I_\omega \neq \mathbb{R}$, επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, και συνεπώς, υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ με $F(x) < \omega$. Άρα, $I_\omega = (b, +\infty)$, ή $I_\omega = [b, +\infty)$, για κάποιο $b \in \mathbb{R}$ (φυσικά το $b = b(\omega)$ εξαρτάται από το ω). Αν ήταν $I_\omega = (b, +\infty)$, θα είχαμε $F(b + \frac{1}{n}) \geq \omega$ για $n = 1, 2, \ldots$, και $F(b) < \omega$, το οποίο είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι η F είναι δεξιά συνεχής, διότι $\omega > F(b) = \lim\limits_n F(b + \frac{1}{n}) \geq \omega$. Άρα το I_ω είναι της μορφής

$$I_\omega = [b(\omega), +\infty),$$

και φυσικά, $\inf I_\omega = b(\omega) = X(\omega)$.
Έστω $x \in \mathbb{R}$ (τυχόν). Παρατηρούμε ότι

$$x \in I_\omega \text{ αν και μόνο αν } X(\omega) \leq x.$$

Όμως, από τον ορισμό του $I_\omega = \{x : F(x) \geq \omega\}$,

$$x \in I_\omega \text{ αν και μόνο αν } \omega \leq F(x).$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} = \{\omega : \omega \le F(x)\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{αν} \ \ F(x) = 0, \\ (0, F(x)], & \text{αν} \ \ 0 < F(x) < 1, \\ (0,1), & \text{αν} \ \ F(x) = 1. \end{cases}$$

Τελικά,

$$\mathbb{P}(X \le x) = \lambda(\{\omega : X(\omega) \le x\}) = \lambda(\{\omega : \omega \le F(x)\}) = F(x), \ \text{για κάθε}\ x \in \mathbb{R},$$

όπως έπρεπε να δειχθεί. □

Η συνάρτηση $X(\omega)$, στην προηγούμενη απόδειξη, λέγεται **γενικευμένη αντίστροφη** της F. Παρατηρήστε ότι αν η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, τότε είναι ακριβώς η αντίστροφη συνάρτηση, F^{-1}, της F, και γι΄ αυτό συμβολίζεται με F^{-1}. Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $F^{-1} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και **αριστερά συνεχής** (Άσκηση 4.2). Ας θεωρήσουμε μία τ.μ. U, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $(0,1)$, δηλ.

$$F_U(x) = \mathbb{P}[U \le x] = \begin{cases} 0, & \text{αν} \ \ x \le 0, \\ x, & \text{αν} \ \ 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{αν} \ \ x \ge 1, \end{cases}$$

η οποία προκύπτει αν στον προηγούμενο χώρο πιθανότητας ορίσουμε $X(\omega) = U(\omega) = \omega$, για $0 < \omega < 1$. Η *σ.κ.* της U συμβολίζεται με $U(0,1)$, και καλείται ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$. Το προηγούμενο θεώρημα μας διαβεβαιώνει, στην ουσία, ότι η τ.μ.

$$X = F^{-1}(U)$$

έχει σ.κ. F, όπου $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$. Αυτός είναι ο λεγόμενος **αντίστροφος μετασχηματισμός πιθανότητας**, χρήσιμος στην μη παραμετρική στατιστική, αλλά και σε άλλους τομείς της Στατιστικής Ανάλυσης.

Η επόμενη πρόταση μας διαβεβαιώνει ότι κάθε κυρτός συνδυασμός συναρτήσεων κατανομής είναι σ.κ.

Πρόταση 4.9 Εάν η F_n είναι σ.κ. για κάθε n, και $p_n \geq 0$, με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, τότε η

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x)$$

είναι σ.κ. κάποιας τ.μ. X.
[Φυσικά η πρόταση ισχύει και για πεπερασμένα το πλήθος p_j, $j = 1, \ldots, n$, θέτοντας $p_j = 0$ για $j > n$.]

Απόδειξη:

(α′ τρόπος, υπολογιστικός). Χρησιμοποιώντας το M-κριτήριο (M-test) του Weierstrass,[3] έχουμε ότι:

---

[3] αν $\lim_n x_{nk} = x_k$ για $k = 1, 2, \ldots$, και $|x_{nk}| \leq M_k$ για $n, k = 1, 2, \ldots$, και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, τότε οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ συγκλίνουν για $n = 1, 2, \ldots$, και μάλιστα, $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \mathbb{R}$.

(i) Η $F(x)$ είναι καλά ορισμένη, διότι

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1,$$

και η $\sum_{k=1}^{N} p_k F_k(x)$, ως αύξουσα και φραγμένη, συγκλίνει καθώς $N \to \infty$.

(ii) Η $F(x)$ είναι αύξουσα, διότι για $x < y$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x) \le \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(y), \quad \text{επειδή } F_k(x) \le F_k(y).$$

(iii) Η $F(x)$ είναι δεξιά συνεχής, διότι $\lim_{n\to\infty} F_k(x+\frac{1}{n}) = F_k(x)$, και $\left|p_k F_k(x+\frac{1}{n})\right| \le p_k$, με $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 < \infty$, οπότε

$$\lim_n F(x+\tfrac{1}{n}) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x+\tfrac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(x) = F(x),$$

από το κριτήριο του Weierstrass.

(iv) Κατά τον ίδιο τρόπο, επειδή $\lim_n p_k F_k(n) = p_k$ και $\lim_n p_k F_k(-n) = 0$, και, ταυτόχρονα, $|p_k F_k(n)| \le p_k$ και $|p_k F_k(-n)| \le p_k$ για $n = 1, 2, \ldots$ (με $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 < \infty$), έχουμε

$$\lim_n F(n) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad \text{και}$$

$$\lim_n F(-n) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_k(-n) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Άρα η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.8, και επομένως, υπάρχει τ.μ. X με σ.κ. την F.

(β′ τρόπος, κατασκευαστικός). Θα κατασκευάσουμε στον χώρο $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ μία τ.μ. X με σ.κ.

$$F_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x).$$

Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε την διαμέριση

$$A_1 = (0, p_1),\ A_2 = (p_1, p_1+p_2), \ldots, A_k = (p_1+\ldots+p_{k-1}, p_1+\ldots+p_k),\ \text{κ.ο.κ.},$$

όπου, φυσικά, $A_j = \varnothing$ εάν $p_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Τέλος, θέτουμε

$$A_0 = \{p_1, p_1 + p_2, \ldots\} \setminus \{1\},$$

οπότε το A_0 είναι αριθμήσιμο, και άρα, $\lambda(A_0) = 0$.

Τώρα, όπως στο Θεώρημα 4.8, θέτουμε $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$X_n(\omega) = \inf\left\{x :\ F_n(x) \geq \frac{\omega - p_1 - \ldots - p_{k-1}}{p_k}\right\},\ \text{για}\, \omega \in A_k,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

και $X_n(\omega) = 0$ για $\omega \in A_0$.

[Παρατηρήστε ότι αν $p_k = 0$ τότε $A_k = \varnothing$, οπότε δεν υπάρχει $\omega \in A_k$, και συνεπώς οι X_n είναι καλά ορισμένες.]

Όπως στο Θεώρημα 4.8, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

(i) Αν $x \geq 0$, τότε $X_n(\omega) \leq x$ όταν και μόνο όταν

$$\begin{aligned} \omega &\in A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cap (0, p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k F_n(x)]\right) \\ &= A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (p_1 + \ldots + p_{k-1}, p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k F_n(x)]. \end{aligned}$$

(ii) Αν $x < 0$, τότε $X_n(\omega) \leq x$ όταν και μόνο όταν

$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (p_1 + \ldots + p_{k-1}, p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k F_n(x)] \setminus A_0.$$

Άρα η X_n είναι τ.μ. για κάθε n, και μάλιστα,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n \leq x] &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left((p_1 + \ldots + p_{k-1}, p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k F_n(x)]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_n(x) = F_n(x). \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{A_n}(\omega) X_n(\omega).$$

Τότε έχουμε ότι:

(i) Αν $x \geq 0$, τότε $X(\omega) \leq x$ όταν και μόνο όταν

$$\begin{aligned} \omega &\in A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cap \{X_n \leq x\}\right) \\ &= A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_1 + \ldots + p_{n-1}, p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n F_n(x)]. \end{aligned}$$

(ii) Αν $x < 0$, τότε $X(\omega) \leq x$ όταν και μόνο όταν

$$\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (p_1 + \ldots + p_{n-1}, p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n F_n(x)] \setminus A_0.$$

Άρα, το σύνολο $\{X \leq x\}$ είναι Borel υποσύνολο του $(0,1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X \leq x] &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (p_1 + \ldots + p_{n-1}, p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n F_n(x)]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left((p_1 + \ldots + p_{n-1}, p_1 + \ldots + p_{n-1} + p_n F_n(x)]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x).
\end{aligned}$$

[Διότι $\lambda(A_0) = 0$, οπότε $\lambda(A_0 \cup B) = \lambda(B \setminus A_0) = \lambda(B)$, για κάθε $B \in \mathcal{B}((0,1))$.]

Προκύπτει τελικά ότι η τ.μ. X έχει σ.κ.

$$F_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. $\square$

4.3 Ανάλυση μιας Συνάρτησης Κατανομής

Οι σ.κ. χωρίζονται σε τρία είδη, τις διακριτές, τις απόλυτα συνεχείς,[4] και τις συνεχείς ιδιάζουσες. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι οποιαδήποτε σ.κ. F αναλύεται (κατά μοναδικό τρόπο) ως

$$F = p_1 F_d + p_2 F_s + p_3 F_{ac}, \tag{4.2}$$

με $p_j \geq 0$, και $p_1+p_2+p_3 = 1$, όπου η F_d είναι διακριτή (discrete) σ.κ., η F_s είναι συνεχής ιδιάζουσα (continuous singular) σ.κ., και η F_{ac} είναι απόλυτα συνεχής (absolutely continuous) σ.κ.

Στην παρούσα παράγραφο θα σκιαγραφήσουμε μία απόδειξη της αναλύσεως (4.2). Οι σχετικές έννοιες περιέχονται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.10 (διακριτή, ιδιάζουσα συνεχής, απόλυτα συνεχής συνάρτηση κατανομής)

(i) Μία τ.μ. X ονομάζεται **διακριτή** όταν υπάρχει αριθμήσιμο

[4] που συνήθως τις λέμε, εσφαλμένα, «συνεχείς»

σύνολο,[5] έστω $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{P}[X \in S] = 1$. Η αντίστοιχη σ.κ. F ονομάζεται **διακριτή συνάρτηση κατανομής.**

(ii) Μία σ.κ. F (και η αντίστοιχη τ.μ. X) ονομάζεται **ιδιάζουσα[6] συνεχής**, όταν η F είναι συνεχής,[7] και η παράγωγος υπάρχει σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο Lebesgue), και είναι σχεδόν παντού[8] ίση με το 0.
[Δηλ. αν $A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } F'(x) \text{ υπάρχει, και } F'(x) = 0\}$, τότε $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.]

[5] φυσικά, κάθε αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, και $\lambda(S) = 0$

[6] (Απλώς) Ιδιάζουσες (και όχι συνεχείς ιδιάζουσες) καλούνται εκείνες οι σ.κ. που ικανοποιούν τον ορισμό χωρίς την απαίτηση της συνέχειας, π.χ. οι διακριτές σ.κ., όπως ορίζονται στο (i).

[7] ισοδύναμα, $F(x) = F(x_-)$ για κάθε x, ή $\mathbb{P}[X = x] = 0$ για κάθε x

[8] Γενικά, λέμε ότι μία πρόταση $\mathbf{P}(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού**, όταν το συμπλήρωμα του συνόλου $\{x : \text{η } \mathbf{P}(x) \text{ ισχύει}\}$ έχει μέτρο Lebesgue 0: $\lambda(\{x : \text{η } \mathbf{P}(x) \text{ δεν ισχύει}\}) = 0$.

(iii) Μία σ.κ. F (και η αντίστοιχη τ.μ. X) ονομάζεται **απόλυτα συνεχής**, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε επιλογή ξένων ανά δύο διαστημάτων (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ (και για κάθε n), με $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμος ορισμός της απόλυτης συνέχειας μπορεί να δοθεί ως προς το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_X$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Συγκεκριμένα, η τ.μ. X (και η αντίστοιχη σ.κ. F) είναι απόλυτα συνεχής όταν και μόνο όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\lambda(B) < \delta$, να ισχύει ότι

$$\mathbb{P}_X(B) < \varepsilon.$$

Αποδεικνύεται[9] ότι και οι δύο παραπάνω (ισοδύναμοι) ορισμοί ισοδυναμούν με την συνθήκη:

Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\lambda(B) = 0$, έπεται ότι και $\mathbb{P}_X(B) = 0$.

Η ύπαρξη συνεχών ιδιαζουσών σ.κ. δεν είναι καθόλου προφανής, και ούτε μπορούμε να πούμε ότι εμφανίζονται σε πολλά ενδιαφέροντα πειράματα. Θα δώσουμε πάντως ένα παράδειγμα στο τέλος του κεφαλαίου (Πρόταση 4.26).

[9] βλ. Billingsley (1986), σελ. 434, §14.19

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι μία *σ.κ.* αναλύεται σε διακριτό και συνεχές μέρος, ως εξής:

$$F = \gamma_1 F_d + \gamma_2 F_c, \tag{4.3}$$

όπου $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, η F_d είναι διακριτή *σ.κ.*, και η F_c είναι συνεχής (continuous) *σ.κ.*:

Θεώρημα 4.11 (ανάλυση σε διακριτό και συνεχές μέρος) Αν η F είναι τυχούσα κατανομή, τότε η F αναλύεται όπως στην (4.3) κατά μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη: Θέτουμε $S = \{x \in \mathbb{R} : F(x) > F(x_-)\}$, οπότε αν η F είναι συνεχής τότε $S = \varnothing$. Γενικά όμως το S είναι αριθμήσιμο (ή πεπερασμένο) σύνολο (Άσκηση 4.1). Έστω λοιπόν $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots$, θέτουμε

$$b_j = F(x_j) - F(x_{j-}) > 0.$$

Επειδή

$$\mathbb{P}[X \in S] = \mathbb{P}\left[X \in \bigcup_{j=1}^{\infty}\{x_j\}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = x_j] = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leq 1,$$

έπεται ότι η «σειρά» $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ συγκλίνει σε κάποιο b, $0 \leq b \leq 1$. Φυσικά, η «σειρά» ανάγεται σε πεπερασμένο άθροισμα $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, όταν το σύνολο S περιέχει μόνο n στοιχεία, ενώ προφανώς $b = 0$ αν και μόνο αν $S = \varnothing$. Αν $b = 0$ (οπότε $S = \varnothing$), τότε η F είναι συνεχής (αφού το S περιέχει ακριβώς τα σημεία ασυνέχειας της F), οπότε η ανάλυση (4.3) επιτυγχάνεται κατά τετριμμένο τρόπο ($\gamma_1 = 0,\ F_d$ οποιαδήποτε διακριτή σ.κ., $\gamma_2 = 1,\ F_c = F$). Ομοίως, αν $b = 1$, έπεται ότι $\mathbb{P}(X \in S) = 1$, οπότε η F είναι διακριτή, και αναλύεται ως $F = 1 \cdot F_d + 0 \cdot F_c$, όπου F_c οποιαδήποτε συνεχής σ.κ. Οι αναλύσεις αυτές είναι «μοναδικές», με την έννοια ότι οι σταθερές γ_1, γ_2, και οι σ.κ. F_d, F_c, ορίζονται «μονοσήμαντα», όπου, φυσικά, ο προσθετέος $0 \cdot F_c$ θα πρέπει να θεωρείται «ίδιος» με τον $0 \cdot \widetilde{F}_c$, για οποιεσδήποτε συνεχείς σ.κ. $F_c, \widetilde{F}_c$, καθώς και ο όρος $0 \cdot F_d$ θα «ταυτίζεται» με τον $0 \cdot \widetilde{F}_d$. Για παράδειγμα, αν η F είναι διακριτή, δηλ. $F = F_d$, και επιπροσθέτως

$$F = \gamma_1 \widetilde{F}_d + \gamma_2 \widetilde{F}_c,$$

τότε αναγκαστικά $\gamma_2 = 0$. Πράγματι, αν ήταν $\gamma_2 > 0$, θα είχαμε $\gamma_1 \widetilde{F}_d + \gamma_2 \widetilde{F}_c = F_d$, δηλ.

$$\widetilde{F}_c = \frac{1}{\gamma_2} \left(F_d - \gamma_1 \widetilde{F}_d \right).$$

Η περίπτωση $\gamma_1 = 0$, προφανώς, αποκλείεται (αλλιώς, θα είχαμε ότι η συνεχής συνάρτηση $\gamma_2 \widetilde{F}_c$ ταυτίζεται με την μη συνεχή F_d), οπότε, αν $S,\ \widetilde{S}$ είναι τα σημεία ασυνέχειας των $F_d,\ \widetilde{F}_d$, αντίστοιχα, τότε $S = \widetilde{S}$ και $\gamma_1 = b_j / \widetilde{b}_j,\ j = 1, 2, \ldots$, όπου $b_j = F_d(x_j) - F_d(x_{j-})$, και $\widetilde{b}_j = \widetilde{F}_d(x_j) - \widetilde{F}_d(x_{j-})$,

$x_j \in S = \widetilde{S}$. Τότε όμως προκύπτει ότι

$$F_d(x) = \sum_{j:x_j \le x} b_j = \sum_{j:x_j \le x} \gamma_1 \widetilde{b}_j = \gamma_1 \widetilde{F}_d(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

και συνεπώς, $\widetilde{F}_c(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (άτοπο, διότι η $\widetilde{F}_c$ είναι σ.κ.). Άρα, $\gamma_2 = 0$, που σημαίνει ότι $F = F_d$ και $F = \widetilde{F}_d$, δηλ. $\gamma_1 = 1$ και $F_d = \widetilde{F}_d$. Ομοίως δουλεύουμε και όταν η $F = F_c$ είναι συνεχής (δηλ. όταν $b = 0$). Στην γενική περίπτωση που $b \in (0,1)$ (όπου $b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$), θέτουμε

$$F_1(x) = \sum_{j:x_j \le x} b_j, \quad \text{και} \quad F_2(x) = F(x) - F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Εξ' ορισμού, $F = F_1 + F_2$. Επίσης, $F_1(x) = \mathbb{P}[\{X \le x\} \cap \{X \in S\}]$, οπότε $0 \le F_1(x) \le F(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως η F_1 είναι αύξουσα, διότι $\{X \le x\} \cap \{X \in S\} \subset \{X \le y\} \cap \{X \in S\}$ για $x < y$, και, προφανώς, $F_1(-\infty) = 0$, $F_1(+\infty) = \mathbb{P}(X \in S) = b$. Αλλά και η $F_2(x) = \mathbb{P}[\{X \le x\} \setminus \{X \in S\}]$ είναι αύξουσα, με $F_2(-\infty) = 0$, $F_2(+\infty) = 1 - b$. Οι $F_1(x)$ και $F_2(x)$ είναι δεξιά συνεχείς, διότι $\{X \le x + \frac{1}{n}\} \cap \{X \in S\} \searrow \{X \le x\} \cap \{X \in S\}$, και $\{X \le x + \frac{1}{n}\} \setminus \{X \in S\} \searrow \{X \le x\} \setminus \{X \in S\}$. Αφού $F_2 = F - F_1$, προκύπτει ότι

$$F_2(x) - F_2(x_-) = F(x) - F(x_-) - (F_1(x) - F_1(x_-)), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Όμως, όταν $x \in S$, δηλ. όταν $x = x_j$ για κάποιο j, τότε $F_1(x_j) - F_1(x_{j-}) = b_j = F(x_j) - F(x_{j-})$, διότι $F_1(x_j) = \sum_{i:x_i \le x_j} b_i$, και

$$\begin{aligned} F_1(x_{j-}) &= \lim_n \mathbb{P}\left[\left\{X \le x_j - \tfrac{1}{n}\right\} \cap \{X \in S\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\{X < x_j\} \cap \{X \in S\}\right] \\ &= \sum_{i:x_i < x_j} b_i = F_1(x_j) - b_j. \end{aligned}$$

Επίσης, για $x \notin S$, $F_1(x_-) = \mathbb{P}\left[\{X < x\} \cap \{X \in S\}\right] = \mathbb{P}\left[\{X \le x\} \cap \{X \in S\}\right] = F_1(x)$. [Διότι $\{X < x\} \cap \{X \in S\} = \{X \le x\} \cap \{X \in S\}$ όταν $x \notin S$, αφού προφανώς $\{X < x\} \cap \{X \in S\} \subset \{X \le x\} \cap \{X \in S\}$, και $\{X \le x\} \cap \{X \in S\} \setminus \{X < x\} \cap \{X \in S\} = \{X = x\} \cap \{X \in S\} = \varnothing$.] Άρα η συνάρτηση F_1 έχει τις ίδιες ασυνέχειες με την F, και τα άλματα (πηδήματα) είναι ίσα. Επομένως, από την (4.4) έπεται ότι $F_2(x) - F_2(x_-) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλ. η F_2 είναι συνεχής. Θέτουμε τώρα

$F_d(x) = \dfrac{1}{b} F_1(x), \;\; F_c(x) = \dfrac{1}{1-b} F_2(x), \;\; \gamma_1 = b, \;\;$ και $\;\gamma_2 = 1 - b.$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η F_c είναι συνεχής σ.κ. (αφού και $F_c(+\infty) = 1$), η F_d είναι διακριτή σ.κ. (αφού τώρα $F_d(+\infty) = 1$, και η τ.μ. X_d, με σ.κ. F_d, ικανοποιεί την $\mathbb{P}(X_d \in S) = 1$, διότι $\mathbb{P}(X_d \in S) = \sum_{j:x_j \in S} (F_d(x_j) - F_d(x_{j-})) = \sum_{j:x_j \in S} \frac{b_j}{b} = \frac{b}{b} = 1$), και

$$F(x) = \gamma_1 F_d(x) + \gamma_2 F_c(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η μοναδικότητα της ανάλυσης (4.3) προκύπτει τώρα ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι η F επιδέχεται, εκτός της προηγούμενης, και την ανάλυση $F = \widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d + \widetilde{\gamma}_2 \widetilde{F}_c$, οπότε

$$\gamma_2 F_c - \widetilde{\gamma}_2 \widetilde{F}_c = \widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d - \gamma_1 F_d. \tag{4.5}$$

Το αριστερό μέλος της (4.5) είναι μία συνεχής συνάρτηση, οπότε και η $\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d - \gamma_1 F_d$ είναι συνεχής. Επομένως, $\widetilde{\gamma}_1 > 0$, επειδή $\gamma_1 = b > 0$ (αν ήταν $\widetilde{\gamma}_1 = 0$, θα έπρεπε η F_d να είναι συνεχής). Έστω S, $\widetilde{S}$, τα σημεία ασυνεχειών των F_d, $\widetilde{F}_d$, αντίστοιχα. Αν $x \in S \setminus \widetilde{S}$, τότε η $\widetilde{F}_d$ θα είναι συνεχής στο x, ενώ η F_d θα είναι ασυνεχής, άρα

$$\Big(\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d(x) - \gamma_1 F_d(x)\Big) - \Big(\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d(x_-) - \gamma_1 F_d(x_-)\Big) = -\gamma_1 \left(F_d(x) - F_d(x_-)\right) < 0 \text{ (άτοπο)}.$$

Άρα $S \setminus \widetilde{S} = \varnothing$. Ομοίως $\widetilde{S} \setminus S = \varnothing$, και συνεπώς, $S = \widetilde{S}$. Για να είναι τώρα συνεχής η $\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{F}_d(x_j) - \gamma_1 F_d(x_j)$ για κάποιο (οποιοδήποτε) $x_j \in S$, θα πρέπει τα αντίστοιχα άλματα b_j και $\widetilde{b}_j$, των F_d και $\widetilde{F}_d$, στο x_j, να ικανοποιούν την $\widetilde{\gamma}_1 \widetilde{b}_j = \gamma_1 b_j$, επομένως,

$$b_j = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{\gamma_1} \widetilde{b}_j, \text{ για κάθε } j \text{ τέτοιο ώστε } x_j \in S.$$

Συνεπώς,

$$F_d(x) = \sum_{j: x_j \le x} b_j = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{\gamma_1} \sum_{j: x_j \le x} \widetilde{b}_j = \frac{\widetilde{\gamma}_1}{\gamma_1} \widetilde{F}_d(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας όρια για $x \to +\infty$, και αφού οι $F_d, \widetilde{F}_d$ είναι σ.κ., έπεται ότι $\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1$, και τελικά, $F_d = \widetilde{F}_d$ (οπότε και $\widetilde{\gamma}_2 = 1 - \widetilde{\gamma}_1 = 1 - \gamma_1 = \gamma_2$, και $\widetilde{F}_c = F_c$), που σημαίνει ότι η ανάλυση είναι μοναδική. $\square$

Η τελική ανάλυση μιας σ.κ. γίνεται με βάση το παρακάτω θεώρημα (του Lebesgue). Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος χρησιμοποιεί αρκετά στοιχεία της θεωρίας ολοκλήρωσης (κάποια αποτελέσματα θα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο), καθώς και μερικά τεχνικά αποτελέσματα από την θεωρία διαφόρισης πραγματικών συναρτήσεων, και γιαυτό παραλείπεται.[10]

Θεώρημα 4.12 (Lebesgue) Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ μία αύξουσα, μη αρνητική, συνάρτηση, με $f(-\infty) = 0,\ f(+\infty) = \alpha < \infty$. Τότε:

(i) Η παράγωγος f' υπάρχει σχεδόν παντού, και $0 \leq f'(x) < \infty$ σχεδόν παντού.
[Δηλ. αν $A = \{x : \text{η } f'(x) \text{ υπάρχει και } 0 \leq f'(x) < \infty\}$, τότε $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$.]
Επίσης, η f' είναι ολοκληρώσιμη[11] στον $\mathbb{R}$.

---

[10] βλ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης (1988), Κεφ. 14, ή Billingsley (1986), §31

[11] δηλ. το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{\mathbb{R}} f' d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)dt < +\infty$, σύμφωνα με τους ορισμούς και τον συμβολισμό του Κεφ. ;;. Φυσικά, η ολοκληρωσιμότητα της f' συνεπάγεται ότι $f' < +\infty$ σχεδόν παντού.

(ii) Για κάθε $x_1 < x_2$ (με $-\infty \le x_1 < x_2 \le +\infty$),

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(t)dt \le f(x_2) - f(x_1).$$

(iii) Η συνάρτηση $x \mapsto F_1(x) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt$ είναι απόλυτα συνεχής.

(iv) $F_1'(x) = f'(x)$ σχεδόν παντού.
[Δηλ. αν $A = \{x \in \mathbb{R} :$ η $F_1'(x)$ και η $f'(x)$ υπάρχουν, και είναι ίσες$\}$, τότε $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.]

(v) Αν η $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχούσα, απόλυτα συνεχής, συνάρτηση, και $g'(x) = 0$ σχεδόν παντού, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $g(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
[Δηλ. η g είναι σταθερή.]

Γενικά, όταν λέμε ότι μία συνάρτηση (όχι αναγκαστικά σ.κ., ούτε καν αύξουσα) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι **απόλυτα συνεχής**, εννοούμε ότι για τυχόν $\varepsilon > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε εκλογή ξένων ανά δύο διαστημάτων $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ (και για οποιοδήποτε πλήθος n), με συνολικό μήκος μικρότερο του δ, δηλ. $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$, να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon.$$

[Πρβλ. τον Ορισμό 4.10(iii) για απόλυτα συνεχείς σ.κ.] Φυσικά, μία απόλυτα συνεχής συνάρτηση είναι **ομοιόμορφα** συνεχής (εκλέγουμε $n = 1$), ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει. Επίσης, μία συνάρτηση g που ικανοποιεί την **συνθήκη Lipschitz**,

$$\text{Υπάρχει } M > 0, \text{ τέτοιο ώστε } |g(x)-g(y)| \leq M|x-y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

είναι απόλυτα συνεχής (Άσκηση 4.3). Με βάση το Θεώρημα 4.12, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.13 (ανάλυση σε ιδιάζον και απόλυτα συνεχές μέρος) Έστω F τυχούσα σ.κ. Τότε η F αναλύεται ως

$$F = a_1 F_{ac} + a_2 F_s,$$

όπου $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1$, και η F_{ac} είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., ενώ η F_s είναι ιδιάζουσα σ.κ. (δηλ. $F_s'(x) = 0$ σχεδόν παντού). Η ανάλυση είναι μοναδική.

Απόδειξη: Αφού η F είναι αύξουσα, η F' υπάρχει σχεδόν παντού, και είναι ολοκληρώσιμη, Θεώρημα 4.12(i). Θέτουμε

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt, \quad \text{και } F_2(x) = F(x) - F_1(x).$$

Η $F_1(x)$, ως ολοκλήρωμα μη αρνητικής συνάρτησης, είναι αύξουσα και απόλυτα συνεχής, Θεώρημα 4.12(iii). Επίσης,

$$0 \leq F_1(x) \leq F(x), \tag{4.6}$$

λόγω του Θεωρήματος 4.12(ii). Επιπλέον, λόγω του Θεωρήματος 4.12(iv),

$$F_1'(x) = F'(x), \text{ σχεδόν παντού.}$$

Άρα, $F_2'(x) = (F(x) - F_1(x))' = 0$, σχεδόν παντού. Αλλά και η F_2 είναι αύξουσα, επειδή για κάθε $x < y$,

$$F_2(y) - F_2(x) = F(y) - F(x) - \int_x^y F'(t)dt \geq 0,$$

λόγω του Θεωρήματος 4.12(ii). Από την (4.6) προκύπτει ότι $F_1(-\infty) = 0$, και συνεπώς, $F_2(-\infty) = F(-\infty) - F_1(-\infty) = 0$. Επίσης η F_2 είναι δεξιά συνεχής, ως διαφορά της δεξιά συνεχούς F και της συνεχούς F_1. Αφού η F_2 είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, και $F_2(-\infty) = 0$, έπεται ότι $F_2(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $a = \lim_{x \to +\infty} F_1(x) = F_1(+\infty)$. Λόγω της (4.6), $0 \leq a \leq 1$, και άρα $F_2(+\infty) = 1 - a \in [0, 1]$, επίσης. Αν $0 < a < 1$, θέτουμε

$$F_{ac} = \frac{1}{a} F_1, \quad F_s = \frac{1}{1-a} F_2, \quad a_1 = a, \quad a_2 = 1 - a,$$

οπότε

$$F = a_1 F_{ac} + a_2 F_s,$$

με F_{ac} απόλυτα συνεχή σ.κ., και F_s σ.κ. τέτοια ώστε $F_s'(x) = 0$ σχεδόν παντού, όπως απαιτεί το θεώρημα. Η ανάλυση είναι μοναδική, διότι αν, επίσης,

$$F = \widetilde{a}_1 \widetilde{F}_{ac} + \widetilde{a}_2 \widetilde{F}_s,$$

τότε

$$\widetilde{a}_1\widetilde{F}_{ac} - a_1F_{ac} = a_2F_s - \widetilde{a}_2\widetilde{F}_s, \tag{4.7}$$

και το αριστερό μέλος της (4.7) είναι μία απόλυτα συνεχής συνάρτηση, έστω G. Τότε όμως,

$$G'(x) = \Big(a_2F_s(x) - \widetilde{a}_2\widetilde{F}_s(x)\Big)' = 0, \quad \text{σχεδόν παντού},$$

που σημαίνει ότι (Θεώρημα 4.12(v)) $G(x) = c$ (σταθερά), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$G(x) = a_2F_s(x) - \widetilde{a}_2\widetilde{F}_s(x) = c, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

και επειδή οι $\widetilde{F}_{ac}$ και F_{ac} είναι σ.κ., παίρνοντας όρια για $x \to -\infty$, έπεται ότι $c = 0$. Επομένως,

$$\widetilde{a}_1\widetilde{F}_{ac}(x) = a_1F_{ac}(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

και συνεπώς, παίρνοντας όρια για $x \to +\infty$, έπεται ότι $a_1 = \widetilde{a}_1$ (και $a_2 = \widetilde{a}_2$). Τελικά, $\widetilde{a}_2\widetilde{F}_s(x) = F(x) - \widetilde{a}_1\widetilde{F}_{ac}(x) = F(x) - a_1F_{ac}(x) = a_2F_s(x)$, δηλ. και $\widetilde{F}_s = F_s$, που σημαίνει ότι η ανάλυση είναι μοναδική. Οι περιπτώσεις $a = 1$ (οπότε $F = F_1 = F_{ac}$), και $a = 0$ (οπότε $F = F_2 = F_s$), μελετώνται κατά τον ίδιο τρόπο. [Ας σημειωθεί ότι για $a = 1$ η F είναι απόλυτα συνεχής, ενώ για $a = 0$ η F είναι ιδιάζουσα.] □

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 4.11 και 4.13, έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.14 (ανάλυση μίας συνάρτησης κατανομής) Οποιαδήποτε σ.κ. F αναλύεται ως

$$F = p_1 F_d + p_2 F_{ac} + p_3 F_s,$$

όπου $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, η F_d είναι διακριτή σ.κ., η F_{ac} είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., και η F_s είναι ιδιάζουσα συνεχής σ.κ. Η ανάλυση αυτή είναι μοναδική (εκτός αν κάποιο ή κάποια p_j είναι 0, οπότε η αντίστοιχη σ.κ. «εξαφανίζεται» από το άθροισμα, και άρα μπορεί να επιλεγεί κατά αυθαίρετο τρόπο). Η F είναι διακριτή, απόλυτα συνεχής, ή ιδιάζουσα συνεχής, εάν και μόνο εάν $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, ή $p_3 = 1$, αντίστοιχα.

Απόδειξη: Πρώτα αναλύουμε την F ως $F = \gamma_1 F_d + \gamma_2 F_c$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.11. Στην συνέχεια, αν $\gamma_2 > 0$, αναλύουμε την συνεχή σ.κ. F_c ως $F_c = a_1 F_{ac} + a_2 F_s$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.13. Αν $a_2 > 0$, έπεται ότι η $F_s = \frac{1}{a_2}(F_c - a_1 F_{ac})$ είναι συνεχής σ.κ. (αφού οι F_c και F_{ac} είναι συνεχείς), και άρα είναι συνεχής ιδιάζουσα σ.κ. Τελικά,

$$F = \gamma_1 F_d + \gamma_2 (a_1 F_{ac} + a_2 F_s) = \underbrace{\gamma_1}_{p_1} F_d + \underbrace{\gamma_2 a_1}_{p_2} F_{ac} + \underbrace{\gamma_2 a_2}_{p_3} F_s.$$

Επειδή οι δύο παραπάνω αναλύσεις είναι μοναδικές, έπεται ότι η τελική ανάλυση είναι μοναδική. Τέλος, αν η F είναι, π.χ., απόλυτα συνεχής, έπεται ότι $p_2 = 1$, διότι η F έχει τις «δύο» αναλύσεις

$$F = p_1 F_d + p_2 F_{ac} + p_3 F_s = 0 + 1 \cdot F + 0,$$

που, λόγω μοναδικότητας, πρέπει να ταυτίζονται, ενώ και αντίστροφα, αν $p_2 = 1$, έπεται ότι η $F = F_{ac}$ είναι απόλυτα συνεχής. □

4.4 Συνάρτηση Κατανομής Τυχαίου Διανύσματος

Κατ΄ αντιστοιχία με την μονοδιάστατη περίπτωση, για ένα τυχαίο διάνυσμα έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.15 (συνάρτηση κατανομής τυχαίου διανύσματος) Έστω ότι το $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα από τον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ στον $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση κατανομής του, $F_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$, ορίζεται να είναι η συνάρτηση με τύπο

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}[\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}] = \mathbb{P}[X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n], \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, επειδή η $\boldsymbol{X}$ είναι τυχαίο διάνυσμα, το $\boldsymbol{X}^{-1}((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}]) \in \mathcal{A}$. [Γράφουμε για συντομία $(-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}] = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$.] Άρα, η συνάρτηση $F_{\boldsymbol{X}}$ είναι καλά ορισμένη, αφού

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}\left[\boldsymbol{X}^{-1}((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}])\right], \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ισοδύναμα, επειδή όλες οι X_j είναι τ.μ. ($j = 1, 2, \ldots, n$),

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j\}\right].$$

Οι βασικές ιδιότητες μιας πολυδιάστατης σ.κ. είναι ανάλογες με αυτές της Πρότασης 4.2.

Πρόταση 4.16 Μία σ.κ. $F_{\boldsymbol{X}}$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(i) $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to +\boldsymbol{\infty}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = 1$.

(ii) $\lim\limits_{x_j \to -\infty} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Η $F_{\boldsymbol{X}}$ είναι δεξιά συνεχής κατά συντεταγμένη, δηλ.

$$\lim_{y_j \searrow x_j} F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}),\ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

(iv) Για κάθε $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta_{k,n}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\delta}) \geq 0,$$

όπου

$$\begin{aligned} \Delta_{k,n} \ = \ \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n : k \text{ ακριβώς από τα } \delta_j \text{ ισούνται με } a_j, \\ \text{και τα υπόλοιπα } n-k \text{ ισούνται με } b_j\}. \end{aligned}$$

Απόδειξη: (i) Εάν $\boldsymbol{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \nearrow +\boldsymbol{\infty}$ καθώς $m \to \infty$, είναι φανερό ότι

$$A_m = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j^{(m)}\} \nearrow \Omega, \ \text{ καθώς } m \to \infty,$$

και συνεπώς, $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}^{(m)}) = \mathbb{P}(A_m) \to \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
(ii) Για τυχόν $x_j^{(m)} \searrow -\infty$, $A_m = \{X_1 \le x_1\} \cap \cdots \cap \{X_{j-1} \le x_{j-1}\} \cap \{X_j \le x_j^{(m)}\} \cap \{X_{j+1} \le x_{j+1}\} \cap \cdots \cap \{X_n \le x_n\} \searrow \varnothing$, και άρα $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^{(m)}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(A_m) \to \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
(iii) Ομοίως, αν $x_j^{(m)} \searrow x_j$, $A_m = \{X_1 \le x_1\} \cap \cdots \cap \{X_{j-1} \le x_{j-1}\} \cap \{X_j \le x_j^{(m)}\} \cap \{X_{j+1} \le x_{j+1}\} \cap \cdots \cap \{X_n \le x_n\} \searrow A$, όπου $A = \bigcap_{j=1}^n \{X_j \le x_j\}$. Άρα $F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j^{(m)}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(A_m) \to \mathbb{P}(A) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$.
(iv) Η σχέση αυτή προκύπτει από την παρατήρηση ότι

$$\mathbb{P}[a_1 < X_1 \le b_1, \ldots, a_n < X_n \le b_n] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta_{k,n}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\delta}),$$

η οποία αποδεικνύεται με επαγωγή ως προς n, ή χρησιμοποιώντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, Πρόταση ;;. [Για $n = 2$ μας εξασφαλίζει ότι $\mathbb{P}[a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2] = F_{\boldsymbol{X}}(b_1, b_2) - [F_{\boldsymbol{X}}(a_1, b_2) + F_{\boldsymbol{X}}(b_1, a_2)] + F_{\boldsymbol{X}}(a_1, a_2) \ge 0$.] $\square$

Η (iv) μας εξασφαλίζει ότι η $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένη. Πράγματι, θέτοντας $a_i = -m$ για $i \ne j$, $a_j = x_j$, και $b_i = x_i$, για $i \ne j$, $b_j = y_j$ (όπου $y_j > x_j$), και παίρνοντας όρια για $m \to \infty$, προκύπτει ότι

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \le F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

Επίσης, είναι φανερό ότι αν επιλέξουμε k δείκτες $i_1, \ldots, i_k$, με $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, τότε, θέτοντας $\boldsymbol{y}_{n-k} = (x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ j \notin \{i_1, \ldots, i_k\})$, έχουμε ότι

$$\lim_{\boldsymbol{y}_{n-k} \to +\boldsymbol{\infty}} F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}[X_{i_1} \leq x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \leq x_{i_k}] = F_{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι, προφανώς, k-διάστατη σ.κ., και καλείται **περιθώρια** (marginal) σ.κ. του τυχαίου διανύσματος $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. Έτσι, οι συναρτήσεις $F_{X_1}(x_1) = F_{\boldsymbol{X}}(x_1, +\infty, \ldots, +\infty)$, $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2, +\infty, \ldots, +\infty)$, κ.ο.κ., είναι οι σ.κ. των X_1, (X_1, X_2), κ.ο.κ., και φυσικά, διέπονται από τις ίδιες ιδιότητες που περιγράφονται στην Πρόταση 4.16.

Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι μία σ.κ. $F_{\boldsymbol{X}}$ είναι συνεχής «από πάνω», δηλ. αν $\boldsymbol{x}^{(m)} \searrow \boldsymbol{x}$, τότε $F\left(\boldsymbol{x}^{(m)}\right) \searrow F(\boldsymbol{x})$, διότι

$$A_m = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j^{(m)}\} \searrow \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j\} = A, \text{ όταν } \boldsymbol{x}^{(m)} \searrow \boldsymbol{x},$$

οπότε και $\mathbb{P}(A_m) \searrow \mathbb{P}(A)$. Κατ' αναλογία με την μονοδιάστατη περίπτωση, επειδή

$$A_m = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j \leq x_j^{(m)}\} \nearrow A = \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j < x_j\}, \text{ όταν } \boldsymbol{x}^{(m)} \nearrow \boldsymbol{x},$$

έχουμε ότι[12]

$$\mathbb{P}[\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}\} \setminus \{\boldsymbol{X} < \boldsymbol{x}\}] = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) - F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_-),$$

[12] παρατηρήστε ότι για $n > 1$, το $\{\boldsymbol{X} \leq x\} \setminus \{\boldsymbol{X} < x\}$ *δεν ισούται* με $\{\boldsymbol{X} = x\}$

όπου $F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_-) = \lim_{\boldsymbol{x}^{(m)} \nearrow \boldsymbol{x}} F_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{x}^{(m)}\right)$ το «από κάτω» όριο της $F_{\boldsymbol{X}}$ στο $\boldsymbol{x}$.

Επίσης, ισχύει η εξής πρόταση.

Πρόταση 4.17 Για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$, το σύνολο

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] > 0\}$$

είναι (το πολύ) αριθμήσιμο (μπορεί να είναι και το $\varnothing$).

Απόδειξη: Έστω $B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] > 0\}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$, όπου $B_m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] \geq \frac{1}{m}\}$. Αν κάποιο B_m ήταν απειροσύνολο, θα περιείχε ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο $\Gamma_m \subset B_m$, με $\Gamma_m = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots\}$, οπότε

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in \Gamma_m] = \mathbb{P}\left[\boldsymbol{X} \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_j\}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_j] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty \quad \text{(άτοπο)}.$$

Συνεπώς, το B_m είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (για κάθε $m = 1, 2, \ldots$), οπότε το B είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση των πεπερασμένων (και άρα αριθμήσιμων) συνόλων B_m.
□

Κατ' αναλογία με την Πρόταση 4.5, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μία *σ.κ.* $F_{\boldsymbol{X}}$ επάγει ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, με τύπο

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(B) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in B], \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

[Η απόδειξη είναι ίδια με αυτήν της Πρότασης 4.5(i).] Επίσης, το μέτρο $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ και η σ.κ. $F_{\boldsymbol{X}}$ συνδέονται αμφιμονοσήμαντα (η $F_{\boldsymbol{X}}$ καθορίζει το $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, και αντίστροφα), διότι αν ένα άλλο μέτρο, έστω Q, στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, ικανοποιεί την σχέση

$$Q((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}]) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

τότε προκύπτει, όπως ακριβώς και στην Πρόταση 4.5(ii), ότι η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : Q(B) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(B)\}$$

είναι μία λ-κλάση (άρα και κλάση Dynkin) στον $\mathbb{R}^n$, που περιέχει την $\mathfrak{D}_1 = \{(-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, και άρα περιέχει και την $\delta(\mathfrak{D}_1) = \sigma(\mathfrak{D}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, διότι η $\mathfrak{D}_1$ είναι π-σύστημα. Φυσικά, δύο (ή και περισσότερα) τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{X}_1$ και $\boldsymbol{X}_2$ (ίδιας διάστασης n) από τον $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ στον $\mathbb{R}^n$, και από τον $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ στον $\mathbb{R}^n$, αντίστοιχα, καλούνται **ισόνομα** [συμβολισμός: $\boldsymbol{X}_1 \overset{\mathbf{d}}{=} \boldsymbol{X}_2$], όταν $F_{\boldsymbol{X}_1} = F_{\boldsymbol{X}_2}$, ή, ισοδύναμα, όταν $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_1}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_2})$. Έτσι, έχουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 4.18 Εάν τα n-διάστατα τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{X}_1$ και $\boldsymbol{X}_2$ είναι ισόνομα, και η $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ είναι Borel, τότε τα τυχαία διανύσματα $\boldsymbol{Y}_1 = g(\boldsymbol{X}_1)$ και $\boldsymbol{Y}_2 = g(\boldsymbol{X}_2)$ είναι (k-διάστατα) ισόνομα.

Απόδειξη: Τα $\boldsymbol{Y}_1$ και $\boldsymbol{Y}_2$ είναι, πράγματι, k-διάστατα τυχαία διανύσματα (βλ. Πόρισμα ;;). Όμως, θέτοντας $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{y}) &= \mathbb{P}_1[g(\boldsymbol{X}_1) \le \boldsymbol{y}] = \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_1}\big[g^{-1}((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{y}])\big] \\ &= \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_2}\big[g^{-1}((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{y}])\big] = \mathbb{P}_2[g(\boldsymbol{X}_2) \le \boldsymbol{y}] = F_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{y}), \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k, \end{aligned}$$

διότι $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_1}(B) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}_2}(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, και $g^{-1}((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{y}]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, αφού $(-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{y}] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, και η $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ είναι Borel. $\square$

Όπως στο Θεώρημα 4.8, όταν μας δίνεται μία συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$, που ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης 4.16, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_F$ στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}_F((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}]) = F(\boldsymbol{x}), \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Η κατασκευή είναι ανάλογη με την κατασκευή του μέτρου Lebesgue λ στον $(0,1)$ (πρβλ. Κεφάλαιο ;;), βασισμένη στο εξωτερικό μέτρο στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$:

$$\mathbb{P}_F^*(B) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} F(I_j),\ B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}, \quad B \subset \mathbb{R}^n,$$

όπου τα I_j είναι «διαστήματα» του $\mathbb{R}^n$, της μορφής $I_j = (a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \times \cdots \times (a_n^{(j)}, b_n^{(j)}] = (\boldsymbol{a}^{(j)}, \boldsymbol{b}^{(j)}]$, και ο «όγκος» $F(I)$, του $I =$

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, ορίζεται ως

$$F(I) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{\boldsymbol{\delta}\in\Delta_{k,n}} F(\boldsymbol{\delta}),$$

όπου $\Delta_{k,n}$ όπως στην Πρόταση 4.16(iv). [Συνεπώς, το $F(I)$ καθορίζεται πλήρως από την F.] Αποδεικνύεται[13] ότι το $\mathbb{P}_F^*$ είναι εξωτερικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, τα «μετρήσιμα» σύνολα

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}_F^*} \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \{B \subset \mathbb{R}^n : \mathbb{P}_F^*(B) + \mathbb{P}_F^*(B^c) = 1\}$$

δημιουργούν μία σ-άλγεβρα στον $\mathbb{R}^n$, και ότι το εξωτερικό μέτρο κάθε «διαστήματος» I ισούται με $\mathbb{P}_F^*(I) = F(I)$. Τελικά η $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_F^*}$ περιέχει την $\mathfrak{D}_1 = \{(-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}],\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, και άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και την $\sigma(\mathfrak{D}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Επομένως, ο περιορισμός της $\mathbb{P}_F^*$ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, έστω $\mathbb{P}_F$, ορίζει έναν χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_F)$, με την ιδιότητα

$$\mathbb{P}_F((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}]) = F(\boldsymbol{x}), \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

και φυσικά, αυτό είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ με αυτήν την ιδιότητα. (γιατί;) Έχουμε, λοιπόν, σκιαγραφήσει τα απαιτούμενα βήματα για την απόδειξη του εξής θεωρήματος.

Θεώρημα 4.19 (ύπαρξης του Kolmogorov) Έστω $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i)–(iv) της Πρότασης 4.16 μιας σ.κ. Τότε, υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,

[13] οι λεπτομέρειες παραλείπονται, όπως άλλωστε και στο Κεφάλαιο ;;.

και τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}), \quad \textit{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_F)$, όπως πριν. Εδώ $\Omega = \mathbb{R}^n$, οπότε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $\omega = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ για κάποια $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, με $X_j(\omega) = x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Προφανώς η X_j είναι τ.μ., διότι

$$\{\omega : X_j(\omega) \le b\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{j-1} \times (-\infty, b] \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-j},$$

και συνεπώς, $X_j^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Άρα το $\boldsymbol{X}$ είναι τυχαίο διάνυσμα, και

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}] = \mathbb{P}_F\left(\bigcap_{j=1}^{m} \{X_j \le x_j\}\right) = \mathbb{P}_F((-\boldsymbol{\infty}, \boldsymbol{x}]) = F(\boldsymbol{x}).$$

[Αυτή είναι και μία άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 4.8, αν πάρουμε $n = 1$.] $\square$

Όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, μία *σ.κ.* $F_{\boldsymbol{X}}$ (και το αντίστοιχο τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$) ονομάζεται:

(i) **διακριτή**: όταν υπάρχει αριθμήσιμο (και άρα Borel) υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in S] = 1.$$

(ii) **απόλυτα συνεχής**: όταν για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, με $\lambda(B) = 0$ (λ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), έπεται ότι και $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in B] = 0$.

(iii) **ιδιάζουσα «συνεχής»**: όταν υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, με $\lambda(B) = 0$, και, ταυτόχρονα, $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in B] = 1$, και επιπλέον ισχύει ότι $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] = 0$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Αποδεικνύεται, όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, ότι ο κυρτός συνδυασμός *σ.κ.* είναι *σ.κ.*, και ότι οποιαδήποτε *σ.κ.* F αναλύεται ως

$$F = p_1 F_d + p_2 F_{ac} + p_3 F_s,$$

όπου $p_i \geq 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, η F_d είναι διακριτή, η F_{ac} απόλυτα συνεχής, και η F_s ιδιάζουσα «συνεχής» *σ.κ.*, κατά μοναδικό τρόπο. Οι αποδείξεις (που γίνονται ιδιαίτερα πολύπλοκες λόγω του πολυδιάστατου) παραλείπονται.

Παρατηρήστε ότι στην πολυδιάστατη περίπτωση, ο ορισμός της ιδιάζουσας κατανομής δεν δίδεται μέσω της παραγώγου (αφού τώρα έχουμε πολυδιάστατη συνάρτηση), αλλά μέσω της γενικότερης ιδιότητας[14] $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in B] = 1$, για κάποιο B με $\lambda(B) = 0$. Επίσης, αποδεικνύεται (Άσκηση 4.4) ότι μία πολυδιάστατη *σ.κ.* $F_{\boldsymbol{X}}$ είναι ασυνεχής στα σημεία $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] > 0\} = B$, **χωρίς** να σημαίνει ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n \setminus B$. Επομένως, η ιδιότητα $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] = 0$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (δηλ. $B = \varnothing$), **δεν ισοδυναμεί** με το ότι η $F_{\boldsymbol{X}}$ είναι συνεχής συνάρτηση

[14] Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή η ιδιότητα είναι **ισοδύναμη** (στην μονοδιάστατη περίπτωση) με το ότι $F'_X(x) = 0$ σχεδόν παντού.

(εκτός αν $n = 1$), αλλά εκφράζει το γεγονός ότι το μέτρο $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, είναι ένα **συνεχές μέτρο**[15] πιθανότητας.

Σχετικά με την ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 4.20 (i) Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j), \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(ii) Οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες (δηλ. η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη) όταν και μόνο όταν

$$F_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x_j), \ \text{ για κάθε } n = 2, 3, \ldots, \ \text{ και για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\boldsymbol{X}_n = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(iii) Οι τ.μ. $X_i,\ i \in I$, είναι ανεξάρτητες όταν και μόνο όταν για κάθε n, και για κάθε πεπερασμένη επιλογή δεικτών $i_1, \ldots, i_n$ από το I, με $i_j \neq i_s$ για $j \neq s$,

$$F_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_{i_j}}(x_j), \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\boldsymbol{X}_n = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n})$.

[15] δηλ. μη ατομικό μέτρο. Μη ατομικό μέτρο ονομάζεται οποιοδήποτε μέτρο μ, στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, το οποίο δεν έχει **άτομα**, δηλ. μονοσύνολα $\{\omega\} \subset \Omega$, με $\mu(\{\omega\}) > 0$, με την προϋπόθεση ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα μονοσύνολα.

Απόδειξη: Είναι αναδιατύπωση του Θεωρήματος ;;, και του Πορίσματος ;; που το ακολουθεί. $\square$

4.5 Χώροι Γινόμενο

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι για δοθείσα ακολουθία (μονοδιάστατων) σ.κ., έστω $\{F_n,\ n \geq 1\}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, έτσι ώστε:

(i) η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ να είναι ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., και

(ii) $F_{X_n} = F_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Για να επιτύχουμε αυτήν την κατασκευή δίνουμε πρώτα τον ορισμό του χώρου γινόμενο δύο χώρων μέτρου $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.

Ορισμός 4.21 (χώρος γινόμενο) Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ δύο χώροι μέτρου. Κάθε σύνολο της μορφής $A_1 \times A_2 \overset{\text{ορ.}}{=} \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$, με $A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2$, ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο**. Θεωρούμε τον χώρο $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, και θέτουμε $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$, την σ-άλγεβρα στον Ω που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια (φυσικά, $A_1 \times \varnothing = \varnothing \times A_2 = \varnothing$, για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$). Η $\mathcal{A}$ λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, και συμβολίζεται με $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. [Επομένως, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \overset{\text{ορ.}}{=} \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, και, ως γνωστόν, η κλάση $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ είναι γενικά μικρότερη από την $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ – Άσκηση ;;.8.] Ο **μετρήσιμος χώρος γινόμενο** είναι ο χώρος $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ (γινόμενο των χώρων $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$). Τέλος, οποιοδήποτε μέτρο μ στον $(\Omega, \mathcal{A})$, ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \quad \text{για κάθε } A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2,$$
$$(\text{όπου } 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0),$$

(εφόσον υπάρχει τέτοιο μέτρο φυσικά), ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** των μ_1 και μ_2, και ο χώρος $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται **χώρος μέτρου γινόμενο**, των χώρων $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα ένα μέτρο μ με τις παραπάνω ιδιότητες, και μάλιστα, το μ είναι μοναδικό (και σ-πεπερασμένο), όταν τα μ_1 και μ_2 είναι σ-πεπερασμένα (δηλ., όταν υπάρχουν ακολουθίες $\{A_n,\ n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_1$, και $\{B_n,\ n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_2$, με $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega_1,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega_2$, και $\mu_1(A_n) < \infty,\ \mu_2(B_n) < \infty$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$). Συγκεκριμένα, έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.22[16] Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ δύο χώροι μέτρου. Τότε, υπάρχει ένα μέτρο μ στον χώρο $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, τέτοιο ώστε

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \quad \text{για κάθε } A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

[16] Για την απόδειξη βλ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης (1988), Κεφ. 9.

[Τα γινόμενα της μορφής $0 \cdot \infty$ και $\infty \cdot 0$ θα πρέπει να θεωρούνται 0.] Όταν τα μ_1 και μ_2 είναι σ-πεπερασμένα, τότε το μ είναι μοναδικό, και συμβολίζεται με $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ (μέτρο γινόμενο των μ_1 και μ_2). Επίσης, είναι σ-πεπερασμένο. Στην ειδική περίπτωση που τα $\mu_1 = \mathbb{P}_1$ και $\mu_2 = \mathbb{P}_2$ είναι μέτρα πιθανότητας (και άρα σ-πεπερασμένα), τότε το $\mu = \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ είναι μέτρο πιθανότητας, και ο χώρος $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ λέγεται **χώρος πιθανότητας γινόμενο** των $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$.

Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Θεώρημα 4.22 (και «ταυτίζοντας» τον $(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \Omega_3$ με τον $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$, δηλ. τα στοιχεία της μορφής $((\omega_1, \omega_2), \omega_3)$ τα θεωρούμε σαν $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, κ.ο.κ.), προκύπτει ότι αν οι χώροι $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου (ειδικότερα, αν οι χώροι $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι χώροι πιθανότητας), τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο μ (μοναδική πιθανότητα $\mathbb{P}$), στον μετρήσιμο χώρο

$$\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \right), \quad \text{όπου } \mathop{\times}_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \quad \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n,$$

τέτοιο ώστε (τέτοια ώστε) να ισχύει

$$\mu \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i), \quad \left(\mathbb{P} \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(A_i) \right), \quad \text{για κάθε } A_i \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Το μοναδικό μέτρο μ, λέγεται μέτρο γινόμενο των μ_i, $i =$

$1, 2, \ldots, n$, και συμβολίζεται ως $\mu = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$, ή $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$. Αντίστοιχα, η μοναδική πιθανότητα $\mathbb{P}$, λέγεται πιθανότητα γινόμενο των $\mathbb{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, και συμβολίζεται ως $\mathbb{P} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i$, ή $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_n$.

Φυσικά, για να είναι συμβιβαστοί οι παραπάνω ορισμοί, θα πρέπει να ισχύει, π.χ., ότι $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
&\sigma(\{A \times A_3 : A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2),\ A_3 \in \mathcal{A}_3\}) \\
&= \sigma(\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2,\ A_3 \in \mathcal{A}_3\}), \quad \text{κ.ο.κ.},
\end{aligned}$$

και μπορεί να δειχθεί ότι τέτοιες σχέσεις πράγματι ισχύουν (Άσκηση 4.5).

Οι ιδέες αυτές γενικεύονται και για ακολουθία χώρων πιθανότητας, $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. [Εδώ **απαιτούμε** τα μέτρα $\mu_n = \mathbb{P}_n$ να είναι μέτρα πιθανότητας, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.] Θέτουμε $\Omega = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_j \in \Omega_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$, οπότε ο Ω είναι ο χώρος των ακολουθιών, όπου το j-οστό στοιχείο της ακολουθίας είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο στον Ω_j, δηλ. παριστάνει την έκβαση του j-οστού πειράματος. Ένα σύνολο της μορφής

$$A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \Omega_{m+2} \times \cdots$$

ονομάζεται **μετρήσιμος κύλινδρος** με m-διάστατη βάση, όταν $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$. Ορίζουμε ως σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$, την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$, που παράγεται από όλους τους μετρησίμους κυλίνδρους:

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sigma\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \Omega_{m+2} \times \cdots : A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m\right\}\right).$$

Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{A}_0$ την οικογένεια όλων των μετρησίμων κυλίνδρων, δηλ.

$$\mathcal{A}_0 \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots : A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m\right\},$$

έτσι ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$, εξ' ορισμού. Η $\mathcal{A}_0$ είναι άλγεβρα στον Ω, αφού:

(i) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \in \mathcal{A}_0$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}_0$, τότε $A = A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \Omega_{m+2} \times \cdots$ για κάποιο $m \geq 1$, και κάποιο $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$, οπότε $A^c = A_{(m)}^c \times \Omega_{m+1} \times \cdots$, και άρα $A^c \in \mathcal{A}_0$, διότι $A_{(m)}^c \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$.

(iii) Έστω $A, B \in \mathcal{A}_0$. Τότε υπάρχουν φυσικοί m και k τέτοιοι ώστε $A = A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots$ και $B = B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots$, όπου $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$, και $B_{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k$. Αν $k \leq m$, τότε

$$B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m,$$

οπότε ο μετρήσιμος κύλινδρος B γράφεται και ως $B = B'_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots$, με $B'_{(m)} = B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m$. Τότε

$A_{(m)}B'_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$, οπότε $AB = (A_{(m)}B'_{(m)}) \times \Omega_{m+1} \times \cdots \in \mathcal{A}_0$ (ομοίως για $k \geq m$).

Τώρα, αν $A \in \mathcal{A}_0$ (δηλ. αν το A είναι μετρήσιμος κύλινδρος), τότε, εξ' ορισμού, $A = A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots$, με $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$ για κάποιο $m \geq 1$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathbb{P}(A) = (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m)\left(A_{(m)}\right), \tag{4.8}$$

όπου $\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m$ η πιθανότητα γινόμενο των $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_m$ (που έχει ήδη οριστεί στην σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$). Αν ο μετρήσιμος κύλινδρος A επιδέχεται και δεύτερη παράσταση, π.χ., αν είναι $A_{(m)} = B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m$, με $k < m$, και $B_{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k$, τότε, από την (4.8), έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m)(B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m) \\
&= (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_k)(B_{(k)})\mathbb{P}_{k+1}(\Omega_{k+1}) \cdots \mathbb{P}_m(\Omega_m) \\
&= (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_k)(B_{(k)}).
\end{aligned}$$

Άρα, η $\mathbb{P} : \mathcal{A}_0 \longrightarrow [0, 1]$ είναι καλά ορισμένη (ανεξάρτητη της παράστασης του μετρησίμου κυλίνδρου A). Επίσης,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots) = \mathbb{P}_1(\Omega_1) = 1.$$

Τέλος, αν $A, B \in \mathcal{A}_0$, με $AB = \varnothing$, τότε έχουμε ότι $A = A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots$, $B = B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots$ (για κάποιο $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$, και $B_{(k)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_k$), οπότε, αν π.χ.

$k \le m$,

$$
\begin{aligned}
A &= A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots, \\
B &= (B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m) \times \Omega_{m+1} \times \cdots = B'_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots,
\end{aligned}
$$

όπου $B'_{(m)} = B_{(k)} \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_m \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$. Τότε όμως, η συνθήκη $AB = \varnothing$ ισοδυναμεί με την $A_{(m)} B'_{(m)} = \varnothing$, και συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}\left(\left(A_{(m)} \cup B'_{(m)}\right) \times \Omega_{m+1} \times \cdots\right) \\
&= (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m)\left(A_{(m)} \cup B'_{(m)}\right) \\
&= (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m)\left(A_{(m)}\right) + (\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m)\left(B'_{(m)}\right) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).
\end{aligned}
$$

Επομένως, το $\mathbb{P}$ είναι ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$. Όμως, στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$ ισχύει το εξής σημαντικό λήμμα.

Λήμμα 4.23[17] Αν η ακολουθία μετρησίμων κυλίνδρων, $\{A_n,\ n \ge 1\} \subset \mathcal{A}_0$, είναι τέτοια ώστε $A_n \searrow \varnothing$, τότε $\mathbb{P}(A_n) \to 0$.

Με βάση το Λήμμα 4.23, προκύπτει ότι το $\mathbb{P}$ είναι αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$. Πράγματι, αν $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ (όπου $B \in \mathcal{A}_0,\ B_k \in \mathcal{A}_0,\ k = 1, 2 \ldots$), και $B_i B_j =$

[17] Η απόδειξη αυτού του λήμματος, το οποίο στην ουσία είναι το Θεώρημα Tychonov, *«Το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών συνόλων* (αριθμησίμου πλήθους) *είναι συμπαγές»*, υπάρχει στον Billingsley (1986), σελ. 514-515.

$\varnothing$ για $i \neq j$, τότε $A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k = B \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ (οπότε $A_n \in \mathcal{A}_0$ για $n = 1, 2, \ldots$, και $A_n \searrow \varnothing$). Άρα, από το Λήμμα 4.23, $\mathbb{P}(A_n) \to 0$. Όμως,

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B) - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k),$$

διότι $B = (B_1 \cup \cdots \cup B_n) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) = B_1 \cup \cdots \cup B_n \cup A_n$, και $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_n)$, λόγω πεπερασμένης προσθετικότητας. Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) \to \mathbb{P}(B),$$

δηλαδή $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k)$, και το B είναι σ-προσθετικό στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$.

Ανάλογα με την περίπτωση του μέτρου Lebesgue, μπορούμε να επεκτείνουμε το μέτρο $\mathbb{P}$ στην $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$, θέτοντας για $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k), \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \; A_k \in \mathcal{A}_0, \; k = 1, 2, \ldots \right\},$$

και παρατηρώντας ότι η $\mathbb{P}^*$ είναι εξωτερικό μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, και ότι η οικογένεια των μετρησίμων συνόλων,

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}^*} \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \left\{ A \in \mathcal{P}(\Omega) : \mathbb{P}^*(A) + \mathbb{P}^*(A^c) = 1 \right\},$$

είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{A}_0$ (και συνεπώς περιέχει και την $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$). Τελικά, ο περιορισμός της $\mathbb{P}^*$ στην

$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ είναι το ζητούμενο μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{A})$. [Και, φυσικά, είναι μοναδικό, αφού η $\mathcal{A}_0$, ως άλγεβρα, είναι π-σύστημα.]

Έχουμε λοιπόν σκιαγραφήσει την απόδειξη του εξής σημαντικού αποτελέσματος:

Θεώρημα 4.24 (απειροδιάστατος χώρος γινόμενο πιθανότητας) Εάν $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ είναι μία ακολουθία χώρων πιθανότητας $(n = 1, 2, \ldots)$, τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ στον $\big(\underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} \Omega_n, \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n\big) = (\Omega, \mathcal{A})$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}\left(A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots\right) = \left(\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_m\right)\left(A_{(m)}\right),$$

για κάθε μετρήσιμο κύλινδρο $A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \cdots$, με $A_{(m)} \in \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_m$. Το $\mathbb{P}$ λέγεται μέτρο γινόμενο, ή **πιθανότητα γινόμενο**, των $\mathbb{P}_n$, $n \geq 1$, και συμβολίζεται, μερικές φορές, με $\mathbb{P} = \underset{n=1}{\overset{\infty}{\times}} \mathbb{P}_n$, ή $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \times \cdots$.

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, αποδεικνύεται εύκολα το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.25 (ύπαρξης ανεξάρτητης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών) Έστω $\{F_n,\ n \geq 1\}$ τυχούσα ακολουθία (μονοδιάστατων) σ.κ. Τότε, υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, έτσι ώστε η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ να είναι ανεξάρτητη, και $F_{X_n} = F_n$ για κάθε n.

Απόδειξη: Έστω $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n) = ((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$ για κάθε n, και ας θεωρήσουμε τον χώρο γινόμενο

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ((0,1)^\infty, \mathcal{B}((0,1)^\infty), \lambda^\infty)\,,$$

όπου

$$(0,1)^\infty \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathop{\times}_{n=1}^{\infty}(0,1),\ \ \mathcal{B}((0,1)^\infty) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \bigotimes_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}((0,1)),\ \ \lambda^\infty \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathop{\times}_{n=1}^{\infty}\lambda,$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 4.24. Εδώ ο χώρος $\Omega = (0,1)^\infty$ περιέχει τις ακολουθίες $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$, όπου $0 < \omega_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $X_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με

$$X_j(\omega) = \inf\{x : F_j(x) \geq \omega_j\}\,,\ j = 1, 2, \ldots\ .$$

Άρα, $X_j = F_j^{-1}(Y_j)$, όπου $Y_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, με $Y_j(\omega) = \omega_j,\ j = 1, 2, \ldots$. Οι συναρτήσεις F_j^{-1} είναι οι γενικευμένες αντίστροφες των σ.κ. F_j (βλ. απόδειξη του Θεωρήματος 4.8, και σχόλια που ακολουθούν). Οι Y_j είναι τ.μ., διότι, για $0 < b_j < 1$,

$$
\begin{aligned}
\{\omega \in \Omega : Y_j(\omega) \leq b_j\} &= \{\omega \in \Omega : \omega_j \leq b_j\} \\
&= \underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{j-1} \times (0, b_j] \times (0,1) \times \cdots \\
&\in \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \\
&\subset (\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_j) \times \Omega_{j+1} \times \cdots \\
&\subset \mathcal{A},
\end{aligned}
$$

ενώ, προφανώς, το σύνολο $\{\omega : Y_j \leq b_j\}$ είναι το $\varnothing$, όταν $b_j \leq 0$, και το Ω, όταν $b_j \geq 1$.

Η ακολουθία $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη. Πράγματι, αφού

$$
\sigma(Y_j) = Y_j^{-1}\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = \underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{j-1} \times \mathcal{B}((0,1)) \times (0,1) \times \cdots,
$$

έπεται ότι το τυχόν $A_j \in \sigma(Y_j)$ θα είναι της μορφής

$$
A_j = \underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{j-1} \times B_j \times (0,1) \times \cdots
$$

για κάποιο $B_j \in \mathcal{B}((0,1))$. Επομένως, για οποιαδήποτε $A_1 \in \sigma(Y_1), \ldots, A_n \in \sigma(Y_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) &= \lambda^\infty\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \\
&= \lambda^\infty(B_1 \times \cdots \times B_n \times (0,1) \times \cdots) \\
&= (\lambda \times \cdots \times \lambda)(B_1 \times \cdots \times B_n) \\
&= \lambda(B_1) \cdots \lambda(B_n) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \lambda^\infty(\underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{j-1} \times B_j \times (0,1) \times \cdots) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \lambda^\infty(A_j) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j).
\end{aligned}$$

Άρα, οι $Y_1, \ldots, Y_n$ είναι ανεξάρτητες για κάθε n, και συνεπώς η ακολουθία $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη. [Ας σημειωθεί ότι η ανεξαρτησία των $Y_1, \ldots, Y_n$ μπορεί να αποδειχθεί και άμεσα, από το Θεώρημα 4.20(i), αφού $F_{Y_j}(y_j) = \max\{0, \min\{y_j, 1\}\}$, $y_j \in \mathbb{R}$, δείχνοντας απευθείας ότι $F_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = F_{Y_1}(y_1) \cdots F_{Y_n}(y_n)$.]

Αφού $X_n = F_n^{-1}(Y_n)$, και η F_n^{-1}, ως αύξουσα, είναι Borel συνάρτηση, έπεται ότι η X_n είναι $\sigma(Y_n)$–μετρήσιμη, και συνεπώς, οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., για κάθε $n \geq 2$. Άρα, η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη.

Τέλος, επειδή για κάθε $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned}\{\omega : X_n(\omega) \leq x\} &= \{\omega : \omega_n \leq F_n(x)\} \\ &= \underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{n-1} \times (0, F_n(x)] \times (0,1) \times \cdots\end{aligned}$$

για κάθε[18] $x \in \mathbb{R}$ (πρβλ. Θεώρημα 4.8), έχουμε ότι για κάθε n, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) &= \lambda^\infty(\underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{n-1} \times (0, F_n(x)] \times (0,1) \times \cdots) \\ &= (\underbrace{\lambda \times \cdots \times \lambda}_{n})(\underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{n-1} \times (0, F_n(x)]) \\ &= \lambda((0,1)) \cdots \lambda((0,1))\lambda((0, F_n(x)]) \\ &= F_n(x). \quad \square\end{aligned}$$

Στην παραπάνω απόδειξη κατασκευάσαμε, στην ουσία, μία ακολουθία ανεξαρτήτων τ.μ. $\{Y_n,\ n \geq 1\}$, με κοινή σ.κ. την ομοιόμορφη στο $(0,1)$, οπότε η ακολουθία X_n προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό πιθανότητας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ανεξάρτητη ακολουθία ομοιομόρφων τ.μ. $\{Y_n,\ n \geq 1\}$, όπως στην προηγούμενη απόδειξη, **χωρίς να αναφερθούμε καν σε χώρο γινόμενο.** Είναι σαφές ότι, αν το πετύχουμε αυτό, τότε η ακολουθία τ.μ. $\{X_n = F_n^{-1}(Y_n),\ n \geq 1\}$, όπως ορί-

[18]όπου $(0, F_n(x)] = (0,1)$, στην περίπτωση που $F_n(x) = 1$

στηκε προηγουμένως, θα είναι ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., με σ.κ. $\{F_{X_n} = F_n,\ n \geq 1\}$. Μάλιστα, είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει στον χώρο $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, και στην πραγματικότητα, για την όλη κατασκευή απαιτείται μόνο η ύπαρξη μιας ανεξάρτητης ακολουθίας δοκιμών Bernoulli,[19] και συγκεκριμένα, μιας ανεξάρτητης ακολουθίας τ.μ. $\{Z_n,\ n \geq 1\}$, για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{P}[Z_n = 0] = \mathbb{P}[Z_n = 1] = 1/2$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

β′ απόδειξη του Θεωρήματος 4.25: Θεωρούμε τις συναρτήσεις Rademacher, δηλ. την ακολουθία τ.μ. $\{R_n(\omega),\ n \geq 1\}$, που ορίζεται στον χώρο $((0,1), \mathcal{B}((0,1)), \lambda)$, όπως στην Άσκηση ;;.5. Μπορεί να δειχθεί, σχετικά εύκολα, ότι η ακολουθία αυτή είναι ανεξάρτητη, και ότι για κάθε n, η R_n παίρνει τις τιμές ± 1, καθεμία με πιθ. 1/2. Συνεπώς, η ακολουθία τ.μ. $\{Z_n = (R_n + 1)/2,\ n \geq 1\}$, αποτελεί ακολουθία δοκιμών Bernoulli, και μάλιστα, $\mathbb{P}[Z_n = 0] = \mathbb{P}[Z_n = 1] = 1/2$. Αφού οι τ.μ.

[19] δηλ. μιας ακολουθίας ανεξαρτήτων ρίψεων ενός νομίσματος, με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας, σε κάθε δοκιμή. Μάλιστα, όταν η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας ισούται με 1/2, τότε το νόμισμα καλείται «δίκαιο».

$$\begin{array}{ccccc}
Z_1 & Z_3 & Z_5 & Z_7 & \cdots \\
Z_2 & Z_6 & Z_{10} & Z_{14} & \cdots \\
Z_4 & Z_{12} & Z_{20} & Z_{28} & \cdots \\
Z_8 & Z_{24} & Z_{40} & Z_{56} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
Z_{2^{n-1}} & Z_{3\cdot 2^{n-1}} & Z_{5\cdot 2^{n-1}} & Z_{7\cdot 2^{n-1}} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

είναι ανεξάρτητες, έπεται, από το Θεώρημα ;;, ότι οι σ-άλγεβρες

$$\mathcal{A}_n = \sigma(Z_{(2k-1)\cdot 2^{n-1}},\ k \geq 1), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

που παράγονται από τη n-οστή γραμμή, είναι ανεξάρτητες. Θέτουμε τώρα

$$Y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} Z_{(2k-1)\cdot 2^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Είναι σαφές ότι η σειρά που ορίζει την Y_n συγκλίνει απολύτως, επειδή $0 \leq Z_i \leq 1$ για κάθε i. Αφού

$$Y_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} Z_{(2k-1)\cdot 2^{n-1}},$$

και η τυχαία μεταβλητή

$$W_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} Z_{(2k-1)\cdot 2^{n-1}}$$

είναι $\mathcal{A}_n$–μετρήσιμη (αφού είναι συνάρτηση των N πρώτων τ.μ. της n-οστής γραμμής), έπεται ότι η Y_n, ως όριο $\mathcal{A}_n$–μετρησίμων τ.μ., είναι $\mathcal{A}_n$–μετρήσιμη, δηλ. $\sigma(Y_n) \subset \mathcal{A}_n$. Επομένως, η ακολουθία $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη, επειδή οι σ-άλγεβρες $\mathcal{A}_n,\ n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες. Είναι, τώρα, σχετικά εύκολο να δειχθεί ότι η Y_n έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ (βλ. Άσκηση 4.12). $\square$

4.6 Ιδιάζουσα Συνεχής Συνάρτηση Κατανομής

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό δίνοντας ένα παράδειγμα ιδιάζουσας συνεχούς σ.κ.

Πρόταση 4.26 (ιδιάζουσα συνεχής συνάρτηση κατανομής) Έστω $\{X_n,\ n \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{P}[X_n = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0]$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου $0 < p < 1$ σταθερό, $p \neq 1/2$. [Ακολουθία δοκιμών Bernoulli(p).] Θεωρούμε την τ.μ.

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n.$$

Τότε η X έχει ιδιάζουσα συνεχή σ.κ., δηλ. είναι ιδιάζουσα συνεχής τ.μ.

Απόδειξη: Επειδή για οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n,\ n \geq 1\}$ από 0 και 1, η σειρά, που ορίζει την X, συγκλίνει σε κάποιο όριο $x \in [0,1]$, έπεται ότι αν ορίσουμε όλες τις τ.μ. X_n σε έναν χώρο πιθανότητας, έτσι ώστε $X_n(\omega) \in \{0,1\}$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, και για κάθε $\omega \in \Omega$ (αυτό είναι εφικτό λόγω του Θεωρήματος 4.25–βλ. και β′ απόδειξη, παραπάνω), οι

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} X_k$$

θα είναι $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$–μετρήσιμες (άρα τ.μ.), και συνεπώς, η $X = \lim_n Y_n$ είναι τ.μ. στον χώρο αυτό. Ας σημειωθεί ότι η απαίτηση $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, και για κάθε $\omega \in \Omega$, δεν βλάπτει τη γενικότητα, διότι δεν επηρεάζεται η σ.κ. F_X της τ.μ. X, αν αντικαταστήσουμε την ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$, της πρότασης, με την ανεξάρτητη ακολουθία $\{Z_n,\ n \geq 1\}$, όπου, π.χ., $Z_n(\omega) = X_n(\omega)$, αν $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$, και $Z_n(\omega) = 0$, αν $X_n(\omega) \notin \{0, 1\}$. Πράγματι, θέτοντας

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} Z_n,$$

έχουμε ότι $\mathbb{P}[X_n \neq Z_n] = 0$ για κάθε n, και άρα, $\mathbb{P}[X \neq Z] = 0$, οπότε $F_Z(x) = \mathbb{P}[Z \leq x] = \mathbb{P}[Z \leq x, Z = X] + \mathbb{P}[Z \leq x, Z \neq X] = \mathbb{P}[X \leq x, Z = X] + 0 = \mathbb{P}[X \leq x] = F_X(x)$, όπως εύκολα διαπιστώνεται, επειδή το ενδεχόμενο $\{Z = X\}$ έχει πιθανότητα 1.

Έστω λοιπόν F_X η σ.κ. της X. Προφανώς $F_X(0_-) = 0$, $F_X(1) = 1$. Αν θεωρήσουμε έναν αριθμό $x \in [0, 1]$, τότε το δυαδικό του ανάπτυγμα, $x = 0.x_1 x_2 \cdots$ (όπου $x_j \in \{0, 1\}$), ισοδυναμεί με την αναπαράσταση

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n.$$

Άρα, οι άπειρες δοκιμές Bernoulli(p) καθορίζουν τυχαία έναν αριθμό X στο $[0, 1]$, που παριστάνεται ως $X = 0.X_1X_2\cdots$ (στο δυαδικό ανάπτυγμα). Είναι γνωστό ότι κάθε αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει το πολύ δύο δυαδικά αναπτύγματα αυτού του τύπου, (και μάλιστα, αυτοί που έχουν δύο αναπτύγματα είναι ακριβώς εκείνοι που είναι της μορφής $k/2^n$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, π.χ. $1/4 = 0.01 = 0.00111\cdots$). Λόγω ανεξαρτησίας έχουμε

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = p^k(1-p)^{n-k} = p^{\sum_{j=1}^n x_j}(1-p)^{n-\sum_{j=1}^n x_j}$$

για οποιαδήποτε $x_j \in \{0, 1\}$, με $\sum_{j=1}^n x_j = k$ (δηλ. k από τα x_j είναι «1» και $n - k$ από τα x_j είναι «0»). Είναι σαφές ότι για τυχόν $x \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n\right] = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, \ldots],$$

όταν ο x έχει το μοναδικό ανάπτυγμα

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n.$$

Όμως, και όταν ο x έχει δύο αναπτύγματα (και άρα είναι της μορφής $x = k/2^n$), τότε

$$x = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} x_j + \frac{1}{2^n} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} x_j + \frac{1}{2^n} 0 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$

(δηλ., σε δυαδική μορφή, $x = 0.x_1 \cdots x_{n-1} 1 = 0.x_1 \cdots x_{n-1} 0111 \cdots$), οπότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = x] &= \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 1, X_{n+1} = 0, X_{n+2} = 0, \ldots] \\ &\quad + \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 0, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1, \ldots].\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_n,\ n \geq 1\}$, αποτελούμενη από «0» και «1»,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_n = x_n,\ n \geq 1] &= \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n = x_n\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \bigcap_{j=1}^{n} \{X_j = x_j\}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^{n} \{X_j = x_j\}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} p^{\sum_{j=1}^n x_j} (1-p)^{n - \sum_{j=1}^n x_j} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\max\{p, 1-p\}\right)^n = 0.\end{aligned}$$

Επομένως, $\mathbb{P}[X = x] = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ (και όταν ο x έχει δύο αναπτύγματα), και προφανώς, $\mathbb{P}[X = x] = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η F_X είναι **συνεχής** σ.κ. Φυσικά,

$F_X(x) = 1$ για κάθε $x \geq 1$, και $F_X(x) = 0$ για κάθε $x < 0$. Τελικά, και $F_X(0) = \mathbb{P}[X < 0] + \mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[X = 0] = 0$. Θεωρούμε τώρα τα διαστήματα

$$I_n^k = \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \quad n = 0, 1, \ldots \ .$$

Τότε, $X \in I_n^k$ όταν και μόνο όταν $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, με $\sum_{j=1}^n x_j/2^j = k/2^n$ (παρατηρήστε ότι υπάρχει μόνο μία «πεπερασμένη ακολουθία», $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$, που ικανοποιεί αυτήν την σχέση), και επιπροσθέτως, $X_j = 1$ για τουλάχιστον ένα $j \in \{n+1, n+2, \ldots\}$. Θέτοντας, λοιπόν, $B = \bigcup_{j=n+1}^\infty \{X_j = 1\} = (\bigcap_{j=n+1}^\infty \{X_j = 0\})^c$, τα παραπάνω γράφονται ως

$$\{X \in I_n^k\} = \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \cap B,$$

με $x_1, \ldots, x_n$ και B όπως προηγουμένως. Αφού, προφανώς, $\mathbb{P}(B) = 1$, έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} F_X\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) - F_X\left(\tfrac{k}{2^n}\right) &= \mathbb{P}[X \in I_n^k] \\ &= \mathbb{P}[\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \cap B] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\ &= p^{\sum_{j=1}^n x_j}(1-p)^{n - \sum_{j=1}^n x_j} > 0, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η F_X είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[0,1]$, αφού για $0 \leq x < y \leq 1$, μπορούμε να παρεμβάλλουμε ένα $I_n^k \subset (x, y]$.

Αφού η F_X είναι αύξουσα, θα πρέπει $F'_X(x) \geq 0$ (όπου υπάρχει), και σύμφωνα με το Θεώρημα 4.12(i), η $F'_X(x)$ υπάρχει, και είναι πεπερασμένη, σχεδόν παντού.

Η $F'_X(x)$ υπάρχει για $x < 0$, και για $x > 1$, και προφανώς είναι 0. Ας διαλέξουμε ένα $x \in (0,1)$, και ας υποθέσουμε ότι το x επιδέχεται μόνο μία έκφραση, της παραπάνω μορφής, στο δυαδικό του ανάπτυγμα, δηλ.

$$x \in [0,1] \smallsetminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{2^n} \left\{ \frac{k}{2^n} \right\} = [0,1] \smallsetminus N,$$

όπου το N είναι αριθμήσιμο (και συνεπώς, $\lambda(N) = 0$). Για το συγκεκριμένο x, ας υποθέσουμε ότι, πράγματι, υπάρχει (και είναι πεπερασμένη) η $F'_X(x)$. Αν καταφέρουμε να δείξουμε ότι, για κάθε τέτοιο x, ισχύει ότι $F'(x) = 0$, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι η $F'_X(x)$ είναι 0 στο σύνολο

$$\begin{aligned} &((-\infty,0) \cup ([0,1] \smallsetminus N) \cup (1,+\infty)) \cap \{x : F'_X(x) \text{ υπάρχει (πεπερασμένη)}\} \\ &= \{x : F'_X(x) \text{ υπάρχει (πεπερασμένη)}\} \smallsetminus N. \end{aligned}$$

Θα προκύψει τότε ότι η $F'_X(x)$ είναι 0, σχεδόν παντού (στο $\mathbb{R}$), διότι

$$\begin{aligned} &(\{x : F'_X(x) \text{ υπάρχει (πεπερασμένη)}\} \smallsetminus N)^c \\ &= \{x : F'_X(x) \text{ δεν υπάρχει (ή είναι } +\infty)\} \cup N, \end{aligned}$$

και $\lambda(N) = 0$ (το N είναι αριθμήσιμο), $\lambda\left(\{x : F'_X(x) \text{ δεν υπάρχει (ή είναι } +\infty)\}\right) = 0$, από το Θεώρημα 4.12(i). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν

$x \in [0,1] \smallsetminus N$, και η $F'_X(x)$ υπάρχει, τότε $F'_X(x) = 0$. Υποθέτουμε, αντιθέτως, ότι $F'_X(x) > 0$, και διαλέγουμε την ακολουθία ακεραίων $k_n = k_n(x)$, $0 \leq k_n \leq 2^n - 1$, έτσι ώστε

$$x \in \left(\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n + 1}{2^n}\right) = I_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Αφού $x \notin N$, έπεται ότι για κάθε n, θα υπάρχει ακέραιος k_n, τέτοιος ώστε $x \in I_n$. Όμως, επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει η

$$F'_X(x) = \lim_{y \searrow x} \frac{F_X(y) - F_X(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{F_X(x) - F_X(y)}{x - y},$$

και, από τον ορισμό των k_n,

$$a_n = \frac{k_n}{2^n} \nearrow x, \quad b_n = \frac{k_n + 1}{2^n} \searrow x,$$

προκύπτει ότι

$$\frac{F_X(x) - F_X(a_n)}{x - a_n} \to F'_X(x), \quad \text{και} \quad \frac{F_X(b_n) - F_X(x)}{b_n - x} \to F'_X(x).$$

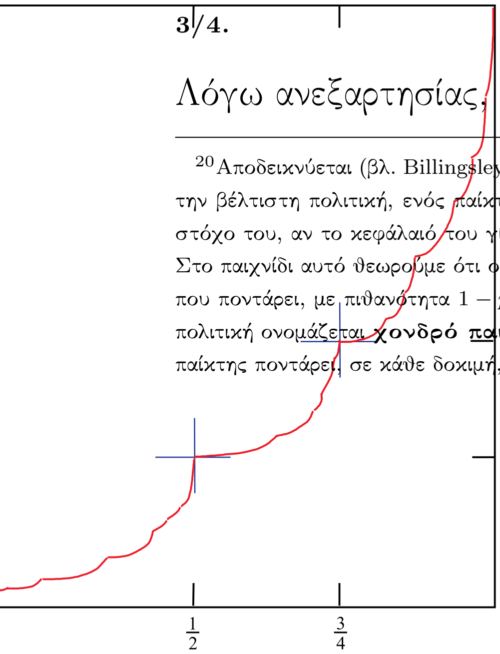
Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F_X(b_n) - F_X(a_n)}{b_n - a_n} - F'_X(x) \right| \\
&\quad = \left| \left(\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right) \left(\frac{F_X(b_n) - F_X(x)}{b_n - x}\right) - \left(\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right) F'_X(x) \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) \left(\frac{F_X(x) - F_X(a_n)}{x - a_n}\right) - \left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) F'_X(x) \right| \\
&\quad \leq \left(\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right) \left| \frac{F_X(b_n) - F_X(x)}{b_n - x} - F'_X(x) \right| \\
&\qquad + \left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) \left| \frac{F_X(x) - F_X(a_n)}{x - a_n} - F'_X(x) \right| \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty,
\end{aligned}$$

διότι
$$0 \leq \frac{x-a_n}{b_n-a_n} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{b_n-x}{b_n-a_n} \leq 1,$$
επειδή $a_n < x < b_n$. Συνεπώς,
$$2^n\left(F_X\left(\frac{k_n+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{k_n}{2^n}\right)\right) = \frac{F_X(b_n)-F_X(a_n)}{b_n-a_n} \to F'_X(x),$$
που σημαίνει ότι (αφού η F_X είναι συνεχής)
$$2^n\,\mathbb{P}[X \in I_n] \to F'_X(x) > 0, \ \ \text{καθώς } n \to \infty.$$
Άρα,
$$\frac{2^{n+1}\,\mathbb{P}[X \in I_{n+1}]}{2^n\,\mathbb{P}[X \in I_n]} \to 1, \ \ \text{καθώς } n \to \infty,$$
που σημαίνει ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}[X \in I_{n+1}]}{\mathbb{P}[X \in I_n]} = \frac{1}{2}.$$
Αφού
$$I_{n+1} = \left(\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) \subset \left(\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n}\right) = I_n,$$
προκύπτει ότι
$$\gamma_n = \frac{\mathbb{P}[X \in I_{n+1}]}{\mathbb{P}[X \in I_n]} = \mathbb{P}[X \in I_{n+1} | X \in I_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}] \in \{p, 1-p\},$$
όπου $x_{n+1} = 0$ ή 1, για $k_{n+1} = 2k_n$ ή $k_{n+1} = 2k_n+1$, αντίστοιχα. Επομένως, όταν $p \neq 1/2$, η ακολουθία γ_n αποκλείεται να συγκλίνει στο $1/2$, αφού οι μόνες δυνατότητες είναι $\lim \gamma_n = p$, $\lim \gamma_n = 1-p$, και $\min\{p, 1-p\} = \liminf \gamma_n <$

$\limsup \gamma_n = \max\{p, 1-p\}$ (άτοπο). Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή εσφαλμένα υποθέσαμε ότι $F'_X(x) > 0$. Επομένως, όταν $p \in (0,1) \setminus \{1/2\}$, τότε $F'_X(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1] \setminus N$, για το οποίο υπάρχει (και είναι πεπερασμένη) η παράγωγος, και συνεπώς η F_X είναι ιδιάζουσα σ.κ. $\square$

ΣΧΗΜΑ 4.1. Η συνάρτηση κατανομής[20] $F_X(x)$, $x\in[0,1]$, για $p = 3/4$.



Λόγω ανεξαρτησίας, προκύπτει εύκολα ότι για $0 \le x \le 1/2$,

[20] Αποδεικνύεται (βλ. Billingsley, 1986) ότι η τιμή $F_X(x)$ ισούται με την πιθανότητα επιτυχίας, υπό την βέλτιστη πολιτική, ενός παίκτη (τζογαδόρου) με αρχικό κεφάλαιο x, ο οποίος επιτυγχάνει τον στόχο του, αν το κεφάλαιό του γίνει κάποτε 1, ενώ καταστρέφεται, αν το κεφάλαιό του μηδενιστεί. Στο παιχνίδι αυτό θεωρούμε ότι ο παίκτης κερδίζει, σε κάθε (ανεξάρτητη) δοκιμή, ποσό ίσο με αυτό που ποντάρει, με πιθανότητα $1-p$, ενώ χάνει το ποσό που ποντάρει, με πιθανότητα p. Η βέλτιστη πολιτική ονομάζεται **χονδρό παιχνίδι** (bold play), και η πιθανότητα $F_X(x)$ επιτυγχάνεται όταν ο παίκτης ποντάρει, σε κάθε δοκιμή, το ποσό $\min\{a, 1-a\}$, όπου a το τρέχον κεφάλαιό του.

$$\mathbb{P}[X \le x] = \mathbb{P}\left[X_1 = 0, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n \le x\right] = (1-p)\,\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_{n+1} \le 2x\right],$$

και επειδή η

$$\widetilde{X} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_{n+1}$$

έχει την ίδια σ.κ., $F_{\widetilde{X}} = F_X$, συμπεραίνουμε ότι

$$F_X(x) = (1-p)F_X(2x), \quad 0 \le x \le 1/2.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο,

$$F_X(x) = (1-p) + pF_X(2x-1), \quad 1/2 \le x \le 1,$$

οπότε παίρνουμε τον «αναγωγικό» τύπο:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le 0, \\ (1-p)F_X(2x), & \text{αν } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ (1-p) + pF_X(2x-1), & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1, \\ 1, & \text{αν } x \ge 1. \end{cases}$$

Ασκήσεις Κεφ. 4:

4.1. Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, μία αύξουσα συνάρτηση. Τότε το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{R} :$ η f είναι ασυνεχής στο $x\}$ είναι (το πολύ) αριθμήσιμο.

4.2. Έστω F τυχούσα σ.κ., και $F^{-1}(\omega) = \inf\{x : F(x) \ge \omega\}$, $0 < \omega < 1$, όπως στο Θεώρημα 4.8.

(i) Να δείξετε ότι η F^{-1} είναι **αριστερά συνεχής**, αύξουσα, συνάρτηση. Πότε η F^{-1} είναι συνεχής;

(ii) Δείξτε ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 4.8 μπορεί να γίνει κατά τον ίδιο τρόπο, θέτοντας $\widetilde{F}^{-1}(\omega) = \sup\{x : F(x) \leq \omega\}$, $0 < \omega < 1$, και $X(\omega) = \widetilde{F}^{-1}(\omega)$. Εξετάστε ως προς την μονοτονία την $\widetilde{F}^{-1}$, και συγκρίνετέ τη με την F^{-1}.

4.3. Δείξτε ότι αν μία συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz για κάποιο $M > 0$ (δηλ., $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$), τότε είναι απόλυτα συνεχής. Ισχύει και το αντίστροφο;

4.4. Έστω $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα με σ.κ. F.

(i) Για τυχούσα ακολουθία $\boldsymbol{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots$, του $\mathbb{R}^n$, με $\lim_m \boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, θέτουμε $A_j = \{X_j < x_j\}$, $B_{m,j} = \{X_j \leq x_j^{(m)}\}$, και $\mathit{\Gamma}_j = \{X_j \leq x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $m = 1, 2, \ldots$. Έστω $A = \bigcap_{j=1}^n A_j$, $B_m = \bigcap_{j=1}^n B_{m,j}$, και $\mathit{\Gamma} = \bigcap_{j=1}^n \Gamma_j$. Δείξτε ότι $A \subset \liminf_m B_m \subset \limsup_m B_m \subset B$, και συμπεράνατε ότι

$$F(\boldsymbol{x}_-) \leq \liminf_m F\left(\boldsymbol{x}^{(m)}\right) \leq \limsup_m F\left(\boldsymbol{x}^{(m)}\right) \leq F(\boldsymbol{x}),$$

όπου $F(\boldsymbol{x}_-) = \lim_{\boldsymbol{y} \nearrow \boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{y})$.

(ii) Η F είναι συνεχής στο $\boldsymbol{x}$ όταν και μόνο όταν $F(\boldsymbol{x}_-) = F(\boldsymbol{x})$.

(iii) Ορίζουμε τα σύνολα

$$E_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbb{P}[\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}] > 0\},$$
$$E_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : F(\boldsymbol{x}) > F(\boldsymbol{x}_-)\},$$
$$E_3 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \text{η } F \text{ δεν είναι συνεχής στο } \boldsymbol{x}\}, \quad \text{και}$$
$$E_4 = \Big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n F_j(x_j) > \sum_{j=1}^n F_j(x_{j-})\Big\}$$

όπου $F_j(x_j) = \mathbb{P}[X_j \le x_j]$ η (περιθώρια) σ.κ. της τ.μ. X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι $E_1 \subset E_2 = E_3 \subset E_4$.

(iv) Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$, με σ.κ.

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x_1 < 0 \text{ ή } x_2 < 0, \\ x_2, & \text{αν } x_1 \ge 0 \text{ και } 0 \le x_2 < 1, \\ 1, & \text{αν } x_1 \ge 0 \text{ και } x_2 \ge 1. \end{cases}$$

Δείξτε ότι $E_1 = \varnothing$, $E_2 = E_3 = \{(0,x),\ x > 0\}$, $E_4 = \{(0,x),\ x \in \mathbb{R}\}$, και άρα, $E_1 \subsetneqq E_2 = E_3 \subsetneqq E_4$. Βρείτε ένα Borel σύνολο $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, τέτοιο ώστε $\lambda(B) = 0$, και $\mathbb{P}[\boldsymbol{X} \in B] = 1$.

(v) Ένα μέτρο μ ονομάζεται **συνεχές** (ή **μη ατομικό**), όταν η $\mathcal{A}$ περιέχει τα μονοσύνολα, και $\mu(\{\omega\}) = 0$ για κάθε μονοσύνολο $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ (εδώ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ο χώρος μέτρου). Δείξτε ότι το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, που επάγει το $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (στο προηγούμενο ερώτημα), είναι συνεχές, και άρα η F, του ερωτήματος αυτού, είναι «συνεχής» ιδιάζουσα σ.κ. (αν και δεν είναι συνεχής συνάρτηση, αφού $E_2 \neq \varnothing$).

(vi) Για $n = 1$, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4$, και επομένως, μία μονοδιάστατη σ.κ. F_X είναι συνεχής αν και μόνο αν το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_X$ είναι συνεχές μέτρο (στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).

4.5. Έστω $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2, \ldots$ μία ακολουθία μετρησίμων χώρων. Δείξτε ότι:

(i) $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) = \sigma(\sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_k) \times \sigma(\mathcal{A}_{k+1} \times \cdots \times \mathcal{A}_n))$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $n = 2, 3, \ldots$. [Αυτή είναι η σ-άλγεβρα που συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.]

(ii) $$\sigma\left(\left\{ \mathop{\times}_{j=1}^{\infty} A_j : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \ldots \right\}\right)$$
$$= \sigma\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{(m)} \times \Omega_{m+1} \times \Omega_{m+2} \times \cdots : A_{(m)} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_m) \right\} \right).$$

(iii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k}) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sigma\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k})\big)$, για $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $n = 2, 3, \ldots$.

4.6. Δείξτε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχει διακριτή σ.κ. όταν και μόνο όταν όλες οι τ.μ. X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, έχουν διακριτή σ.κ.

4.7. Το σημείο $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **σημείο αύξησης** της σ.κ. F όταν ισχύει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $F(x+\varepsilon) > F(x-\varepsilon)$. Το σύνολο των σημείων αύξησης,

$$S_F = \{x \in \mathbb{R} : F(x+\varepsilon) > F(x-\varepsilon) \text{ για κάθε } \varepsilon > 0\},$$

λέγεται **στήριγμα** (support) της F. Δείξτε ότι:

(i) Κάθε σημείο ασυνέχειας της F ανήκει στο S_F.

(ii) Κάθε μεμονωμένο σημείο του S_F είναι σημείο ασυνέχειας της F.

(iii) Υπάρχει διακριτή συνάρτηση κατανομής F, για την οποία $S_F = \mathbb{R}$.

4.8. Μία σ.κ. F (ή η τ.μ. X) λέγεται συμμετρική (γύρω από το 0), όταν η X και η $-X$ έχουν την ίδια σ.κ. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Η X είναι συμμετρική.

(ii) Οι X^+ και X^- είναι ισόνομες.

(iii) $F_X(x) + F_X(-x_-) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.9. Έστω F μία σ.κ., και

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} F(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

Δείξτε ότι η F_α είναι συνεχής σ.κ.

4.10. Δείξτε ότι εάν τα διανύσματα $(X_1, \ldots, X_n)$ και $(Y_1, \ldots, Y_n)$ είναι ισόνομα, τότε οι X_j, Y_j είναι ισόνομες τ.μ., $j = 1, 2, \ldots, n$. Το αντίστροφο ισχύει;

4.11. **(μετασχηματισμός πιθανότητας)** Δείξτε ότι εάν η τ.μ. X έχει σ.κ. F, και η F είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η τ.μ. $Y = F(X)$ έχει ομοιόμορφη σ.κ. στο $(0, 1)$. Τι γίνεται αν η F έχει ασυνέχειες; (συγκρίνετε με τον **αντίστροφο** μετασχηματισμό πιθανότητας).

4.12. Σχετικά με το παράδειγμα της συνεχούς ιδιάζουσας σ.κ., που δίδεται στην Πρόταση 4.26, δείξτε ότι για $p = 1/2$, η σ.κ. της X είναι ομοιόμορφη στο $(0, 1)$ (πρβλ. και β′ απόδειξη του Θεωρήματος 4.25).

4.13. Δείξτε ότι εάν οι F_1, F_2 είναι μονοδιάστατες σ.κ., τότε η $F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$ είναι διδιάστατη σ.κ. Γενικεύστε για οποιαδήποτε διάσταση n. Δείξτε ότι αν η F_1 είναι διακριτή, και η F_2 συνεχής, ή αντίστροφα, τότε η F είναι «συνεχής» ιδιάζουσα σ.κ.

4.14. Μία συνεχής συνάρτηση κατανομής είναι **ομοιόμορφα συνεχής**.

4.15. Έστω X μία τ.μ. με $\mathbb{P}[X \leq 0] = 0$, και $\mathbb{P}[X \geq x] > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η X έχει την «αμνήμωνα» ιδιότητα:

$$\mathbb{P}[X > x + y | X > y] = \mathbb{P}[X > x], \quad \text{για κάθε } x, y \geq 0,$$

τότε υπάρχει $\lambda > 0$, τέτοιο ώστε

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

[**Υπόδειξη:** Δείξτε πρώτα ότι για ρητούς $r \in \mathbb{Q}^+$, $F_X(r) = 1 - e^{-\lambda r}$, και στην συνέχεια χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η F_X είναι δεξιά συνεχής. Αυτός είναι ο περίφημος **χαρακτηρισμός της εκθετικής κατανομής**.]