Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Ολοκλήρωμα και Μέση Τιμή

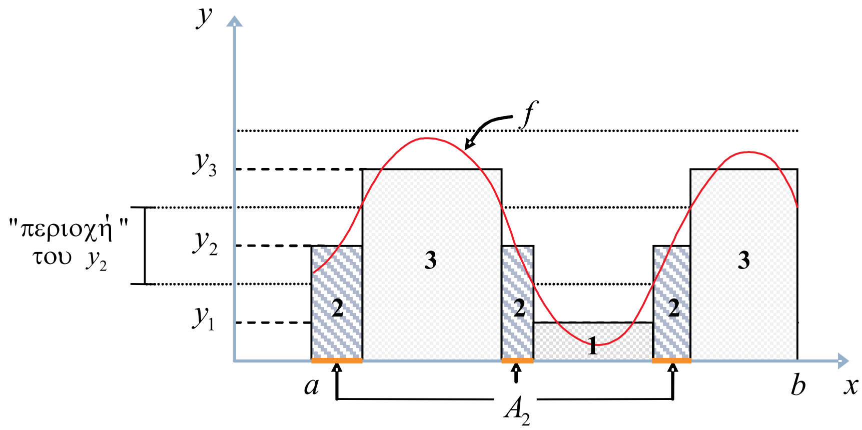
5.1 Το Ολοκλήρωμα Lebesgue

Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης μιας μη αρνητικής συνάρτησης f σε ένα φραγμένο διάστημα $[a, b]$, δηλ. ο προσδιορισμός του εμβαδού του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από το γράφημα της f, τον άξονα των x, και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$, έχουν τις ρίζες τους στην αρχή της «εξάντλησης» του Αρχιμήδη. Σημαντικές γενικεύσεις έγιναν από τον Riemann, και άλλους μαθηματικούς, για να καταλήξουμε στο **ολοκλήρωμα Riemann**, το οποίο ορίζεται με βάση τις διαμερίσεις του $[a, b]$, δηλ. με βάση τις διαμερίσεις «στον άξονα των x».

Γρήγορα όμως έγιναν φανερές οι αδυναμίες του ολοκληρώματος Riemann, όπως, για παράδειγμα, το γεγονός ότι η σύγκλιση μιας αύξουσας ακολουθίας, μη αρνητικών, ολοκληρωσίμων (κατά Riemann) συναρτήσεων, f_n προς την f, **δεν συνεπάγεται** την σύγκλιση των αντιστοίχων ολοκληρωμάτων προς το ολοκλήρωμα της f – βασικά, δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη του τελευταίου – ακόμα και όταν η f είναι φραγμένη. Για παράδειγμα, θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n(x) = I_{A_n}(x)$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$, όπου $A_n = \{k/2^n,\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$. Αν και, προφανώς, $f_n(x) \nearrow f(x) = I_A(x)$, με $A = \lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, η συνάρτηση $f(x) = I_A(x)$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη, παρότι $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ για κάθε n.

Η σπουδαιότατη (όσο και, απλά, «λογική») ανακάλυψη του Lebesgue στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα έγκειται στην εξής παρατήρηση: Αντί να διαμερίσουμε τις τιμές στον άξονα των x (δηλ. το πεδίο ορισμού της f), είναι προτιμότερο να διαμερίσουμε τον άξονα των y (δηλ. το πεδίο τιμών της f), και να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν με βάση την παρατήρηση ότι, αν οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται «κοντά» στην τιμή y_j, για $x \in A_j \subset [a,b]$, τότε το εμβαδόν του «γενικευμένου ορθογωνίου», με βάση το A_j και ύψος y_j $(= y_j \lambda(A_j))$, θα προσεγγίζει το αντίστοιχο εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ του γραφήματος της f και του A_j, οπότε, αθροίζοντας για όλα τα j, θα έχουμε μία προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού – βλ. Σχήμα 5.1.

*



y
f
y_3
"περιοχή"
του y_2
y_2
y_1
3
3
2
2
2
1
a
b
x
A_2

ΣΧΗΜΑ 5.1. Προσέγγιση του εμβαδού με βάση τις τιμές της f στον y-άξονα.

]Στο παράδειγμα του σχήματος έχουμε επιλέξει μόνο τρία y_j, και οι αντίστοιχες «βάσεις», A_1, A_2, και A_3, αποτελούνται από την ένωση ενός, τριών, και δύο διαστημάτων, αντίστοιχα. Το εμβαδόν της f προσεγγίζεται από τα ορθογώνια με τους αριθμούς $1, 2, 3$, δηλ. $\int_a^b f(x)dx \simeq y_1\lambda(A_1) + y_2\lambda(A_2) + y_3\lambda(A_3)$.]

Όπως έλεγε αλληγορικά ο Lebesgue, «για να πληρώσει ο Riemann ένα ποσόν (το εμβαδόν), βγάζει από την τσέπη του ένα-ένα τα νομίσματα (τιμές της f στα διαδοχικά διαστήματα της διαμέρισης), και πληρώνει, ενώ εγώ βγάζω όλα τα νομίσματα, τα ταξινομώ κατά σειρά μεγέθους, και μετά πληρώνω!» Για να γίνει κατανοητό πόσο σπουδαία είναι αυτή η απλοποίηση, αρκεί να θεωρήσουμε το προηγούμενο παράδειγμα, όπου $f_n = I_{A_n} \nearrow I_A = f$, με $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{k/2^n,\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$. Τότε η συνάρτηση f είναι απλή (αφού παίρνει μόνο 2 τιμές: $f(x) = 0$ για $x \in [0, 1] \setminus A$, και $f(x) = 1$ για $x \in A$), οπότε, από τον «άξονα των y», φαίνεται καθαρά ότι θα πρέπει να οριστεί κατάλληλα ένα ολοκλήρωμα, έτσι ώστε

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = 0\cdot\lambda(\{x : f(x) = 0\}) + 1\cdot\lambda(\{x : f(x) = 1\}) = \lambda(A) = 0,$$

αφού το μέτρο Lebesgue (μήκος) οποιουδήποτε αριθμήσιμου συνόλου A είναι 0. Επομένως, αν οι f_n και f είναι όπως πριν,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = \int_{[0,1]} f(x)dx,$$

και όλα είναι εντάξει!

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα (Lebesgue) μιας μετρήσιμης συνάρτησης, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (ή $X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$), σε έναν αυθαίρετο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, και θα περιγράψουμε, αρκετά αναλυτικά, τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος. Αν, επιπροσθέτως, το $\mu = \mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας (και άρα η X είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), τότε η μέση τιμή (ή μαθηματική ελπίδα, ή αναμενόμενη τιμή, ή ολοκλήρωμα) της X ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα της X, ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$ (και συνεπώς διέπεται ακριβώς από τις ίδιες ιδιότητες). Κατά τον ίδιο τρόπο, αν $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (ή γενικότερα $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$), και $X = f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, τότε το ολοκλήρωμα της f παριστάνει το σύνηθες εμβαδόν που περικλείεται από την f και τον άξονα των x.

Ορισμός 5.1 (ολοκλήρωμα Lebesgue) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ τυχόν χώρος μέτρου, και $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (ή $\overline{\mathbb{R}}$) μία μετρήσιμη συνάρτηση (δηλ. $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}$).

(i) Αν η X είναι απλή και μη αρνητική, δηλ. η X έχει κανονική μορφή

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (0 \le c_1 < c_2 < \cdots c_k < +\infty), \tag{5.1}$$

τότε ορίζουμε ως (ορισμένο) ολοκλήρωμα της X, ως προς το μ, τον «αριθμό»

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i) \in [0, +\infty]. \tag{5.2}$$

Ο εκτεταμένος αυτός αριθμός συμβολίζεται με

$$\int_\Omega X(\omega) d\mu(\omega), \quad \text{ή} \quad \int_\Omega X d\mu, \quad \text{ή και} \quad \int X d\mu$$

(ο Ω εννοείται), και λέγεται **ολοκλήρωμα της X ως προς μ.** Επομένως, όταν η X δίδεται από την (5.1), τότε το ολοκλήρωμά της ορίζεται ως

$$\int X d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i).$$

Παρατηρούμε ότι όταν $c_i > 0$ και $\mu(A_i) = +\infty$ για κάποιο i, τότε $c_i \mu(A_i) = +\infty$, και συνεπώς, εξ' ορισμού,

$$\int X d\mu = +\infty.$$

Όταν $c_i = 0$ και $\mu(A_i) = +\infty$, τότε θεωρούμε στην (5.2) ότι $0 \cdot (+\infty) = 0$ (η αυθαίρετη αυτή παραδοχή προέρχεται από το αξίωμα ότι το εμβαδόν μιας «ευθείας» είναι 0).

(ii) Αν η X είναι μη αρνητική, μετρήσιμη, συνάρτηση (ακόμα και εκτεταμένη), τότε θέτουμε

$$\int X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup\left\{\int Y d\mu : Y \textit{ απλή},\ 0 \leq Y \leq X\right\}.$$

(iii) Αν η X είναι, απλά, μετρήσιμη (ακόμα και εκτεταμένη), τότε ορίζουμε

$$\int X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int X^+ d\mu - \int X^- d\mu,$$

όπου $X^+ = \max\{X, 0\},\ X^- = -\min\{X, 0\}$ (οι X^+, X^- είναι μη αρνητικές, μετρήσιμες, συναρτήσεις, και το ολοκλήρωμά τους ορίζεται από το (ii)), εφ᾽ όσον το $\int X^+ d\mu - \int X^- d\mu$ δεν είναι της μορφής $(+\infty) - (+\infty)$.

Παρατήρηση 5.2 (i) Ας σημειωθεί ότι όταν η $X \geq 0$ είναι απλή, οι ορισμοί (i) και (ii) για το ολοκλήρωμά της συμπίπτουν. Αυτό δεν είναι εντελώς προφανές, αλλά ας δούμε γιατί συμβαίνει.

Δεχόμενοι ότι το ολοκλήρωμα απλής δίδεται από τον «αριθμό» (5.2), έχουμε $\int X d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i)$, όταν η X γράφεται, σε κανονική μορφή, ως $X = \sum_{i=1}^k c_i I_{A_i}$. Όμως, εξ᾽ ορισμού, η X ανήκει στο σύνολο

$$\{Y : Y \text{ απλή },0 \leq Y \leq X\},$$

οπότε είναι σαφές ότι

$$\int X d\mu \leq \sup\left\{\int Y d\mu : Y \text{ απλή},\ 0 \leq Y \leq X\right\}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η X, που σε κανονική μορφή γράφεται ως

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(\omega),$$

επιδέχεται και μία δεύτερη έκφραση, της μορφής

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{N} b_j I_{B_j}(\omega),$$

με $B_j B_s = \varnothing$ για $j \neq s$ (όπου $B_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots, N$). Παρατηρούμε ότι, θέτοντας $B_{N+1} = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right) = \left(\bigcup_{j=1}^{N} B_j\right)^c$ (οπότε $B_{N+1} \in \mathcal{A}$), και $b_{N+1} = 0$, η δεύτερη αυτή έκφραση γράφεται ως

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{N+1} b_j I_{B_j}(\omega),$$

όπου τώρα $B_j B_s = \varnothing$ για $j \neq s$, και $\bigcup_{j=1}^{N+1} B_j = \Omega$. Εύκολα διαπιστώνεται (πώς;) ότι

$$\sum_{j=1}^{N} b_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{N+1} b_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \int X d\mu. \qquad (\star)$$

Έστω τώρα

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j I_{\Gamma_j}(\omega)$$

μία απλή συνάρτηση, με $0 \leq \gamma_1 < \cdots < \gamma_m$, τέτοια ώστε $Y \leq X$. Τότε θα έχουμε για την Y την εναλλακτική μορφή

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \sum_{i=1}^{k} I_{A_i \Gamma_j}(\omega) = \sum_{(i,j)} \gamma_{ij} I_{A_i \Gamma_j}(\omega),$$

όπου η άθροιση εκτείνεται για $i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, m$, και $\gamma_{ij} = \gamma_j$. Όμως, και η X γράφεται στην μορφή

$$X(\omega) = \sum_{(i,j)} c_{ij} I_{A_i \varGamma_j}(\omega)$$

(όπου $c_{ij} = c_i$), και συνεπώς, $\gamma_{ij} \leq c_{ij}$, εκτός αν $A_i\varGamma_j = \varnothing$ (διότι $\omega \in A_i\varGamma_j \Rightarrow \gamma_{ij} = \gamma_j = Y(\omega) \leq X(\omega) = c_i = c_{ij}$). Προφανώς, $(A_i\varGamma_j) \cap (A_{i'}\varGamma_{j'}) = \varnothing$ όταν $(i, j) \neq (i', j')$. Τελικά, εφαρμόζοντας την $(\star)$ στις παραπάνω μορφές των X, Y (με $N = km$), και λόγω του γεγονότος ότι $\gamma_{ij}\mu(A_i\varGamma_j) \leq c_{ij}\mu(A_i\varGamma_j)$ για κάθε i, j, προκύπτει ότι

$$\int Y d\mu \overset{(\star)}{=\!=} \sum_{(i,j)} \gamma_{ij}\mu(A_i\varGamma_j) \leq \sum_{(i,j)} c_{ij}\mu(A_i\varGamma_j) \overset{(\star)}{=\!=} \int X d\mu.$$

Αυτό σημαίνει ότι όταν η $X \geq 0$ είναι απλή, τότε για κάθε απλή Y, με $0 \leq Y \leq X$,

$$\int Y d\mu \leq \int X d\mu, \qquad (\star\star)$$

και συνεπώς,

$$\sup \left\{ \int Y d\mu : Y \text{ απλή},\ 0 \leq Y \leq X \right\} \leq \int X d\mu.$$

Έτσι, οι δύο ορισμοί συμπίπτουν για απλές $X \geq 0$.

(ii) Η μόνη περίπτωση που δεν μπορούμε να ορίσουμε το $\int X d\mu$ είναι όταν $\int X^+ d\mu = \int X^- d\mu = +\infty$, και λέμε τότε ότι η X **δεν έχει ολοκλήρωμα.** Σε κάθε άλλη περίπτωση, το $\int X d\mu$

ορίζεται (όταν η X είναι μετρήσιμη), και μάλιστα, $\int X d\mu \in [-\infty, +\infty]$. Λέμε ότι η X είναι **ολοκληρώσιμη** (κατά Lebesgue) όταν

$$\int X d\mu \in (-\infty, +\infty),$$

δηλαδή όταν $\int X^+ d\mu < +\infty$ και $\int X^- d\mu < +\infty$. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλ. όταν ένα τουλάχιστον από τα $\int X^+ d\mu$ ή $\int X^- d\mu$ είναι $+\infty$, λέμε ότι η X **δεν είναι ολοκληρώσιμη.** Όμως, μία μη ολοκληρώσιμη X μπορεί να έχει ολοκλήρωμα, π.χ. όταν $\int X^+ d\mu = \alpha \in \mathbb{R}_+$ και $\int X^- d\mu = +\infty$, τότε η X έχει ολοκλήρωμα:

$$\int X d\mu = \alpha - (+\infty) = -\infty,$$

αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος παρατηρούμε ότι αν η X είναι φραγμένη (δηλ. $|X(\omega)| \leq C < \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$) και το μ είναι πεπερασμένο μέτρο ($\mu(\Omega) < +\infty$, π.χ. όταν το $\mu = \mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας), τότε $X^+ \leq C$, $X^- \leq C$, και συνεπώς, $\int X^+ d\mu \leq C\mu(\Omega)$ και $\int X^- d\mu \leq C\mu(\Omega)$, οπότε η X είναι ολοκληρώσιμη. Σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα Riemann, στο οποίο η f είναι ολοκληρώσιμη όταν είναι αρκετά «ομαλή», στο ολοκλήρωμα Lebesgue, η μόνη «αιτία» για την μη ολοκληρωσιμότητα της f είναι ότι το εμβαδόν «κάτω» από την f είναι $+\infty$.

(iii) Παρατηρούμε ότι ο γενικός ορισμός του ολοκληρώματος περιέχει και την περίπτωση ολοκλήρωσης μιας μετρήσιμης συνάρτησης X πάνω στο $A \in \mathcal{A}$, θέτοντας

$$\int_A X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_\Omega X I_A d\mu = \int X I_A d\mu$$

(ο Ω εννοείται), αφού η $Y(\omega) = X(\omega) I_A(\omega)$ είναι μετρήσιμη όταν $A \in \mathcal{A}$.

(iv) Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κανείς το $\int X d\mu$, και φυσικά όλοι είναι ισοδύναμοι. Για παράδειγμα, όταν $X \geq 0$, ο Lebesgue όρισε

$$\int X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu \left(\left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq X < \frac{k}{2^n} \right\} \right) + n\mu(\{X \geq n\}) \right],$$

δηλ.

$$\int X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu,$$

όπου X_n είναι η ακολουθία απλών συναρτήσεων που κατασκευάσαμε στο Θεώρημα ;;, με την ιδιότητα $0 \leq X_n \nearrow X$. Η «πολυφωνία» των ορισμών οφείλεται ακριβώς στο γεγονός ότι για μία μετρήσιμη συνάρτηση $X \geq 0$, το $\int X d\mu$ πρέπει να παριστάνει το «εμβαδόν» που περικλείεται από το γράφημα της X και τον άξονα των «ω», όταν οι «βάσεις» μετριούνται σε σχέση με το μέτρο μ, και τα ύψη μετριούνται ως προς $X(\omega)$ – προφανώς, το εμβαδόν αυτό δεν πρέπει να εξαρτάται από το πώς το ορίζει ο καθένας. Στην συνέχεια θα δούμε (Λήμμα 5.4, και Θεώρημα 5.5, Μονότονης Σύγκλισης) ότι *το ολοκλήρωμα* *δοθείσας, μετρήσιμης, συνάρτησης $X \geq 0$, είναι το* **κοινό όριο** *των ολοκληρωμάτων* **οποιασδήποτε** *αύξουσας ακολουθίας μετρησίμων, μη αρνητικών, συναρτήσεων, που συγκλίνει κατά σημείο προς την δοθείσα συνάρτηση.* Έτσι, ο Lebesgue, απλώς, όρισε το ολοκλήρωμα με τον απλούστερο δυνατό τρόπο, δηλ. το θεώρησε ως το όριο των ολοκληρωμάτων της πιο «απλής», αύξουσας ακολουθίας, απλών, μετρησίμων συναρτήσεων, που συγκλίνει προς την συνάρτηση – της ακολουθίας που ορίστηκε στο Θεώρημα ;;.

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 5.3 Έστω $Y \geq 0$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση, στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Για $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε

$$\nu(A) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \int_A Y d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \int Y I_A d\mu.$$

Τότε το ν είναι μέτρο (δηλ. ο $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ είναι χώρος μέτρου).

Απόδειξη: Είναι

$$\nu(\varnothing) = \int_\varnothing Y d\mu = \int Y I_\varnothing d\mu = \int 0 d\mu = 0,$$

αφού η $Z(\omega) \equiv 0$ είναι απλή με κανονική μορφή $Z = 0 \cdot I_\Omega$, και άρα $\int Z d\mu = 0 \cdot \mu(\Omega) = 0$. Έστω B_m, $m = 1, 2, \ldots$, ξένα σύνολα της $\mathcal{A}$, και $B = \bigcup_{m=1}^\infty B_m$ (οπότε $B \in \mathcal{A}$). Τότε

$$\nu\left(\bigcup_{m=1}^\infty B_m\right) = \int_B Y d\mu = \int Y I_B d\mu.$$

Αν η Y έχει την κανονική μορφή

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i} \quad (\text{με } \alpha_i \geq 0),$$

τότε οι $Z = YI_B$, και $Z_m = YI_{B_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, είναι απλές, με

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i B}, \quad Z_m = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{A_i B_m}. \tag{5.3}$$

Άρα, από την (5.3) και την Παρατήρηση 5.2(i) (βλ. ($\star$)), έχουμε ότι

$$\int Z d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i B), \quad \int Z_m d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i B_m),$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\nu(B) = \int Z d\mu &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_i B_m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \int Z_m d\mu \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int Y I_{B_m} d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B_m} Y d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \nu(B_m),
\end{aligned}$$

και το ν είναι μέτρο.[1] □

Το επόμενο αποτέλεσμα αναδιατυπώνει την Παρατήρηση 5.2(i), και δείχνει ότι ο ορισμός είναι συμβατός με την διαίσθησή μας

[1] Ας σημειωθεί ότι επιτρέπεται, σύμφωνα με το Θεώρημα του Dirichlet, να εναλλάξουμε την σειρά άθροισης, διότι $\alpha_i \mu(A_i B_m) = x_{im} \geq 0$, για κάθε m και i.

για τα εμβαδά, καθώς επίσης και με τον ορισμό του Lebesgue (βλ. Παρατήρηση 5.2(iv)).

Λήμμα 5.4 (i) Αν $X(\omega) = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}(\omega) \geq 0$, με $B_i B_j = \varnothing,\ i \neq j$ $(B_j \in \mathcal{A})$, τότε

$$\int X d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

(ii) Αν $0 \leq X \leq Y$ $(X, Y$ μετρήσιμες), τότε

$$\int X d\mu \leq \int Y d\mu.$$

(iii) Αν η ακολουθία απλών συναρτήσεων X_n είναι τέτοια ώστε $0 \leq X_n \nearrow X$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu = \int X d\mu.$$

(iv) Για $X \geq 0$, απλή, και για κάθε $\lambda > 0$,

$$\int \lambda X d\mu = \lambda \int X d\mu.$$

(v) Για απλές $X, Y \geq 0$,

$$\int (X+Y) d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu.$$

(vi) Για τυχούσα μετρήσιμη $X \geq 0$, και για κάθε $\lambda > 0$,

$$\int \lambda X d\mu = \lambda \int X d\mu.$$

[Το (iii) μας διαβεβαιώνει ότι $\lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu < +\infty$ αν και μόνο αν $\int X d\mu < +\infty$, και μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση, $\int X d\mu = \lim_{n\to\infty} \int X_n d\mu \in [0, +\infty)$.]

Απόδειξη: (i) Βλ. Παρατήρηση 5.2(i).

(ii) Είναι $\left\{\int Zd\mu : Z \text{ απλή},\ 0 \leq Z \leq X\right\} \subset \left\{\int Zd\mu : Z \text{ απλή},\ 0 \leq Z \leq Y\right\}$, και άρα,

$$\begin{aligned}\int Xd\mu &\overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup\left\{\int Zd\mu :\ Z\ \text{ απλή},\ 0 \leq Z \leq X\right\}\\ &\leq \sup\left\{\int Zd\mu :\ Z\ \text{ απλή},\ 0 \leq Z \leq Y\right\} \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int Yd\mu.\end{aligned}$$

(iv) Είναι προφανές ότι αν η $X \geq 0$ είναι απλή, τότε για κάθε $\lambda > 0$, η $\lambda X \geq 0$ είναι απλή, και μάλιστα, $\lambda X = \sum_{k=1}^{m} \lambda a_k I_{A_k}$, όταν $X = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{A_k}$. Η αποδεικτέα προκύπτει άμεσα από το (i).

(v) Αν $X = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}$ και $Y = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{B_j}$, τότε $X + Y = \sum_{(i,j)}(a_i+b_j)I_{A_iB_j}$, όπου η άθροιση εκτείνεται για $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$. Αφού τα $C_{ij} = A_iB_j$ είναι ξένα, έπεται από το (i) ότι

$$\begin{aligned}\int (X+Y)d\mu &= \sum_{(i,j)}(a_i + b_j)\mu(A_iB_j)\\ &= \sum_{(i,j)} a_i\mu(A_iB_j) + \sum_{(i,j)} b_j\mu(A_iB_j)\\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j)\\ &= \int Xd\mu + \int Yd\mu.\end{aligned}$$

(iii) Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι η X, ως όριο μη αρνητικών, μετρησίμων, συναρτήσεων (των απλών X_n), είναι (εκτεταμένη) μη αρνητική, μετρήσιμη, συνάρτηση, και άρα είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμά της. Αφού η ακολουθία $\int X_n d\mu$ (ακολουθία εκτεταμένων, μη αρνητικών, αριθμών) είναι αύξουσα, έπεται ότι το όριο

$$\alpha \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \lim_n \int X_n d\mu \in [0, +\infty],$$

είναι ένας καλά ορισμένος, εκτεταμένος, μη αρνητικός αριθμός. Επίσης, λόγω του (ii), και επειδή $0 \le X_n \le X$, έπεται ότι $\int X_n d\mu \le \int X d\mu$, και συνεπώς (παίρνοντας όρια για $n \to \infty$)

$$\alpha \le \int X d\mu.$$

Για να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, κατ΄ αρχήν σταθεροποιούμε μία απλή συνάρτηση Y, με $0 \le Y \le X$, και έναν αριθμό λ, $0 < \lambda < 1$, και θέτουμε

$$A_n = \{\omega : \ X_n(\omega) \ge \lambda Y(\omega)\}, \quad n = 1, 2, \dots \ .$$

[Οπότε $A_n \in \mathcal{A}$, επειδή οι X_n, Y είναι μετρήσιμες.] Επειδή η X_n είναι αύξουσα, η A_n είναι αύξουσα ακολουθία της $\mathcal{A}$, και $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, διότι, αν $X(\omega) = 0$, τότε $Y(\omega) = 0$ (αφού $Y \le X$), και άρα $\omega \in A_1$, ενώ αν $X(\omega) > 0$, τότε $\lambda Y(\omega) < X(\omega)$, και συνεπώς, $X_n(\omega) \ge \lambda Y(\omega)$ από κάποιο n και πάνω (αφού $X_n(\omega) \nearrow X(\omega)$, εξ΄ υποθέσεως). Άρα,

$A_n \nearrow \Omega$, και θέτοντας

$$\nu(A) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_A Y d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

έχουμε ότι το ν είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{A})$ (Πρόταση 5.3). Επομένως,[2] $\nu(A_n) \nearrow \nu(\Omega)$, δηλαδή

$$\int_{A_n} Y d\mu \to \int_\Omega Y d\mu = \int Y d\mu, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Χρησιμοποιώντας το (ii) και τις ανισότητες $0 \le \lambda Y I_{A_n} \le X_n I_{A_n} \le X_n$, που ισχύουν επειδή $A_n = \{\lambda Y \le X_n\}$, $\lambda > 0$, $Y \ge 0$, και $0 \le I_{A_n} \le 1$, προκύπτει ότι

$$\int_{A_n} \lambda Y d\mu = \int \lambda Y I_{A_n} d\mu \le \int X_n I_{A_n} d\mu \le \int X_n d\mu.$$

Αφού η $Y I_{A_n}$ είναι απλή (γιατί η Y είναι απλή), η παραπάνω ανισότητα, σε συνδυασμό με το (iv), συνεπάγεται την

$$\lambda \int_{A_n} Y d\mu = \lambda \int Y I_{A_n} d\mu = \int \lambda Y I_{A_n} d\mu \le \int X_n d\mu,$$

δηλαδή $\lambda \int_{A_n} Y d\mu \le \int X_n d\mu$, ή, ισοδύναμα, $\lambda \nu(A_n) \le \int X_n d\mu$. Παίρνοντας όρια για $n \to \infty$ (και τα δύο όρια υπάρχουν λόγω των προηγουμένων), έχουμε ότι

$$\lambda \nu(\Omega) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \lambda \int Y d\mu \le \lim_n \int X_n d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \alpha,$$

δηλαδή $\lambda \int Y d\mu \le \alpha$. Επειδή το $\lambda < 1$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι (παίρνοντας όρια για $\lambda \nearrow 1$)

[2] Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της Πρότασης ;; που, για αύξουσες ακολουθίες ενδεχομένων, γενικεύεται εύκολα (κατά τον ίδιο τρόπο), σε οποιονδήποτε χώρο μέτρου (όχι κατ΄ ανάγκην χώρο πεπερασμένου μέτρου ή χώρο πιθανότητας).

$$\int Y d\mu \leq \alpha.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\int Y d\mu \leq \alpha$, για οποιαδήποτε απλή Y, με $0 \leq Y \leq X$, και συνεπώς,

$$\int X d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup\left\{\int Y d\mu : \ Y \ \text{ απλή}, \ 0 \leq Y \leq X\right\} \leq \alpha,$$

δηλαδή $\int X d\mu \leq \alpha = \lim \int X_n d\mu$, που συνεπάγεται το ζητούμενο.

(vi) Η αποδεικτέα ισχύει για απλές $X \geq 0$, λόγω του (iv). Στην γενική περίπτωση που η $X \geq 0$ είναι, απλώς, μετρήσιμη (ακόμα και εκτεταμένη), θεωρούμε μία ακολουθία απλών X_n, με $0 \leq X_n \nearrow X$ (που υπάρχει από το Θεώρημα ;;). Τότε οι λX_n είναι απλές, με $0 \leq \lambda X_n \nearrow \lambda X$, και συνεπώς, από τα (iii) και (iv) έπεται ότι

$$\lambda \int X d\mu = \lambda \lim_n \int X_n d\mu = \lim_n \lambda \int X_n d\mu = \lim_n \int \lambda X_n d\mu = \int \lambda X d\mu. \ \Box$$

5.2 Μονότονη και Κυριαρχημένη Σύγκλιση

Το Λήμμα 5.4(iii) μας διαβεβαιώνει ότι το $\int X d\mu$, για τυχούσα μετρήσιμη $X \geq 0$, μπορεί να οριστεί ως

$$\lim_n \int X_n d\mu,$$

όταν η ακολουθία των απλών συναρτήσεων, $X_n \geq 0$, είναι αύξουσα, και συγκλίνει προς την X (για συντομία γράφουμε

$0 \leq X_n \nearrow X$), και ότι η τιμή του ορίου **δεν εξαρτάται** από την συγκεκριμένη επιλογή της ακολουθίας X_n (αρκεί, φυσικά, οι X_n να είναι απλές, και $0 \leq X_n \nearrow X$). Αλλά αυτή η ιδιότητα γενικεύεται ακόμη περισσότερο, για οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων (όχι αναγκαστικά απλών), δίνοντας ένα από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Ολοκλήρωσης:

Θεώρημα 5.5 (Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue)[3] Αν η ακολουθία των μετρησίμων συναρτήσεων $X_n \geq 0$ είναι αύξουσα (δηλ. $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n = 1, 2, \ldots$), και $X = \lim_n X_n$, τότε

$$\int X d\mu = \lim_n \int X_n d\mu.$$

[Δηλαδή, $\int \lim X_n d\mu = \lim \int X_n d\mu$. Προσέξτε ότι στο θεώρημα **δεν απαιτείται** να είναι ολοκληρώσιμες οι X_n και X (δηλ. μπορεί $\int X d\mu = +\infty$ ή $\int X_n d\mu = +\infty$), και το νόημα της ισότητας είναι ότι «ή και τα δύο μέλη είναι $+\infty$, ή και τα δύο είναι πεπερασμένα και ίσα». Φυσικά, οι X_n και X επιτρέπεται να είναι εκτεταμένες μετρήσιμες συναρτήσεις, δηλ. $X(\omega) = +\infty$ για κάποια ω, και, ομοίως, $X_n(\omega) = +\infty$ για κάποια ω και n.]

Απόδειξη: Φυσικά, το $\lim X_n(\omega)$ υπάρχει (αφού η $X_n(\omega)$ είναι αύξουσα ακολουθία εκτεταμένων, μη αρνητικών, αριθμών), και άρα, η X είναι καλά ορισμένη. Επίσης, η X είναι μετρήσιμη, ως όριο ακολουθίας μετρησίμων συναρτήσεων (Πρόταση ;;(iii)), και συνεπώς, το $\int X d\mu$ είναι καλά ορισμένος, εκτεταμένος, μη αρνητικός, αριθμός (αυτό **δεν** σημαίνει ότι η X είναι ολοκληρώσιμη, αφού μπορεί $\int X d\mu = +\infty$). Επίσης, η ακολουθία $\int X_n d\mu$ είναι αύξουσα (αφού $X_n \leq X_{n+1}$), λόγω του Λήμματος 5.4(ii). Άρα, το $\alpha \overset{\text{ορ.}}{=} \lim \int X_n d\mu \in [0, +\infty]$ είναι

[3] Lebesgue's Monotone Convergence Theorem

καλά ορισμένο, και μάλιστα $\alpha \le \int X d\mu$, επειδή $X_n \le X$.

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, $\alpha \ge \int X d\mu$, θεωρούμε μία (τυχούσα) απλή Y, με $0 \le Y \le \lambda X$ (όπου $\lambda \in (0,1)$, σταθερό), και θέτουμε

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} Y(\omega), & \text{αν } Y(\omega) \le X_n(\omega), \\ 0, & \text{αν } Y(\omega) > X_n(\omega), \end{cases}$$

δηλαδή $Y_n = Y I_{\{Y \le X_n\}}$. Οι Y_n είναι μετρήσιμες (διότι το $\{Y \le X_n\} \in \mathcal{A}$, και συνεπώς, η $I_{\{Y \le X_n\}}$ είναι μετρήσιμη, και η Y είναι μετρήσιμη ως απλή). Οι Y_n είναι μη αρνητικές (ως γινόμενο μη αρνητικών), και μάλιστα είναι απλές, διότι η Y είναι απλή, και η $I_{\{Y \le X_n\}}$ είναι απλή. Η ακολουθία Y_n είναι αύξουσα, διότι αν $Y(\omega) > X_n(\omega)$ τότε $Y_n(\omega) = 0 \le Y_{n+1}(\omega)$, ενώ αν $Y(\omega) \le X_n(\omega)$ τότε $Y_n(\omega) = Y(\omega) = Y_{n+1}(\omega)$ (διότι $X_n(\omega) \le X_{n+1}(\omega)$). Τέλος, η ακολουθία Y_n συγκλίνει στην Y, διότι, αν $X(\omega) = 0$ τότε και $Y(\omega) = Y_n(\omega) = 0$, ενώ όταν $X(\omega) > 0$ τότε $Y(\omega) < X(\omega)$, που σημαίνει ότι από κάποιο n και πάνω, $X_n(\omega) \ge Y(\omega)$, και άρα $Y_n(\omega) = Y(\omega)$ τελικά για κάθε n.

Επομένως, οι απλές συναρτήσεις Y_n είναι έτσι ώστε

$$0 \leq Y_n \nearrow Y,$$

και λόγω του Λήμματος 5.4(iii),

$$\int Y d\mu = \lim_n \int Y_n d\mu.$$

Όμως, από κατασκευή, $Y_n \leq X_n$, και συνεπώς,

$$\int Y d\mu = \lim_n \int Y_n d\mu \leq \lim_n \int X_n d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \alpha,$$

που σημαίνει ότι $\int Y d\mu \leq \alpha$. Άρα, για κάθε απλή Y, με $0 \leq Y \leq \lambda X$ (και για κάθε λ, με $0 < \lambda < 1$), έχουμε $\int Y d\mu \leq \alpha$, και συνεπώς,

$$\int \lambda X d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \sup\left\{\int Y d\mu : Y \text{ απλή},\ 0 \leq Y \leq \lambda X\right\} \leq \alpha.$$

Επομένως, αφού $\int \lambda X d\mu = \lambda \int X d\mu$ (λόγω του Λήμματος 5.4(vi)), προκύπτει ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$,

$$\lambda \int X d\mu \leq \alpha,$$

και, παίρνοντας όρια για $\lambda \nearrow 1$, έχουμε ότι $\int X d\mu \leq \alpha$.

Τελικά,

$$\int \lim X_n d\mu = \int X d\mu = \alpha \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \lim \int X_n d\mu. \ \square$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης **δεν μπορεί** να εφαρμοστεί σε **φθίνουσες ακολουθίες** $X_n \searrow X \geq 0$ (δεν ισχύει ούτε καν για απλές $X_n \geq 0$ και $X \geq 0$).[4] Για παράδειγμα, όταν $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, και $X_n = g_n$, με

$$g_n(x) = I_{[n,+\infty)}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq n, \\ 0, & x < n, \end{cases}$$

έχουμε ότι οι $X_n = g_n$, $X = g \equiv 0$, είναι απλές και μη αρνητικές, $g_n \searrow g \geq 0$, αλλά[5]

$$\lim_n \int g_n d\lambda = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = +\infty \neq 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int g d\lambda.$$

[4]γιαυτό, ίσως θα ήταν ορθότερο να λεγόταν «Θεώρημα Αύξουσας Σύγκλισης» (!), αλλά ο όρος «Μονότονη» έχει πια καθιερωθεί διεθνώς

[5]Σημειώνεται ότι, ειδικά στον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (ή και στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$), το ολοκλήρωμα $\int g d\lambda$, το οποίο, ακριβέστερα, γράφεται ως $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda$, ή και $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\lambda(x)$, συνήθως συμβολίζεται με $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$, και παριστάνει το σύνηθες εμβαδόν «κάτω από την g».

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης είναι πολύ σημαντικό, τόσο από θεωρητικής απόψεως, όσο και για τις εφαρμογές του. Σαν πρώτη εφαρμογή έχουμε την εξής σημαντική πρόταση.

Πρόταση 5.6 (i) Έστω X, Y (εκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις, με $X \geq 0$ και $Y \geq 0$. Τότε

$$\int (X+Y)d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu.$$

(ii) **(Θεώρημα Beppo Levi)** Εάν η $X_n \geq 0$ είναι τυχούσα ακολουθία (εκτεταμένων) μετρησίμων συναρτήσεων, τότε

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int X_n d\mu \right).$$

(iii) **(Λήμμα Fatou)** Εάν η $X_n \geq 0$ είναι τυχούσα ακολουθία (εκτεταμένων) μετρησίμων συναρτήσεων, τότε

$$\int \left(\liminf_n X_n \right) d\mu \leq \liminf_n \left(\int X_n d\mu \right).$$

(iv) Εάν η $X \geq 0$ είναι τυχούσα (εκτεταμένη) μετρήσιμη συνάρτηση, στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, τότε η συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$, με $\nu(A) \stackrel{\text{ορ.}}{=} \int_A X d\mu$, είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{A})$, και μάλιστα, για τυχόν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$, έπεται ότι και $\nu(A) = 0$, οπότε το μέτρο ν είναι **απόλυτα συνεχές**[6] ως προς μ. [Συμβολισμός: $\nu \ll \mu$.] Το μέτρο ν λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της X ως προς μ, και η συνάρτηση X λέγεται **πυκνότητα**

[6] Ένα μέτρο ν λέγεται απόλυτα συνεχές ως προς ένα άλλο μέτρο μ, όταν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$, έπεται ότι και $\nu(A) = 0$.

ή **παράγωγος (Radon-Nikodym)** του ν ως προς μ, και συμβολίζεται μερικές φορές με

$$X = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Τέλος, αν $Y \geq 0$ είναι οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τότε

$$\int Y d\nu = \int Y X d\mu.$$

[Ο συμβολισμός $X = d\nu/d\mu$ επιτρέπει την ορθότητα της συμβολικής πράξης

$$\int Y X d\mu = \int Y \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int Y d\nu,$$

κατά την οποία «απλοποιούμε» το $d\mu$ από «αριθμητή και παρονομαστή».]

Απόδειξη: (i) Έστω $0 \leq X_n \nearrow X,\ 0 \leq Y_n \nearrow Y$, δύο αύξουσες ακολουθίες απλών, μη αρνητικών, συναρτήσεων. Τότε η $Z_n = X_n + Y_n$ είναι αύξουσα ακολουθία απλών, μη αρνητικών, συναρτήσεων, με $Z_n \nearrow X + Y$. Επομένως, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int (X+Y)d\mu = \lim_n \int Z_n d\mu,$$

$$\int X d\mu = \lim_n \int X_n d\mu, \quad \text{και} \quad \int Y d\mu = \lim_n \int Y_n d\mu.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4(v) στις $X_n \geq 0,\ Y_n \geq 0$ (που είναι απλές), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (X+Y)d\mu &= \lim_n \int Z_n d\mu = \lim_n \left(\int X_n d\mu + \int Y_n d\mu \right) \\ &= \lim_n \int X_n d\mu + \lim_n \int Y_n d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu.\end{aligned}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i), μπορεί άμεσα να δειχθεί, με επαγωγή στο n, ότι

$$\int (X_1 + \ldots + X_n)d\mu = \int X_1 d\mu + \ldots + \int X_n d\mu,$$

όταν οι $X_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες (ακόμα και εκτεταμένες). Θέτουμε $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Οι Y_n είναι μη αρνητικές μετρήσιμες (ως άθροισμα μετρησίμων), και $Y_n \leq Y_{n+1}$ (γιατί $X_n \geq 0$). Επίσης, $\lim Y_n = \sum_{j=1}^\infty X_j = Y$, οπότε, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (αφού $0 \le Y_n \nearrow Y$),

$$\begin{aligned}\int \sum_{j=1}^{\infty} X_j d\mu &= \int \lim_n Y_n d\mu = \lim_n \int Y_n d\mu \\ &= \lim_n \int (X_1 + \ldots + X_n) d\mu = \lim_n \left(\int X_1 d\mu + \ldots + \int X_n d\mu \right) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \int X_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int X_j d\mu.\end{aligned}$$

(iii) Θέτουμε $Y_n = \inf_{k \ge n} X_k$, οπότε $0 \le Y_n \nearrow Y = \liminf_n X_n$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int \liminf_n X_n d\mu = \int \lim_n Y_n d\mu = \lim_n \int Y_n d\mu.$$

Όμως, $Y_n = \inf_{k \ge n} X_k \le X_n$, και συνεπώς, $\int Y_n d\mu \le \int X_n d\mu$. Επομένως,

$$\lim_n \int Y_n d\mu = \liminf_n \int Y_n d\mu \le \liminf_n \int X_n d\mu.$$

(iv) Είναι $\nu(\varnothing) = \int_{\varnothing} X d\mu = \int X I_{\varnothing} d\mu = \int 0 d\mu = 0$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι $\nu(A) = \int_A X d\mu = \int X I_A d\mu \ge 0$, αφού $X I_A \ge 0$. Τέλος, αν η A_n είναι ακολουθία, ξένων ανά δύο, συνόλων της $\mathcal{A}$, τότε, για $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, έχουμε,

$$X I_A = \sum_{n=1}^{\infty} X I_{A_n},$$

και, αφού οι $XI_A \geq 0$ και $XI_{A_n} \geq 0$ είναι μετρήσιμες, από το Θεώρημα Beppo Levi προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_A X d\mu = \int XI_A d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} XI_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int XI_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} X d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),\end{aligned}$$

δηλαδή το ν είναι μέτρο.

Έστω τώρα ένα $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Τότε

$$\nu(A) = \int_A X d\mu = \int XI_A d\mu = \sup\left\{\int Y d\mu : \ Y \ \text{ απλή},\ 0 \leq Y \leq XI_A\right\}.$$

Έστω Y τυχούσα απλή, με $0 \leq Y \leq XI_A$, και ας πούμε ότι η κανονική της μορφή είναι $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{B_i}$, με $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Αν $a_i > 0$, τότε $B_i \setminus A = A^c B_i = \varnothing$ (αλλιώς, αν $\omega \in A^c B_i$, τότε $a_i = Y(\omega) \leq X(\omega) I_A(\omega) = 0$, άτοπο). Επομένως, $a_i > 0$ σημαίνει ότι $B_i \subset A$, και συνεπώς, $\mu(B_i) = 0$. Άρα, $a_i \mu(B_i) = 0$ για κάθε i, και τελικά, $\int Y d\mu = 0$. Επομένως, για οποιαδήποτε απλή Y, με $0 \leq Y \leq XI_A$, έχουμε ότι $\int Y d\mu = 0$, που σημαίνει ότι $\int XI_A d\mu = 0$, δηλ. $\nu(A) = 0$. [Άρα, $\nu \ll \mu$.]

Τέλος, για $Y = I_A$ ($A \in \mathcal{A}$), η σχέση

$$\int Y d\nu = \int Y X d\mu$$

είναι προφανής ($\int Y d\nu = \int I_A d\nu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \nu(A) = \int_A X d\mu = \int XI_A d\mu = \int YX d\mu$). Για απλή $Y \geq 0$, το ζητούμενο προκύπτει από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αφού, αν $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}$ η κανονική της μορφή, τότε, χρησιμοποιώντας το (i) και το Λήμμα 5.4(vi), έχουμε

$$\int Y d\nu = \sum_{i=1}^{k} a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{A_i} X d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \int X I_{A_i} d\mu$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \int a_i X I_{A_i} d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i} \right) X d\mu = \int Y X d\mu.$$

Τέλος, αν η Y είναι αυθαίρετη μετρήσιμη συνάρτηση (μη αρνητική και, πιθανώς, εκτεταμένη), τότε υπάρχει ακολουθία απλών Y_n, τέτοια ώστε $0 \le Y_n \nearrow Y$, οπότε και $0 \le Y_n X \nearrow YX$ (οι $Y_n X$ δεν είναι, κατ΄ ανάγκην, απλές), και τελικά, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int Y d\nu = \lim_n \int Y_n d\nu = \lim_n \int Y_n X d\mu = \int Y X d\mu,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Στην ολοκλήρωση πολύ σπουδαίο ρόλο παίζει η έννοια του **σχεδόν παντού** ($\sigma.\pi.$). Γενικά, λέμε ότι μία πρόταση $\mathbf{P}(\omega)$ ισχύει σχεδόν παντού (σε έναν χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$), όταν για $A = \{\omega : \text{η } \mathbf{P}(\omega) \text{ δεν ισχύει}\}$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $A \subset B$, και $\mu(B) = 0$ (αν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, γράφουμε μ–σχεδόν παντού, ή μ–$\sigma.\pi.$). Φυσικά, αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(A) = 0$. Ενδέχεται, όμως, το $A = \{\omega : \text{η } \mathbf{P}(\omega) \text{ δεν ισχύει}\}$ να μην είναι μετρήσιμο, ακόμα και αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}$, με $\mu(B) = 0$, και $A \subset B$. Αυτό, βέβαια, δεν μπορεί να συμβεί όταν το μ είναι **πλήρες μέτρο** (βλ. Κεφ. 1). Για παράδειγμα, στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, η πρόταση «η $\mathbf{P}(x)$ ισχύει $\sigma.\pi.$» σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\lambda(B) = 0$, τέτοιο ώστε $\{x : \text{η } \mathbf{P}(x) \text{ δεν ισχύει}\} \subset B$, ενώ στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ (που είναι η πλήρωση του $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), σημαίνει ότι $\lambda(\{x : \text{η } \mathbf{P}(x)$ δεν ισχύει$\}) = 0$. Γενικά, για να υπολογίσουμε το $\int X d\mu$, είναι αρκετό να γνωρίζουμε την X $\sigma.\pi.$, όπως γίνεται φανερό από την επόμενη πρόταση, και το πόρισμα που την ακολουθεί.

Πρόταση 5.7 Έστω $X \geq 0$ και $Y \geq 0$ μετρήσιμες συναρτήσεις (εκτεταμένες), στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $X = 0$ $\sigma.\pi.$ τότε $\displaystyle\int X d\mu = 0$.

(ii) Αν $\mu(\{\omega : X(\omega) > 0\}) > 0$ τότε $\displaystyle\int X d\mu > 0$.

(iii) Αν $\displaystyle\int X d\mu < +\infty$ τότε $X < +\infty$ $\sigma.\pi.$

(iv) Αν $X \leq Y$ $\sigma.\pi.$ τότε $\displaystyle\int X d\mu \leq \int Y d\mu$.

(v) Αν $X = Y$ $\sigma.\pi.$ τότε $\displaystyle\int X d\mu = \int Y d\mu$.

Απόδειξη: (i) Έστω $A = \{\omega : X(\omega) > 0\}$. Τότε $A \in \mathcal{A}$ (γιατί η X είναι μετρήσιμη), και $\mu(A) = 0$ (γιατί $X = 0$ $\sigma.\pi.$). Αφού το $\nu(A) = \int_A X d\mu$ είναι απόλυτα συνεχές (ως προς μ) μέτρο, έπεται ότι $\nu(A) = 0$, και

$$\int X d\mu = \nu(\Omega) = \nu(A) + \nu(A^c) = \nu(A^c)$$
$$= \int_{A^c} X d\mu = \int X I_{A^c} d\mu = \int 0 d\mu = 0,$$

διότι $X I_{A^c} \equiv 0$.

(ii) Θέτουμε $A_n = \{\omega : X(\omega) \geq \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, οπότε $A_n \in \mathcal{A}$, και $A_n \nearrow A = \{\omega : X(\omega) > 0\}$. Άρα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\mu(A_{n_0}) > 0$ (αφού $\mu(A_n) \nearrow \mu(A) > 0$). Θέτουμε $Y_0 = \frac{1}{n_0} I_{A_{n_0}}$, και παρατηρούμε ότι η Y_0 είναι απλή, και $0 \leq Y_0 \leq X$, διότι για $\omega \in A_{n_0}^c$, $Y_0(\omega) = 0 \leq X(\omega)$, ενώ για $\omega \in A_{n_0}$, $Y_0(\omega) = \frac{1}{n_0} \leq X(\omega)$, επειδή $X(\omega) \geq \frac{1}{n_0}$ όταν $\omega \in A_{n_0}$. Φυσικά, $\int Y_0 d\mu = \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) > 0$. Συνεπώς,

$$0 < \int Y_0 d\mu \leq \int X d\mu.$$

(iii) Ας υποθέσουμε ότι το $B = \{\omega : X(\omega) = +\infty\}$ (που ανήκει στην $\mathcal{A}$, διότι η X είναι μετρήσιμη, και $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, με $B_n = \{\omega : X(\omega) \geq n\} \in \mathcal{A}$) έχει θετικό μέτρο, δηλ. $\mu(B) > 0$. Τότε $Y_n = n I_B \leq X$, και συνεπώς,

$$\int Y_n d\mu = n\mu(B) \leq \int X d\mu, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

που σημαίνει ότι $\int X d\mu = +\infty$ (άτοπο). Άρα, $\mu(B) = 0$.

(iv) Έστω $\mathit{\Gamma} = \{\omega : X > Y\}$. Αφού οι X και Y είναι μετρήσιμες, $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{A}$, και, από την υπόθεση, $\mu(\mathit{\Gamma}) = 0$. Θέτοντας

$\nu_1(A) = \int_A X d\mu$ και $\nu_2(A) = \int_A Y d\mu$, έχουμε ότι τα ν_1 και ν_2 είναι μέτρα (στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), και $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \ll \mu$, οπότε $\nu_1(\Gamma) = \nu_2(\Gamma) = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int X d\mu &= \nu_1(\Omega) = \nu_1(\Gamma) + \nu_1(\Gamma^c) = \nu_1(\Gamma^c) \\ &= \int_{\Gamma^c} X d\mu = \int X I_{\Gamma^c} \leq \int Y I_{\Gamma^c} = \int_{\Gamma^c} Y d\mu \\ &= \nu_2(\Gamma^c) = \nu_2(\Gamma) + \nu_2(\Gamma^c) = \nu_2(\Omega) = \int Y d\mu.\end{aligned}$$

[Η μόνη ανισότητα που χρησιμοποιήθηκε προέρχεται από το γεγονός ότι $0 \leq X I_{\Gamma^c} \leq Y I_{\Gamma^c}$, από τον ορισμό του Γ.]

(v) Αφού $X = Y$ $\sigma.\pi.$, έπεται ότι $X \leq Y$ $\sigma.\pi.$, και $Y \leq X$ $\sigma.\pi.$, επομένως, από το (iv) έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.8 Αν $X = Y$ $\sigma.\pi.$ (χωρίς να απαιτούμε $X \geq 0$ ή $Y \geq 0$), και ένα από τα $\int X d\mu$, $\int Y d\mu$, ορίζεται (με τιμή στο $\overline{\mathbb{R}}$), τότε ορίζεται και το άλλο, και είναι ίσα:

$$\int X d\mu = \int Y d\mu.$$

Απόδειξη: Αφού $X = Y$ $\sigma.\pi.$, έπεται ότι $X^+ = Y^+$ $\sigma.\pi.$, $X^- = Y^-$ $\sigma.\pi.$, και $X^+ \geq 0$, $X^- \geq 0$, $Y^+ \geq 0$, $Y^- \geq 0$. Αν το $\int X d\mu$ δεν ορίζεται, τότε $\int X^+ d\mu = \int X^- d\mu = +\infty$, και, από την Πρόταση 5.7(v), προκύπτει ότι και $\int Y^+ d\mu = \int Y^- d\mu = +\infty$, οπότε το $\int Y d\mu$ δεν ορίζεται επίσης. Αν το $\int X d\mu$ ορίζεται, τότε ένα τουλάχιστον από τα $a = \int X^+ d\mu$, $b = \int X^- d\mu$

είναι πεπερασμένο (δηλ. $a \in [0,+\infty]$, $b \in [0,+\infty]$, $\min\{a,b\} \in [0,+\infty)$), οπότε, από την Πρόταση 5.7(v), θα είναι $\int Y^+ d\mu = a$, $\int Y^- d\mu = b$, και τελικά,

$$\int Y d\mu = \int Y^+ d\mu - \int Y^- d\mu = a - b = \int X^+ d\mu - \int X^- d\mu = \int X d\mu. \ \square$$

Από το πόρισμα αυτό γίνεται φανερό ότι το $\int X d\mu$ καθορίζεται από τις τιμές της $X(= X(\omega))$, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση X για «σχεδόν όλα τα ω», δηλ. εκτός ίσως ενός συνόλου $B \in \mathcal{A}$, με $\mu(B) = 0$. Αυτό έχει την εξής συνέπεια: **Όλα τα θεωρήματα ολοκλήρωσης που αποδεικνύουμε για μετρήσιμες συναρτήσεις με κάποιες συνθήκες, εξακολουθούν να ισχύουν και όταν οι συνθήκες ικανοποιούνται σχεδόν παντού.** Για παράδειγμα, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue μπορεί να γενικευθεί ως εξής:

«*Εάν* $0 \le X_1$ *σ.π., και* $X_n \le X_{n+1}$ *σ.π. για* $n = 1,2,\ldots$, *και* $\lim X_n = X$ σ.π. (δηλ. $\mu(\{\omega : \lim X_n(\omega)$ *δεν ορίζεται, ή ορίζεται και* $\lim X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$), *τότε* $\int X_n d\mu \to \int X d\mu$, καθώς $n \to \infty$.»

Απόδειξη: Ορίζουμε $A_0 = \{\omega : X_1(\omega) < 0\}$, $A_n = \{\omega : X_n(\omega) > X_{n+1}(\omega)\}$, $n = 1,2,\ldots$, $B = \{\omega : \lim X_n(\omega)$ δεν ορίζεται$\}$, και $\Gamma = \{\omega : \lim X_n(\omega)$ ορίζεται, και $\lim X_n(\omega) \neq X(\omega)\}$. Τότε, από τις υποθέσεις, $\mu(A_0) = \mu(B) = \mu(\Gamma) =$

$\mu(A_n) = 0$ για $n = 1, 2, \ldots$, οπότε για το $\varDelta = B \cup \varGamma \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup A_0$ ισχύει ότι $\mu(\varDelta) = 0$. Όμως, τώρα, οι μετρήσιμες συναρτήσεις $XI_{\Delta^c}, X_1 I_{\Delta^c}, X_2 I_{\Delta^c}, \ldots$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης, και, επιπροσθέτως, $XI_{\Delta^c} = X$ σ.π., και $X_n I_{\Delta^c} = X_n$ σ.π. για $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 5.8,

$$\int X_n d\mu = \int X_n I_{\Delta^c} d\mu \to \int X I_{\Delta^c} d\mu = \int X d\mu. \ \square$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μία μετρήσιμη συνάρτηση X καλείται **ολοκληρώσιμη** όταν

$$\int X^+ d\mu < +\infty \quad \text{και} \quad \int X^- d\mu < +\infty.$$

[Οπότε, το ολοκλήρωμά της, $\int X d\mu = \int X^+ d\mu - \int X^- d\mu$, είναι πραγματικός αριθμός.] Από την Πρόταση 5.6(i) προκύπτει ότι $\int |X| d\mu = \int X^+ d\mu + \int X^- d\mu < \infty$ (αφού $|X| = X^+ + X^-$), όταν η X είναι ολοκληρώσιμη. Αλλά και αντίστροφα, όταν $\int |X| d\mu < \infty$, τότε $\int (X^+ + X^-) d\mu = \int X^+ d\mu + \int X^- d\mu < +\infty$ (και πάλι από την Πρόταση 5.6(i), αφού οι X^+, X^- είναι μη αρνητικές μετρήσιμες), και συνεπώς, $\int X^+ d\mu < +\infty$ και $\int X^- d\mu < +\infty$, που σημαίνει ότι η X είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να είναι η (εκτεταμένη) μετρήσιμη συνάρτηση X ολοκληρώσιμη είναι η

$$\int |X| d\mu < +\infty.$$

Για (εκτεταμένες) ολοκληρώσιμες μετρήσιμες συναρτήσεις X, Y (όχι, κατ΄ ανάγκην, μη αρνητικές) ισχύει το εξής λήμμα, το οποίο αποδεικνύει την **γραμμικότητα του ολοκληρώματος** στην πιο γενική της μορφή.

Λήμμα 5.9 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος) Εάν οι (εκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις X, Y είναι ολοκληρώσιμες, στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, τότε και η[7] $Z = aX + bY$ (όπου $a, b \in \mathbb{R}$) είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα,

$$\int Z d\mu = a \int X d\mu + b \int Y d\mu.$$

Αν, επιπλέον, $X \leq Y$, τότε $\int X d\mu \leq \int Y d\mu$, και ειδικότερα, $\left|\int X d\mu\right| \leq \int |X| d\mu$.

Απόδειξη: Αφού η X υποτέθηκε ολοκληρώσιμη, θα είναι $\int |X| d\mu < \infty$, σύμφωνα με τα παραπάνω, οπότε $\mu(\{\omega : |X(\omega)| = \infty\}) = 0$, λόγω της Πρότασης 5.7(iii), εφαρμοζόμενη στην, μη αρνητική, (εκτεταμένη) μετρήσιμη συνάρτηση $|X|$. Για τον ίδιο

[7] Ως συνήθως, θεωρούμε ότι $0 \cdot X(\omega) = 0$, όταν $X(\omega) = +\infty$ ή $-\infty$, και παρόμοια για την Y. Έτσι, οι $aX(\omega)$ και $bY(\omega)$ είναι καλά ορισμένοι, πιθανώς εκτεταμένοι, πραγματικοί αριθμοί, για κάθε $\omega \in \Omega$. Αν $ab \neq 0$, είναι δυνατόν να υπάρχουν $\omega \in \Omega$ για τα οποία το άθροισμα $Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$ δεν είναι καλά ορισμένο (είναι, π.χ., της μορφής $(+\infty) + (-\infty)$). Για κάθε τέτοιο ω μπορούμε, φυσικά, να ορίσουμε την τιμή $Z(\omega)$ εντελώς αυθαίρετα (αρκεί η Z να παραμείνει μετρήσιμη), όπως θα φανεί κατά την απόδειξη του λήμματος.

λόγο, $\mu(\{\omega : |Y(\omega)| = \infty\}) = 0$. Επομένως, η εκτεταμένη μετρήσιμη συνάρτηση $Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$ είναι καλά ορισμένη, για όλα σχεδόν τα $\omega \in \Omega$. Για κάθε $\omega \in \Omega$ για το οποίο η $Z(\omega)$ είναι της μορφής $(+\infty) + (-\infty)$, ή $(-\infty) + (+\infty)$, μπορούμε να την ξαναορίσουμε, εντελώς αυθαίρετα, όπως, για παράδειγμα, $Z(\omega) = 0$ (ή και $Z(\omega) = -\infty$). Μάλιστα, αν η Z οριστεί έτσι ώστε να έχει σταθερή τιμή για όλα αυτά τα ω, τότε η Z θα είναι μετρήσιμη.[8] Θέτοντας τώρα $\widetilde{X} = XI_A$ και $\widetilde{Y} = YI_A$, όπου

$$A = \{\omega : |X(\omega)| < \infty \text{ και } |Y(\omega)| < \infty\},$$

έχουμε ότι $\{\omega : |\widetilde{X}(\omega)| = \infty\} = \{\omega : |\widetilde{Y}(\omega)| = \infty\} = \varnothing$, $X = \widetilde{X}$ σ.π., και $Y = \widetilde{Y}$ σ.π. Επομένως, $aX + bY = a\widetilde{X} + b\widetilde{Y}$ σ.π., και, επίσης, $\{\omega : |a\widetilde{X}(\omega) + b\widetilde{Y}(\omega)| = \infty\} = \varnothing$, επειδή $|a\widetilde{X}(\omega) + b\widetilde{Y}(\omega)| \leq |a||\widetilde{X}(\omega)| + |b||\widetilde{Y}(\omega)| < \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Συνεπώς, τα ολοκληρώματα $\int X d\mu$, $\int |X| d\mu$, $\int aX d\mu$, $\int |aX| d\mu$, $\int Y d\mu$, $\int |Y| d\mu$, $\int bY d\mu$, $\int |bY| d\mu$, $\int (aX+bY) d\mu$, $\int |aX + bY| d\mu$, είναι όλα ίσα με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα $\int \widetilde{X} d\mu$, $\int |\widetilde{X}| d\mu$, $\int a\widetilde{X} d\mu$, $\int |a\widetilde{X}| d\mu$, $\int \widetilde{Y} d\mu$, $\int |\widetilde{Y}| d\mu$, $\int b\widetilde{Y} d\mu$, $\int |b\widetilde{Y}| d\mu$, $\int (a\widetilde{X} + b\widetilde{Y}) d\mu$, $\int |a\widetilde{X} + b\widetilde{Y}| d\mu$, λόγω του Πορίσματος 5.8. Αυτό αποδεικνύει ότι, χωρίς βλάβη της γενι-

[8] Καλό θα ήταν να επιβεβαιωθεί η μετρησιμότητα της Z σε αυτήν την περίπτωση. Επίσης, ο αναγνώστης καλείται να δείξει ότι είναι δυνατόν, ορίζοντας αυθαίρετα τις τιμές $Z(\omega)$ στα «παθολογικά» αυτά ω, να οδηγηθούμε σε μη μετρήσιμη Z, και ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που το μ είναι πλήρες μέτρο.

κότητας, μπορούμε να υποθέσουμε πως $\{\omega : |X(\omega)| = \infty\} = \{\omega : |Y(\omega)| = \infty\} = \varnothing$, δηλ. ότι οι X και Y είναι μη εκτεταμένες (συνήθεις) μετρήσιμες συναρτήσεις (ισοδύναμα, $A = \Omega$, $X = \widetilde{X}$, και $Y = \widetilde{Y}$), πράγμα το οποίο και θα κάνουμε για το υπόλοιπο της απόδειξης. Έτσι, η παράσταση $aX(\omega) + bY(\omega)$ θα είναι καλά ορισμένη (και πεπερασμένη), για κάθε $\omega \in \Omega$.

Δείχνουμε πρώτα ότι $\int aXd\mu = a\int Xd\mu$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αν $a = 0$ η ισότητα είναι προφανής. Αν $a > 0$, τότε $|aX| = a|X|$, οπότε $\int |aX|d\mu = \int a|X|d\mu = a\int |X|d\mu < \infty$ (Λήμμα 5.4(vi)), και συνεπώς, η aX είναι ολοκληρώσιμη. Όμως, $(aX)^+ = aX^+$ και $(aX)^- = aX^-$, οπότε, και πάλι από το Λήμμα 5.4(vi),

$$\begin{aligned}\int aXd\mu &= \int (aX)^+ d\mu - \int (aX)^- d\mu = \int aX^+ d\mu - \int aX^- d\mu \\ &= a\int X^+ d\mu - a\int X^- d\mu = a\left(\int X^+ d\mu - \int X^- d\mu\right) = a\int Xd\mu.\end{aligned}$$

Αν $a < 0$, γράφουμε $aX = (-a)(-X)$, και εφαρμόζουμε το παραπάνω συμπέρασμα για την $-X$ (που είναι ολοκληρώσιμη), και τον αριθμό $-a$ (που είναι θετικός). Θα προκύψει τότε, αφού $(-X)^+ = X^-$, $(-X)^- = X^+$, ότι

$$\begin{aligned}\int aX d\mu &= \int (-a)(-X) d\mu = (-a)\int (-X) d\mu \\ &= (-a)\left(\int (-X)^+ d\mu - \int (-X)^- d\mu\right) \\ &= (-a)\left(\int X^- d\mu - \int X^+ d\mu\right) = a\int X d\mu.\end{aligned}$$

Η $aX + bY$ είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, $|aX + bY| \leq |a||X| + |b||Y|$, και συνεπώς, εφαρμόζοντας τα (ii) και (vi) του Λήμματος 5.4,

$$\int |aX + bY| d\mu \leq |a| \int |X| d\mu + |b| \int |Y| d\mu < \infty.$$

Άρα, η $X + Y$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα,

$$(X+Y)^+ - (X+Y)^- = X+Y = (X^+ - X^-) + (Y^+ - Y^-),$$

δηλαδή

$$(X+Y)^+ + X^- + Y^- = (X+Y)^- + X^+ + Y^+,$$

και όλες οι $(X+Y)^+, X^-, Y^-, (X+Y)^-, X^+, Y^+$, είναι μη αρνητικές και ολοκληρώσιμες. Από την Πρόταση 5.6(i),

$$\begin{aligned}&\int (X+Y)^+ d\mu + \int X^- d\mu + \int Y^- d\mu \\ &\quad = \int \left[(X+Y)^+ + X^- + Y^-\right] d\mu = \int \left[(X+Y)^- + X^+ + Y^+\right] d\mu \\ &\quad = \int (X+Y)^- d\mu + \int X^+ d\mu + \int Y^+ d\mu.\end{aligned}$$

Αφού οι $(X+Y), X, Y$, είναι ολοκληρώσιμες, όλα τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα, στις παραπάνω ισότητες, είναι πεπερασμένοι, μη αρνητικοί, αριθμοί, και συνεπώς,

$$\int (X+Y)^+ d\mu - \int (X+Y)^- d\mu = \left[\int X^+ d\mu - \int X^- d\mu\right] + \left[\int Y^+ d\mu - \int Y^- d\mu\right]$$

δηλαδή

$$\int (X+Y) d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu.$$

Τελικά,

$$\int (aX+bY) d\mu = \int [(aX)+(bY)] d\mu = \int aX d\mu + \int bY d\mu = a\int X d\mu + b\int Y d\mu.$$

Αν, τώρα, $X \le Y$, τότε $Y = X + (Y-X)$, όπου $Y - X \ge 0$. Τότε, όμως, και $\int (Y-X) d\mu \ge 0$ (διότι το ολοκλήρωμα μιας απλής $Z \ge 0$ είναι, εξ' ορισμού, ≥ 0, και

$$\int (Y-X) d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup\left\{\int Z d\mu : \ Z \ \text{ απλή}, \ \ 0 \le Z \le Y - X\right\},$$

οπότε το σύνολο, του οποίου λαμβάνουμε το supremum, περιέχει μη αρνητικούς αριθμούς). Από τα προηγούμενα, αφού οι X και $Y - X$ είναι ολοκληρώσιμες,

$$\int Y d\mu = \int [X + (Y-X)] d\mu = \int X d\mu + \int (Y-X) d\mu \ge \int X d\mu.$$

Τέλος, η σχέση $\left|\int X d\mu\right| \le \int |X| d\mu$ προκύπτει από το γεγονός ότι $-|X| \le X \le |X|$, αφού $\int -|X| d\mu = -\int |X| d\mu$ (για $a = -1$ στα προηγούμενα). $\square$

Σημειώνεται ότι η παρούσα ανάπτυξη του ολοκληρώματος εισηγείται την εξής τεχνική απόδειξης, ο οποία είναι **κλασική** στην θεωρία ολοκλήρωσης:

Κλασική τεχνική απόδειξης στην θεωρία ολοκλήρωσης. *Πρώτα αποδεικνύουμε την ζητούμενη πρόταση για δείκτριες $X = I_A$. Μετά, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, την αποδεικνύουμε για απλές $X \geq 0$, στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας Μονότονη Σύγκλιση, την αποδεικνύουμε για μετρήσιμες $X \geq 0$, και, τέλος, για αυθαίρετες μετρήσιμες $X = X^+ - X^-$, αφού οι X^+, X^- είναι ≥ 0 μετρήσιμες.*

Μία πολύ σημαντική εφαρμογή του Λήμματος Fatou (και ίσως το σημαντικότερο αποτέλεσμα σύγκλισης) δίδεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.10 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue)[9] Εάν οι μετρήσιμες συναρτήσεις X_n, X και Y είναι τέτοιες ώστε $\lim X_n = X$ σ.π., $|X_n| \leq |Y|$ σ.π., και $\int |Y| d\mu < \infty$ (δηλ. η Y είναι ολοκληρώσιμη), τότε η X είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα,

$$\lim_n \int X_n d\mu = \int X d\mu, \quad \text{και} \quad \lim_n \int |X_n - X| d\mu = 0.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι όλες οι υποθέσεις ισχύουν **παντού** (και όχι σχεδόν παντού), δηλ. $|X_n| \leq |Y|$, και $X_n \to X$, κατά σημείο. Θέτουμε $X^* = \limsup X_n$, $X_* = \liminf X_n$, ο-

[9] Lebesgue's Dominated Convergence Theorem.

πότε, αφού $|X_n| \leq |Y|$, έπεται ότι $|X^*| \leq |Y|$ και $|X_*| \leq |Y|$, και επομένως, οι X^*, X_* είναι ολοκληρώσιμες. [Ας σημειωθεί ότι, γενικά, όταν $|a_n| \leq |b|$ για κάθε n, τότε $-|b| \leq a_n \leq |b|$ για κάθε n, οπότε ισχύει και η ανισότητα $-|b| \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq |b|$, που σημαίνει ότι $|\liminf a_n| \leq |b|$ και $|\limsup a_n| \leq |b|$.] Θέτουμε $Z_n = |Y| + X_n$, $W_n = |Y| - X_n$, οπότε οι Z_n, W_n είναι μη αρνητικές, μετρήσιμες, και $\liminf Z_n = |Y| + X_*$, $\liminf W_n = |Y| - \limsup X_n = |Y| - X^*$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int (|Y| + X_*)d\mu &= \int \liminf Z_n d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int Z_n d\mu \\
&= \liminf \int (|Y| + X_n)d\mu = \liminf \left[\int |Y| d\mu + \int X_n d\mu \right] \\
&= \int |Y| d\mu + \liminf \int X_n d\mu,
\end{aligned}$$

δηλαδή[10]

$$\int X_* d\mu \leq \liminf \int X_n d\mu.$$

[10] Αυτή η ανισότητα, αν και είναι ίδια με αυτήν του Λήμματος Fatou, **δεν είναι** το Λήμμα Fatou, αφού δεν υποθέτουμε ότι $X_n \geq 0$, απλώς υποθέτουμε ότι $|X_n| \leq |Y|$, όπου Y ολοκληρώσιμη. Άρα, η ανισότητα του Λήμματος Fatou ισχύει και σε πιο γενικό πλαίσιο.

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\int(|Y|-X_*)d\mu &= \int \liminf W_n d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int W_n d\mu \\ &= \liminf \int (|Y|-X_n)d\mu = \liminf \left[\int |Y|d\mu - \int X_n d\mu\right] \\ &= \int |Y|d\mu - \limsup \int X_n d\mu,\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\limsup \int X_n d\mu \leq \int X^* d\mu.$$

Άρα,[11]

$$\int X_* d\mu \leq \liminf_n \int X_n d\mu \leq \limsup_n \int X_n d\mu \leq \int X^* d\mu.$$

Όμως $X_n \to X$, που σημαίνει ότι $X = X_* = X^*$, και συνεπώς,

$$\liminf \int X_n d\mu = \limsup \int X_n d\mu = \int X d\mu,$$

δηλαδή,

$$\int X_n d\mu \to \int X d\mu, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Τώρα, προφανώς, $Z_n = |X_n - X| \to 0$, αφού $X_n \to X$, και $|Z_n| \leq |X_n| + |X| \leq 2|Y|$ (με $\int 2|Y|d\mu = 2\int |Y|d\mu < +\infty$), οπότε, από το παραπάνω συμπέρασμα (εφαρμοζόμενο στις $Z_n \to 0$ και $2Y$, αντί των $X_n \to X$ και Y) έχουμε

$$\int |X_n - X|d\mu = \int Z_n d\mu \to \int 0 d\mu = 0,$$

[11] Για $\mu = \mathbb{P}$ (μέτρο πιθανότητας), $X_n = I_{A_n}$, και $Y \equiv 1$, παίρνουμε το Θεώρημα ;;.

δηλαδή το δεύτερο συμπέρασμα του θεωρήματος.

Η γενική περίπτωση (που $X_n \to X$ σ.π., $|X_n| \leq |Y|$ σ.π., και $\int |Y| d\mu < +\infty$) προκύπτει εύκολα από αυτά που έχουμε, μέχρι τώρα, αποδείξει. Πράγματι, εξαιρώντας το σύνολο A, με $\mu(A) = 0$, για το οποίο $X_n \nrightarrow X$, ή $|X_n| > |Y|$ για κάποιο n, η ισχύς του θεωρήματος για τις $X_n I_{A^c}$, $X I_{A^c}$, και $|Y| I_{A^c}$, και το γεγονός ότι $\int |Y| I_{A^c} d\mu = \int_{A^c} |Y| d\mu \leq \int |Y| d\mu < +\infty$, μας εξασφαλίζουν ότι η $X I_{A^c}$ είναι ολοκληρώσιμη,

$$\int X_n I_{A^c} d\mu \to \int X I_{A^c} d\mu, \quad \text{και} \quad \int |X_n - X| I_{A^c} d\mu \to 0.$$

Αφού $\mu(A) = 0$, θα είναι $X = X I_{A^c}$ μ–σ.π. (και ομοίως, $X_n = X_n I_{A^c}$ μ–σ.π.), διότι τα ω για τα οποία οι συναρτήσεις X και $X I_{A^c}$ (ή οι X_n και $X_n I_{A^c}$) μπορούν να διαφέρουν, αποτελούν (μετρήσιμο) υποσύνολο του A. Άρα και η X είναι ολοκληρώσιμη, όπως και οι X_n. Θεωρούμε τώρα το μέτρο ν, με $\nu(B) = \int_B |X_n - X| d\mu$. Αφού το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ, και $\mu(A) = 0$, έπεται ότι και $\nu(A) = 0$, και συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int |X_n - X| I_{A^c} d\mu &= \int_{A^c} |X_n - X| d\mu = \nu(A^c) \\ &= \nu(A) + \nu(A^c) = \nu(\Omega) = \int |X_n - X| d\mu. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\int |X_n - X| d\mu \to 0$, καθώς $n \to \infty$, και φυσικά, $\int X_n d\mu \to \int X d\mu$, αφού

$$\left| \int X_n d\mu - \int X d\mu \right| = \left| \int (X_n - X) d\mu \right| \leq \int |X_n - X| d\mu \to 0. \ \square$$

Εφαρμογή 5.11 Στον χώρο μέτρου $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, όπου $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, και μ το αριθμητικό μέτρο ($\mu(A) =$ *πλήθος στοιχείων του* A), μία «συνάρτηση», $X : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, είναι ακολουθία εκτεταμένων πραγματικών αριθμών ($x_k = X(k)$, $k = 1, 2, \ldots$), και μία ακολουθία «συναρτήσεων», $X_n : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, είναι, στην πραγματικότητα, ακολουθία ακολουθιών ($x_{nk} = X_n(k)$, $k = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots$). Επίσης, το ολοκλήρωμα παίρνει την μορφή

$$\int X d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

και ορίζεται όταν ένα τουλάχιστον από τα $\int X^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^+$, $\int X^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^-$, είναι πεπερασμένο. Φυσικά, η X είναι «ολοκληρώσιμη» όταν και μόνο όταν

$$\int |X| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty.$$

[Ας σημειωθεί ότι όλες οι «συναρτήσεις» είναι μετρήσιμες.]

Εάν $0 \leq x_{nk} \nearrow x_k$ καθώς $n \to \infty$ (για $k = 1, 2, \ldots$), το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται την οριακή σχέση (ακόμα και αν κάποια από τα x_k ισούνται με $+\infty$)

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Εάν $|x_{nk}| \leq |y_k|$ για $k = 1, 2, \ldots,\ n = 1, 2, \ldots$, και $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < +\infty$ (δηλ. $\int |Y| d\mu < +\infty$, όπου $Y(k) = y_k,\ k = 1, 2, \ldots$), και εάν $x_{nk} \to x_k$ καθώς $n \to \infty$, τότε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης μας εξασφαλίζει το Θεώρημα Weierstrass:

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n x_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \left(\text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\right),$$

καθώς, επίσης, και την οριακή σχέση

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk} - x_k| = 0.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η $X(k) = (-1)^{k+1}/k,\ k = 1, 2, \ldots$, **δεν είναι ολοκληρώσιμη** σε αυτόν τον χώρο, αφού

$$\int |X| d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

αν και $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \log 2$ (με την έννοια ότι $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1}/k = \log 2$). Πράγματι, για την ολοκληρωσιμότητα της X, **απαιτείται** όπως τα $\int X^+ d\mu$ και $\int X^- d\mu$ είναι πεπερασμένα, ενώ εδώ έχουμε $\int X^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k-1) = +\infty$, $\int X^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k) = +\infty$. Ο λόγος που δεν γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \log 2$ στην θεωρία ολοκλήρωσης, αν και, ως όριο, η σχέση

$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}/k = \log 2$ είναι σωστή, προέρχεται από το γεγονός ότι το (προσημασμένο) «εμβαδόν», κάτω από την X, δεν είναι καλά (μονοσήμαντα) ορισμένο. Για παράδειγμα, ο Riemann έχει αποδείξει ότι το αποτέλεσμα της άθροισης $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ **εξαρτάται** από την σειρά με την οποία προσθέτουμε τους όρους (αυτό συμβαίνει σε κάθε σειρά που συγκλίνει υπό συνθήκη), και ότι, π.χ., το $1+1/3-1/2+1/5+1/7-1/4+1/9+1/11-1/6+\ldots$ συγκλίνει προς κάποιον αριθμό[12] x, με $x > \log 2$, αν και οι προσθετέοι είναι οι ίδιοι, με διαφορετική σειρά! Σαφέστατα αυτό είναι ένα ανεπιθύμητο φαινόμενο, και έτσι, σε «συναρτήσεις» της μορφής αυτής, δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποιο (πεπερασμένο ή άπειρο) «ολοκλήρωμα». $\square$

5.3 Επιπλέον Ιδιότητες του Ολοκληρώματος

Το παρακάτω πόρισμα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Πόρισμα 5.12 (i) Εάν $\sum_{k=1}^{n} X_k \to X$ *σ.π.*, καθώς $n \to \infty$, και $|\sum_{k=1}^{n} X_k| \le |Y|$ *σ.π.*, για $n = 1, 2, \ldots$, και εάν η Y είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\int |Y| d\mu < +\infty$ – εδώ, φυσικά, εννοείται ότι όλες οι X_k, $k \ge 1$, καθώς και οι X, Y, είναι μετρήσιμες), τότε η X είναι ολοκληρώσιμη, και οι X_k είναι ολοκληρώσιμες

[12] βασικά, $x = \frac{3}{2}\log 2$

$(k = 1, 2, \ldots)$, και μάλιστα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} X_n d\mu = \int X d\mu, \qquad (5.4)$$

και, επιπλέον, $\int \left|\sum_{k=1}^{n} X_k - X\right| d\mu \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(ii) Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n| d\mu < +\infty$, τότε υπάρχει ολοκληρώσιμη μετρήσιμη συνάρτηση X, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = X$ $\sigma.\pi.$ (και $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty$ $\sigma.\pi.$), και η (5.4) ισχύει.

Απόδειξη: (i) Η X_1 είναι ολοκληρώσιμη, αφού $|X_1| \le |Y|$ $\sigma.\pi.$ Ομοίως, η X_n είναι ολοκληρώσιμη ($n \ge 2$), αφού $|X_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n-1} X_k\right| \le 2|Y|$ $\sigma.\pi.$ Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \to X$, αφού $|Z_n| \le |Y|$ $\sigma.\pi.$

(ii) Από το Θεώρημα Beppo Levi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n| d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| d\mu < +\infty,$$

και άρα, η $Y = \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, $Y(\omega) < +\infty$ $\sigma.\pi.$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n(\omega)| < +\infty$ $\sigma.\pi.$, που σημαίνει ότι η $\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ συγκλίνει, $\sigma.\pi.$, σε πραγματικό αριθμό, καθώς $n \to \infty$. [Διότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.] Έστω

$$X(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k(\omega), & \text{αν η σειρά συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό,} \\ 0, & \text{αν η σειρά δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.} \end{cases}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

Για κάθε n, $\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| \le |Y| = Y$ σ.π., και $\sum_{k=1}^{n} X_k \to X$ σ.π., καθώς $n \to \infty$.

Συνεπώς, εφαρμόζεται το (i). $\square$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι αν γνωρίζουμε το $\int_A X d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε μπορούμε να καθορίσουμε την X μ-σ.π. (κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες). Έχουμε, δηλαδή, το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.13 (i) Αν $X \ge 0$ και $Y \ge 0$ (μετρήσιμες, ακόμα και εκτεταμένες, ορισμένες σε έναν χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$), και εάν ισχύει ότι

$$\int_A X d\mu = \int_A Y d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A},$$

και εάν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $X = Y$ σ.π.

(ii) Εάν οι X, Y είναι ολοκληρώσιμες (ακόμα και εκτεταμένες), και εάν

$$\int_A X d\mu = \int_A Y d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A},$$

τότε $X = Y$ σ.π. [Χωρίς να χρειάζεται να είναι σ-πεπερασμένο το μ, ούτε απαιτείται να είναι μη αρνητικές οι X, Y.]

Απόδειξη: (i) Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, θεωρούμε μία ακολουθία $A_n \in \mathcal{A}$, με $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε n, και[13] $A_n \nearrow \Omega$.

[13]Τέτοια ακολουθία μπορεί να βρεθεί, επειδή υπάρχουν $\Gamma_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, με $\mu(\Gamma_n) < \infty$ για κάθε n, και $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$, οπότε μπορούμε να εκλέξουμε, π.χ., $A_n = \bigcup_{j=1}^{n} \Gamma_j \nearrow \Omega$. Το γεγονός

Θέτουμε $B = \{X < Y\} \in \mathcal{A}$, και $B_n = B \cap A_n \cap \{X < n\}$, οπότε $B_n \in \mathcal{A}$, και άρα, εξ' υποθέσεως,

$$\int_{B_n} X d\mu = \int_{B_n} Y d\mu.$$

Όμως, $B_n \nearrow B$, και συνεπώς, $\mu(B_n) \nearrow \mu(B)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\mu(B) > 0$. Τότε θα είναι και $\mu(B_n) > 0$, από κάποιο n και πάνω, που σημαίνει ότι $\int_{B_n}(Y - X)d\mu > 0$, διότι $\int_{B_n}(Y-X)d\mu = \int(Y-X)I_{B_n}d\mu$, $(Y(\omega)-X(\omega))I_{B_n}(\omega) \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$, $(Y(\omega) - X(\omega))I_{B_n}(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in B_n$, και $\mu(B_n) > 0$, βλ. Πρόταση 5.7(ii). Όμως, $XI_{B_n} \leq nI_{B_n}$, και άρα, $\int_{B_n} X d\mu = \int XI_{B_n}d\mu \leq \int nI_{B_n}d\mu = n\mu(B_n) \leq n\mu(A_n) < \infty$, επειδή $B_n \subset A_n$. Επομένως,

$$\int_{B_n}(Y - X)d\mu + \int_{B_n} X d\mu > \int_{B_n} X d\mu.$$

Ταυτόχρονα, λόγω της Πρότασης 5.6(i), η οποία μπορεί να εφαρμοστεί επειδή οι μετρήσιμες συναρτήσεις $(Y - X)I_{B_n}$ και XI_{B_n} είναι μη αρνητικές, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{B_n} Y d\mu &= \int YI_{B_n}d\mu = \int[(Y - X)I_{B_n} + XI_{B_n}]d\mu \\ &= \int(Y - X)I_{B_n}d\mu + \int XI_{B_n}d\mu = \int_{B_n}(Y - X)d\mu + \int_{B_n} X d\mu.\end{aligned}$$

ότι $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n \Gamma_j\right) < \infty$ έπεται από την ανισότητα Boole, $\mu\left(\bigcup_{j=1}^n \Gamma_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(\Gamma_j)$, η οποία ισχύει σε κάθε χώρο μέτρου, και αποδεικνύεται ακριβώς όπως στο Θεώρημα ;;(i) (εκεί είχε δειχθεί για μέτρο πιθανότητας, $\mu = \mathbb{P}$).

Συνεπώς,[14] $\int_{B_n} Y d\mu > \int_{B_n} X d\mu$, και αυτό αντίκειται στις υποθέσεις, επειδή $\int_A X d\mu = \int_A Y d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, και $B_n \in \mathcal{A}$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $\mu(B) > 0$, που σημαίνει ότι $\mu(B) = 0$ (όπου $B = \{X < Y\}$). Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mu(\{X > Y\}) = 0$, και τελικά, $X = Y$ $\sigma.\pi.$

(ii) Θέτοντας $A = \{Y > X\}$, έχουμε ότι η $(Y - X)I_A$ είναι μη αρνητική (προφανώς), και ολοκληρώσιμη, επειδή $\int |(Y - X)I_A| d\mu \leq \int |Y - X| d\mu \leq \int |Y| d\mu + \int |X| d\mu < +\infty$, αφού οι X, Y είναι ολοκληρώσιμες. Αν ήταν $\mu(A) > 0$, τότε, η Πρόταση 5.7(ii) δείχνει ότι

$$\int (Y - X) I_A d\mu > 0,$$

διότι $(Y(\omega) - X(\omega))I_A(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in A$, και $\mu(A) > 0$. Όμως, $(Y - X)I_A = YI_A - XI_A$, και οι XI_A, YI_A είναι, προφανώς, ολοκληρώσιμες, οπότε, από το Λήμμα 5.9, προκύπτει ότι

$$\int_A Y d\mu - \int_A X d\mu = \int Y I_A d\mu - \int_A X I_A d\mu = \int (Y - X) I_A d\mu > 0,$$

δηλαδή

$$\int_A Y d\mu > \int_A X d\mu. \quad \text{(άτοπο)}$$

[14] Παρατηρήστε ότι δεν θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε αυτήν την ανισότητα αν ήταν $\int_{B_n} X d\mu = +\infty$. Πράγματι, η Πρόταση 5.6(i) μας εξασφαλίζει ότι, για οποιεσδήποτε μετρήσιμες $X_1 \geq 0$ και $X_2 \geq 0$, $\int (X_1 + X_2) d\mu = \int X_1 d\mu + \int X_2 d\mu$. Αν, επιπροσθέτως, γνωρίζουμε ότι $\int X_1 d\mu > 0$, δηλ. ότι $\int X_1 d\mu \in (0, +\infty]$, τότε, θα ισχύει μεν ότι $\int (X_1 + X_2) d\mu > \int X_2 d\mu$, αν $\int X_2 d\mu < +\infty$, αλλά, προφανώς, $\int (X_1 + X_2) d\mu = \int X_2 d\mu = +\infty$, όταν $\int X_2 d\mu = +\infty$. Αυτό εξηγεί γιατί υποχρεωθήκαμε να θεωρήσουμε τα συγκεκριμένα σύνολα B_n, στα οποία η $X(\omega)$ παραμένει φραγμένη, αφού $X(\omega) \leq n$ για κάθε $\omega \in B_n$.

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν θέσουμε $A = \{Y < X\}$, και υποθέσουμε ότι $\mu(A) > 0$, που σημαίνει ότι $X = Y$ σ.π. $\square$

Παράδειγμα 5.14 Στον χώρο $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ας υποθέσουμε ότι η Borel συνάρτηση $f : [0,1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\int_{[0,x]} f d\lambda = \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 1,$$

δηλαδή, $\int_0^x f(t)dt = x^2/2$. Τότε $f(x) = x$ σ.π. στο $[0,1]$.

Πράγματι, στον μετρήσιμο χώρο $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, μπορούμε να ορίσουμε δύο μέτρα ν_1 και ν_2, με τύπο

$$\nu_1(B) = \int_B f d\lambda, \quad \nu_2(B) = \int_B g d\lambda, \quad B \in \mathcal{B}([0,1]).$$

όπου $g(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Είναι σαφές ότι $\nu_1([0,x]) = \nu_2([0,x]) = x^2/2$, $0 \leq x < 1$.

Ορίζοντας και την ακολουθία $f_n(x) = f(x) I_{[0,1-\frac{1}{n}]}(x)$, έχουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \nearrow f(x) I_{[0,1)}(x)$. Αφού $f(x) = f(x) I_{[0,1)}(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ (το σύνολο $\{x : f(x) \neq f(x) I_{[0,1)}(x)\}$ περιέχεται στο μονοσύνολο $\{1\}$, που, προφανώς, έχει μέτρο Lebesgue 0), έπεται ότι $0 \leq f_n \nearrow f$, σ.π., και, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \int f d\lambda = \lim_n \int f_n d\lambda = \lim_n \int_{\left[0,1-\frac{1}{n}\right]} f d\lambda = \lim_n \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Έτσι, $\nu_1([0,1]) = 1/2$. Επειδή, προφανώς, ισχύει ότι και $\nu_2([0,1]) = 1/2$, έπεται ότι τα $\nu_1(B)$ και $\nu_2(B)$ συμφωνούν για $B = [0,1]$. Τώρα είναι προφανές ότι τα ν_1 και ν_2 συμφωνούν στα συμπληρώματα των συνόλων που συμφωνούν, καθώς και στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις των συνόλων που συμφωνούν. Επομένως, η οικογένεια των «καλών συνόλων»,

$$\mathcal{B} = \left\{B \in \mathcal{B}([0,1]) : \int_B f d\lambda = \int_B g d\lambda\right\} = \left\{B \in \mathcal{B}([0,1]) : \nu_1(B) = \nu_2(B)\right\},$$

είναι μία λ-κλάση (άρα και κλάση Dynkin) στον $[0,1]$, και μάλιστα, περιέχει την $\mathfrak{D}_1 = \{[0,x],\ x \in [0,1]\}$. Επομένως, η $\mathcal{B}$ περιέχει και την $\delta(\mathfrak{D}_1) = \sigma(\mathfrak{D}_1) = \mathcal{B}([0,1])$, δηλ. $\mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1])$. Αυτό δείχνει ότι $\nu_1(B) = \nu_2(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}([0,1])$, δηλ.

$$\int_B f d\lambda = \int_B g d\lambda, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}([0,1]).$$

Το συμπέρασμα προκύπτει από το Λήμμα 5.13(i), αφού το λ είναι πεπερασμένο στον $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, και σ-πεπερασμένο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει εύκολα ότι η **πυκνότητα** $X = f$, ενός απόλυτα συνεχούς μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}$, ορισμένου στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, είναι μοναδική σ.π. □

5.4 Ολοκλήρωμα στον Επαγόμενο Χώρο

Η ανάπτυξη του ολοκληρώματος Lebesgue έγινε με σκοπό την εφαρμογή του στην Θεωρία Πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, όταν έχουμε μία τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, τότε η μέση τιμή της τ.μ. $Y = g(X)$ (όπου $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα Borel συνάρτηση), ορίζεται ως (βλ. Ορισμό 5.17, παρακάτω)

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[g(X)] = \int Y d\mathbb{P},$$

εφ΄ όσον το ολοκλήρωμα ορίζεται (λέμε τότε ότι «η μέση τιμή της Y **ορίζεται**»), και φυσικά, $\mathbb{E}(Y) \in [-\infty, +\infty]$. Όταν, επιπροσθέτως, η Y είναι ολοκληρώσιμη, λέμε ότι «η μέση τιμή της Y **υπάρχει**», ή ότι η Y **έχει μέση τιμή**, και φυσικά, $\mathbb{E}(Y) \in (-\infty, +\infty)$.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η $\mathbb{E}(Y)$ υπάρχει όταν και μόνο όταν $\mathbb{E}|Y| < +\infty$, αφού $\mathbb{E}|Y| = \int |Y| d\mathbb{P}$. Δεδομένου ότι η X επάγει το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, με τύπο

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

θα ήταν επιθυμητό η $\mathbb{E}[g(X)]$ να μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει κάποιου ολοκληρώματος στον απλούστερο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$, αντί του χώρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Στην πραγματικότητα, στις πιο πολλές εφαρμογές δεν αναφέρεται καν ο χώρος πιθανότητας στον οποίον ορίζεται η υπό μελέτη τ.μ. X, αλλά δίδεται μόνο η αντίστοιχη $\sigma.\kappa.$, F_X, δηλ. το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_X$. Επομένως, είναι πολύ χρήσιμο, αν όχι αναγκαίο, ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$, του χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, να μπορεί να εκτελεστεί και απευθείας στον επαγόμενο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$. Ευτυχώς, αυτό είναι **πάντοτε** εφικτό, επειδή ισχύει το εξής βασικό λήμμα.

Λήμμα 5.15 (ολοκλήρωμα στον επαγόμενο χώρο) Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, και $X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ μία μετρήσιμη απεικόνιση από τον $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ στον $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. [Με άλλα λόγια, ο χώρος $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ είναι μετρήσιμος χώρος, και η X είναι $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$–μετρήσιμη συνάρτηση, δηλ. $X^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.]
Έστω, επίσης, $g : \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Εάν $g \geq 0$, τότε

$$\int_{\Omega_1} g(X(\omega_1))d\mu(\omega_1) = \int_{\Omega_2} g(\omega_2)d\mu_X(\omega_2), \qquad (5.5)$$

και

$$\int_{X^{-1}(A_2)} g(X(\omega_1))d\mu(\omega_1) = \int_{A_2} g(\omega_2)d\mu_X(\omega_2), \text{ για κάθε } A_2 \in \mathcal{A}_2, \qquad (5.6)$$

όπου μ_X το μέτρο που επάγει η X στον $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, και το οποίο ορίζεται ως[15]

$$\mu_X(A_2) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mu(X^{-1}(A_2)) = \mu(\{\omega_1 \in \Omega_1 : X(\omega_1) \in A_2\}), \text{ για κάθε } A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

[Σημειώνεται ότι γράφουμε $\int_{\Omega_1} g(X(\omega_1))d\mu(\omega_1)$, αντί του $\int g \circ X d\mu$ (ή $\int g(X)d\mu$), για να τονίσουμε την μεταβλητή ω_1 της συνάρτησης $(g \circ X)(\omega_1) = g(X(\omega_1))$, και για τον ίδιο λόγο γράφουμε $\int_{\Omega_2} g(\omega_2)d\mu_X(\omega_2)$, αντί του $\int g d\mu_X$.]
Οι ισότητες (5.5) και (5.6) (αφού, τόσο η $g(X(\omega_1))$, ορισμένη στον $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$, όσο και η $g(\omega_2)$, ορισμένη στον $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_X)$, είναι μη αρνητικές) έχουν την έννοια ότι είτε και τα δύο μέλη είναι $+\infty$, ή είναι πεπερασμένα και ισούνται.

[15] ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι το μ_X είναι, πράγματι, μέτρο στον $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$

(ii) Εάν η g είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση, τότε είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ_X όταν και μόνο όταν η συνάρτηση $g \circ X : \Omega_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ. Σε αυτήν την περίπτωση, οι (5.5) και (5.6) ισχύουν επίσης. Τέλος, ακόμη και όταν η g δεν είναι ολοκληρώσιμη, οι (5.5) και (5.6) ισχύουν, εφ΄ όσον βέβαια ορίζεται κάποιο από τα μέλη τους. [Αν, για παράδειγμα, $\int_{X^{-1}(A_2)} g \circ X d\mu = -\infty$, τότε και $\int_{A_2} g d\mu_X = -\infty$, και επίσης, αν $\int g d\mu_X = +\infty$, τότε και $\int g \circ X d\mu = +\infty$.]

Απόδειξη: (i) Χρησιμοποιούμε την κλασική τεχνική απόδειξης (βλ. §5.2): Αν $g(\omega_2) = I_{A_2}(\omega_2)$, τότε η (5.5) γίνεται $\mu\left(X^{-1}(A_2)\right) = \mu_X(A_2)$, που είναι ο ορισμός του επαγόμενου μέτρου, διότι, προφανώς, $g(X(\omega_1)) = I_{A_2}(X(\omega_1)) = I(X \in A_2) = I_{X^{-1}(A_2)}(\omega_1)$. Λόγω γραμμικότητας, η (5.5) ισχύει για απλές $g \geq 0$, και συνεπώς, ισχύει και για μετρήσιμες $g \geq 0$, αφού υπάρχει ακολουθία απλών, g_n, με $0 \leq g_n \nearrow g$, οπότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2} g(\omega_2) d\mu_X(\omega_2) = \int g d\mu_X = \lim_n \int g_n d\mu_X = \lim_n \int_{\Omega_2} g_n(\omega_2) d\mu_X(\omega_2) \\ = \lim_n \int_{\Omega_1} g_n(X(\omega_1)) d\mu(\omega_1) = \int_{\Omega_1} g(X(\omega_1)) d\mu(\omega_1),\end{aligned}$$

διότι $0 \leq g_n(X(\omega_1)) \nearrow g(X(\omega_1))$. Η σχέση (5.6) προκύπτει από την (5.5) για $\widetilde{g}(\omega_2) = I_{A_2}(\omega_2) g(\omega_2)$, παρατηρώντας ότι $\widetilde{g}(X(\omega_1)) = I_{X^{-1}(A_2)}(\omega_1) g(X(\omega_1))$, και ότι η $\widetilde{g}$ είναι μετρήσιμη

≥ 0.

(ii) Προφανώς $(g(X(\omega_1)))^+ = g^+(X(\omega_1))$, και $(g(X(\omega_1)))^- = g^-(X(\omega_1))$, οπότε τα πάντα προκύπτουν από το (i). Αν, π.χ., η g είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ_X, τότε $\int g^+ d\mu_X < +\infty$, $\int g^- d\mu_X < +\infty$, και άρα $\int (g \circ X)^+ d\mu < +\infty$, $\int (g \circ X)^- d\mu < +\infty$, οπότε η $g \circ X$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ, και τελικά, λόγω του (i),

$$\begin{aligned}\int g d\mu_X &\overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int g^+ d\mu_X - \int g^- d\mu_X \\ &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \int (g^+ \circ X) d\mu - \int (g^- \circ X) d\mu \\ &= \int (g \circ X)^+ d\mu - \int (g \circ X)^- d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int (g \circ X) d\mu. \quad \square\end{aligned}$$

Το επόμενο πόρισμα, αν και βρίσκεται σε λάθος θέση (θα έπρεπε να ακολουθούσε τον Ορισμό 5.17 της μέσης τιμής), θα το αναφέρουμε εδώ, επειδή προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 5.15. Για πληρότητα θα το συμπεριλάβουμε και αργότερα.

Πόρισμα 5.16 (τύπος αφηρημένου μαθηματικού) Έστω $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ μία τ.μ. στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ή $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$) μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_X(x) \quad \left(= \int g d\mathbb{P}_X\right),$$

με την έννοια ότι η $\mathbb{E}[g(X)]$ υπάρχει, ορίζεται, ή δεν ορίζεται, αν και μόνο αν το $\int g d\mathbb{P}_X$ υπάρχει, ορίζεται, ή δεν ορίζεται, αντίστοιχα, και τα δύο μέλη είναι πάντα ίσα. Φυσικά, η $\mathbb{E}[g(X)]$ υπάρχει αν και μόνο αν $\mathbb{E}[g(X)] \in (-\infty, +\infty)$, δηλ. αν και μόνο αν $\mathbb{E}|g(X)| < \infty$ (ισοδύναμα, $\int g d\mathbb{P}_X \in (-\infty, +\infty)$, ή $\int |g| d\mathbb{P}_X < \infty$).

Απόδειξη: Είναι άμεση εφαρμογή του Λήμματος 5.15 για $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_X) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$. $\square$

5.5 Ολοκλήρωση και Διαφόριση Πραγματικών Συναρτήσεων

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε (συνήθως χωρίς απόδειξη) μερικές βασικές ιδιότητες, που αφορούν στην ολοκλήρωση και διαφόριση πραγματικών συναρτήσεων. Οι ιδιότητες αυτές, αν και είναι κάπως τεχνικές, είναι χρήσιμες στην Θεωρία Πιθανοτήτων, επειδή συνδέουν την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X (που θα οριστεί στην επόμενη παράγραφο), με την πυκνότητα (ή την συνάρτηση πιθανότητας) του επαγόμενου μέτρου $\mathbb{P}_X$, και χαρακτηρίζουν τις *σ.κ.*, F_X, για τις οποίες η πυκνότητα (ή η συνάρτηση πιθανότητας) υπάρχει. Πλήρεις αποδείξεις μπορούν να βρεθούν στα Κεφάλαια 9–14 των Κουμουλλή και Νεγρεπόντη (1988), και στον Billingsley (1986), §§31–32.

Στα επόμενα θεωρούμε τον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (ή τον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$), και έστω f μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση (ή, γενικότερα, Lebesgue μετρήσιμη), $f \geq 0$.

Ιδιότητα (1) Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < \infty$, όπου το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ είναι ένας άλλος συμβολισμός για το $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$), τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο[16]

$$F(x) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι αύξουσα, απόλυτα συνεχής, $F'(x) = f(x)$ σ.π. (δηλ. λ-σ.π.), και ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες[17] $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt < +\infty$.

Ιδιότητα (2) Εάν η $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχούσα **αύξουσα** συνάρτηση, με

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = \beta < +\infty,$$

τότε υπάρχει η παράγωγος $F'(x)$ σ.π. (και μάλιστα, $0 \leq F'(x) < +\infty$ σ.π.), η F' είναι (Lebesgue μετρήσιμη και) ολοκληρώσιμη, και ισχύει η ανισότητα

$$\int_{-\infty}^{\alpha} F'(t)dt \leq F(\alpha), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

---

[16] Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\int_{(-\infty,x)} g d\lambda = \int_{(-\infty,x]} g d\lambda$, επειδή $\lambda(\{x\}) = 0$. Κατά συνέπεια, επιτρέπεται να γράφουμε $\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$, για οποιοδήποτε από τα $\int_{(-\infty,x)} g d\lambda = \int_{(-\infty,x]} g d\lambda$. Για τον ίδιο λόγο, το $\int_a^b g(t)dt$ παριστάνει οποιοδήποτε από τα $\int_{(a,b]} g d\lambda = \int_{(a,b)} g d\lambda = \int_{[a,b)} g d\lambda = \int_{[a,b]} g d\lambda$.

[17] Η απόλυτη συνέχεια της F προκύπτει από την Πρόταση 5.6(iv), επειδή το μέτρο ν, με $\nu(A) = \int_A f d\lambda$, είναι απόλυτα συνεχές ως προς λ, ενώ οι οριακές συνθήκες έπονται εύκολα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

Μάλιστα, η F είναι απόλυτα συνεχής όταν και μόνο όταν

$$\int_{-\infty}^{\alpha} F'(t)dt = F(\alpha), \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ιδιότητα (3) (γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού) Μία συνάρτηση $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (όχι, κατ΄ ανάγκην, αύξουσα ή θετική) είναι απόλυτα συνεχής στο πεπερασμένο διάστημα $[a,b]$ (όπου $-\infty < a < b < +\infty$), όταν και μόνο όταν ισχύουν τα εξής:

(i) Η παράγωγος $g'(x)$ υπάρχει σ.π. στο $[a,b]$.

(ii) Η $g'(x)$ είναι (Lebesgue μετρήσιμη και) ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(iii) Ισχύει ότι $\int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$, για κάθε $x \in [a,b]$.

Ιδιότητα (4) Για κάθε Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση g υπάρχει μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση h, τέτοια ώστε $h = g$ σ.π.

Ιδιότητα (5) Εάν η g είναι φραγμένη στο (πεπερασμένο διάστημα) $[a,b]$, τότε η g είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ όταν και μόνο όταν το σύνολο ασυνεχειών της, $A(g) = \{x \in [a,b] :$ η g δεν είναι συνεχής στο $x\}$, έχει μέτρο 0, δηλ. η g είναι λ-σ.π. συνεχής στο $[a,b]$. Εάν η g (όχι, κατ΄ ανάγκην, φραγμένη) είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη, και το ολοκλήρωμα Riemann της g ισούται με το ολοκλήρωμα Lebesgue της g στο $[a,b]$. Συμβολικά,

$$\mathcal{R}\!\!\!\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(x)dx \quad \left(= \int_{[a,b]} g d\lambda\right).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μπορεί μία Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση g να μην είναι Borel μετρήσιμη, είναι όμως πάντοτε Lebesgue μετρήσιμη, και, συνεπώς, είναι ίση $\sigma.\pi.$ με μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση, λόγω της Ιδιότητας (4).

Ιδιότητα (6) (πυκνότητα ως προς το μέτρο Lebesgue) Έστω X μία τ.μ. στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ως γνωστόν, η X καθορίζει μονοσήμαντα το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_X$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, με τύπο $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(B)\big)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Φυσικά, το μέτρο $\mathbb{P}_X$ καθορίζει μονοσήμαντα την $\sigma.\kappa.$ F της X, αφού $F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$, αλλά και αντίστροφα, η $\sigma.\kappa.$ F καθορίζει μονοσήμαντα το $\mathbb{P}_X$, και έτσι, το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_X$ συμβολίζεται, μερικές φορές, και ως $\mathbb{P}_F$ (βλ. Κεφάλαιο 4).

Εξ΄ ορισμού, για τυχούσα Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, η μέση τιμή της τ.μ. $g(X)$, συμβολιζόμενη με $\mathbb{E}[g(X)]$, είναι το ολοκλήρωμα $\int_\Omega g(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega)$ (εφ΄ όσον, φυσικά, ορίζεται), το οποίο ισούται με $\int_\mathbb{R} g(x)d\mathbb{P}_X(x)$, Πόρισμα 5.16. Το τελευταίο ολοκλήρωμα συμβολίζεται, πολλές φορές, και ως $\int_\mathbb{R} g(x)dF(x)$ (ολοκλήρωμα Lebesgue-Stieljes), δηλ. ως ολοκλήρωμα της g ως προς την $\sigma.\kappa.$ F της τ.μ. X. Επομένως, έχουμε την ισοδύναμη έκφραση[18] (πρβλ. Χαραλαμπίδης (1990), σελ. 153, Παρατήρηση 2.2)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) \ \left(= \int g dF = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF(x)\right).$$

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δείχνουν ότι τόσο το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_X$, όσο και η $\mathbb{E}[g(X)]$, για δοθείσα Borel g, μπορούν να υπολογισθούν (ή, ακριβέστερα, να καθορισθούν) **με μόνη γνώση** της σ.κ. F, της X.

Στην ειδική περίπτωση που η F είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., σύμφωνα με τον Ορισμό ;;(iii) (ισοδύναμα, όταν η X είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.), οι παραπάνω εκφράσεις επιδέχονται περαιτέρω απλοποίηση. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε μία μη αρνητική, Borel μετρήσιμη, συνάρτηση f, με $f = F'$ σ.π. (υπάρχει τέτοια f λόγω των Ιδιοτήτων (2), (4)), και παρατηρούμε ότι[19]

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_F(B) = \int_B f d\lambda, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{5.7}$$

[18] Το νόημα της ισότητας $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x)$ είναι το εξής: Όλη η πληροφορία που χρειάζεται για να υπολογισθεί η $\mathbb{E}[g(X)]$, όχι μόνο περιλαμβάνεται στο $\mathbb{P}_F = \mathbb{P}_X$, αλλά, στην πραγματικότητα, **μεταφέρεται αυτούσια** από τον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_F)$, μέσω της σ.κ. F, της X. Σημειώνεται ότι ο συμβολισμός dF εννοεί **ό,τι ακριβώς** και ο συμβολισμός $d\mathbb{P}_F = d\mathbb{P}_X$.

[19] Η (5.7) αποδεικνύεται με την κλασική τεχνική της §2.3 του Κεφ. ;;. Πράγματι, αφού $f \geq 0$, το $\nu(B) = \int_B f d\lambda$ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, και μάλιστα, είναι απόλυτα συνεχές ως προς το λ ($\nu \ll \lambda$), Πρόταση 5.6(iv). Αφού η F είναι απόλυτα συνεχής, η Ιδιότητα (2) δείχνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\nu((-\infty, x]) = F(x) = \mathbb{P}_F((-\infty, x])$, που σημαίνει ότι τα ν και $\mathbb{P}_F$ ταυτίζονται στο π-σύστημα $\mathfrak{D}_1 = \{(-\infty, x], \ x \in \mathbb{R}\}$. Επίσης, είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα «καλά σύνολα», δηλ. τα σύνολα στα οποία τα μέτρα ν και $\mathbb{P}_F$ συμφωνούν, δημιουργούν μία κλάση Dynkin, και αφού η κλάση αυτή περιέχει την $\mathfrak{D}_1$, θα περιέχει και την $\delta(\mathfrak{D}_1) = \sigma(\mathfrak{D}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, το οποίο αποδεικνύει την (5.7)

Άρα, η $f = F'$, εκτός από παράγωγος της F, είναι και «παράγωγος» του μέτρου $\mathbb{P}_F$ ως προς λ, δηλ. $f = \frac{d\mathbb{P}_F}{d\lambda}$, σύμφωνα με την ορολογία και τον συμβολισμό της Πρότασης 5.6(iv). Φυσικά, είναι αρκετό η ισότητα $f = F'$ να ισχύει $\sigma.\pi.$, και κάθε τέτοια f ονομάζεται **πυκνότητα** (density), ή **πυκνότητα πιθανότητας** (probability density), ή **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (probability density function – p.d.f.), του $\mathbb{P}_F$ ως προς λ, ή της $\sigma.\kappa.$ F, ή της αντίστοιχης τ.μ. X (και γι αυτό συμβολίζεται και ως f_X στην Θεωρία Πιθανοτήτων). Η πυκνότητα f καθορίζει την $\sigma.\kappa.$ F (και άρα το $\mathbb{P}_F = \mathbb{P}_X$), αφού ισχύει ότι $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, λόγω της Πρότασης 5.6(iv), για οποιαδήποτε Borel συνάρτηση $g \geq 0$,

$$\int g d\mathbb{P}_F = \int g f d\lambda, \text{ δηλαδή } \int_{\mathbb{R}} g(x)dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx,$$

και φυσικά, αφού $g = g^+ - g^-$, η σχέση αυτή ισχύει για κάθε g Borel (αφού $g^+(x)f(x) = (g(x)f(x))^+$, $g^-(x)f(x) = (g(x)f(x))^-$, διότι $f \geq 0$). Άρα, όταν η F είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., τότε το συμπέρασμα του Πορίσματος 5.16 λαμβάνει την μορφή[20]

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx,$$

όπου f είναι η παράγωγος της F (που ταυτόχρονα είναι και η παράγωγος του μέτρου $\mathbb{P}_F$ ως προς λ), και ονομάζεται πυκνότητα (της F, ή του $\mathbb{P}_F$, ή της X). Η πυκνότητα f είναι μοναδική σ.π., αφού μία «άλλη» πυκνότητα, έστω $\widetilde{f}$, του $\mathbb{P}_F$, θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $\int_B \widetilde{f} d\lambda = \mathbb{P}_F(B) = \int_B f d\lambda$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, και άρα $f = \widetilde{f}$ σ.π., Λήμμα 5.13.

Είναι σημαντικό να τονισθεί ότι όλα αυτά ισχύουν και αντιστρόφως: Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για δοθείσα συνάρτηση κατανομής F, υπάρχει Borel συνάρτηση $f \geq 0$, τέτοια

[20] Η έκφραση αυτή (με $g(x) = x$), μπορεί να δοθεί απευθείας (και χωρίς να προαπαιτείται ανάπτυξη του ολοκληρώματος Lebesgue), ως ορισμός της μέσης τιμής μιας απόλυτα συνεχούς τ.μ. X – βλ., π.χ., Χαραλαμπίδης (1990), σελ. 153, Ορισμός 2.1(β) – πλην όμως, με την στοιχειώδη αυτή αντιμετώπιση, δεν είναι καθόλου εύκολο να συναχθεί ο γενικός τύπος $\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$, ο οποίος ισχύει **για κάθε** Borel g, και ο οποίος λέγεται, μερικές φορές, και «τύπος αφηρημένου μαθηματικού». Τονίζεται ότι, **σε όλο** το παρόν κείμενο, το $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx$ είναι, απλά, ένας άλλος συμβολισμός για το $\int_{\mathbb{R}} h d\lambda$.

ώστε $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, τότε η F είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., και $F' = f$ σ.π., λόγω της Ιδιότητας (1). Συνεπώς, η $f = F'$ είναι η σ.π. μοναδική πυκνότητα μιας απόλυτα συνεχούς σ.κ. F. Φυσικά, το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}_F$, με τύπο

$$\mathbb{P}_F(B) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_B f d\lambda, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

είναι το μοναδικό μέτρο (στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$), που ικανοποιεί την ταυτότητα $\mathbb{P}_F((-\infty, x]) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (γιατί;) Το $\mathbb{P}_F$ είναι ένα απόλυτα συνεχές μέτρο πιθανότητας, ως προς λ (επειδή $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_F(B) = \int_B f d\lambda = 0$), και μάλιστα, η f ισούται (σ.π.) με την παράγωγο F' της αντίστοιχης σ.κ. του $\mathbb{P}_F$, και, τελικά, ισχύει η σχέση $f = F' = \frac{d\mathbb{P}_F}{d\lambda}$, σ.π., σύμφωνα με τον συμβολισμό της Πρότασης 5.6(iv), οπότε η f είναι και «παράγωγος» (Radon-Nikodym) του απόλυτα συνεχούς μέτρου $\mathbb{P}_F$.

Τέλος, από το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. Κεφ. ;;, Θεώρημα ;;, ή Κουμουλλής και Νεγρεπόντης, 1988, Θεώρημα 10.15), προκύπτει το εξής: Αν το $\mathbb{P}$ είναι **οποιοδήποτε**, απόλυτα συνεχές (ως προς λ), μέτρο πιθανότητας, ορισμένο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ή, γενικότερα, στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ (δηλ., το $\mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ή την $\mathcal{M}_{\lambda^*}$, για το οποίο η σχέση $\lambda(B) = 0$ συνεπάγεται την $\mathbb{P}(B) = 0$), τότε υπάρχει μία, μοναδική σ.π., πυκνότητα f του $\mathbb{P}$, ως προς λ. Συνεπώς, υπάρχει μία (Lebesgue μετρήσιμη και) ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \geq 0$, για την οποία ισχύει ότι

$$\int_B f d\lambda = \mathbb{P}(B), \quad \textit{για κάθε } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Προφανώς, θέτοντας

$$F(x) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \left(= \int_{(-\infty,x]} f d\lambda \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

έχουμε ότι η F είναι απόλυτα συνεχής σ.κ., με πυκνότητα $f = F'$ σ.π., και $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$.

Επομένως, τα απόλυτα συνεχή μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, στην ουσία **ταυτίζονται** με τις απόλυτα συνεχείς σ.κ. (υπάρχει μία «ένα προς ένα» και «επί» αντιστοιχία), που, με την σειρά τους, αντιστοιχούν αμφιμονοσήμαντα στις μετρήσιμες συναρτήσεις $f \geq 0$, με $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (τις πυκνότητες), με την προϋπόθεση ότι ταυτοποιούμε δύο ίσες σ.π. πυκνότητες. Σχηματικά:

$$f \longleftrightarrow F \longleftrightarrow \mathbb{P}_F.$$

Η πυκνότητα f ενός απόλυτα συνεχούς μέτρου $\mathbb{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ή, γενικότερα, στον $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{\lambda^*})$, η οποία δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αλλά μόνο σ.π., μπορεί **πάντα** να θεωρηθεί ως Borel συνάρτηση, λόγω της Ιδιότητας (4).

Ιδιότητα (7) (συνάρτηση πιθανότητας για διακριτή συνάρτηση κατανομής/διακριτή τυχαία μεταβλητή) Μία τ.μ. X, καθώς και η αντίστοιχη σ.κ. F, καλείται διακριτή, όταν και μόνο όταν το σύνολο ασυνεχειών, έστω S, της F, είναι αριθμήσιμο, δηλ. της μορφής $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$, ή της μορφής $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ $(k \in \{1, 2, \ldots\})$, και τα ύψη των αλμάτων (πηδημάτων),

$$b_j \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-}) > 0, \quad x_j \in S,$$

ικανοποιούν την

$$\sum_{j : x_j \in S} b_j = 1.$$

Ισοδύναμα, $\mathbb{P}(X \in S) = \sum_j b_j = 1$, Ορισμός ;;(i).

Η συνάρτηση $f_X : S \longrightarrow (0,1]$, με τύπο

$$f_X(x_j) \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{P}(X = x_j) = b_j, \quad x_j \in S,$$

καλείται **συνάρτηση πιθανότητας**[21] της διακριτής τ.μ. X, ή της διακριτής σ.κ. F, και, προφανώς, καθορίζει αμφιμονοσήμαντα την F, και ικανοποιεί την χαρακτηριστική ιδιότητα $\sum_{x_j \in S} f_X(x_j) = 1$. Το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_F$, στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, δίδεται από την

$$\mathbb{P}_F(B) = \sum_{j:\ x_j \in S \cap B} b_j = \mathbb{P}(X \in S \cap B) = \mathbb{P}(X \in B),\ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή $\mathbb{P}(X \in S) = 1$.

Το ολοκλήρωμα $\int g d\mathbb{P}_F$, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.16, παριστάνει την $\mathbb{E}[g(X)]$. Επομένως, είναι φανερό ότι η μέση τιμή της $g(X)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο[22]

$$\int g d\mathbb{P}_F = \sum_{j:\ x_j \in S} g(x_j) b_j = \sum_{x_j} g(x_j) \mathbb{P}(X = x_j),\ \ (= \mathbb{E}[g(X)]) \tag{5.8}$$

με την προϋπόθεση ότι η «σειρά» συγκλίνει απολύτως. [Εφόσον, φυσικά, είναι πράγματι σειρά, αφού, όταν το S είναι πεπερασμένο, τότε ανάγεται σε πεπερασμένο άθροισμα.] Πράγματι, η (5.8) ισχύει όταν η g είναι τυχούσα δείκτρια, $g(x) = I_B(x)$,

---

[21] probability function (p.f.) – probability mass function (p.m.f.)

[22] Η σχέση $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_j \in S} g(x_j) \mathbb{P}(X = x_j)$ είναι, στην ουσία, ο διακριτός «τύπος αφηρημένου μαθηματικού». Πολλές φορές, η ειδική περίπτωση $g(x) = x$, δίδεται ως ορισμός της μέσης τιμής μιας διακριτής τ.μ. X – βλ., π.χ., Χαραλαμπίδης (1990), σελ. 152, Ορισμός 2.1(α).

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, αφού

$$\int g d\mathbb{P}_F = \int_B d\mathbb{P}_F = \mathbb{P}_F(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in S \cap B),$$

διότι $\mathbb{P}(X \in S) = 1$, και φυσικά,

$$\sum_{x_j} g(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{j: x_j \in S \cap B} \mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X \in S \cap B).$$

Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος και της σειράς, η (5.8) ισχύει για απλές $g \geq 0$, και τελικά, **για κάθε** μετρήσιμη $g \geq 0$, διότι τότε υπάρχει ακολουθία g_n, απλών μετρησίμων συναρτήσεων, με $0 \leq g_n \nearrow g$, και, κατά συνέπεια,

$$\int g d\mathbb{P}_F = \lim_n \int g_n d\mathbb{P}_F = \lim_n \sum_{x_j} g_n(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{x_j} g(x_j)\mathbb{P}(X = x_j),$$

επειδή, καθώς $n \to \infty$, $g_n(x_j)\mathbb{P}(X = x_j) \nearrow g(x_j)\mathbb{P}(X = x_j)$ για κάθε j, βλ. Εφαρμογή 5.11. Ομοίως δουλεύουμε για τυχούσα μετρήσιμη g, αφού $g = g^+ - g^-$, οπότε

$$\int g^+ d\mathbb{P}_F = \sum_{x_j} g^+(x_j)\,\mathbb{P}(X = x_j), \quad \int g^- d\mathbb{P}_F = \sum_{x_j} g^-(x_j)\,\mathbb{P}(X = x_j), \text{ κ.ο.κ.}$$

5.6 Μέση Τιμή (Μαθηματική Ελπίδα)

Ας υποθέσουμε ότι ένα τυχερό παιχνίδι πραγματοποιείται στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και ο παίκτης έχει κέρδος $X(\omega)$ όταν το εξαγόμενο του τυχαίου πειράματος είναι το ω (ως συνήθως, αρνητικό κέρδος σημαίνει ζημιά). Φυσικά, μία ενδιαφέρουσα θεωρία μπορεί να αναπτυχθεί μόνο όταν η X είναι τ.μ., έτσι ώστε ερωτήματα του τύπου

« Ποια είναι η πιθανότητα να αποκομίσει ο παίκτης κάποιο κέρδος που κυμαίνεται μεταξύ των ποσών a και b; »

δηλ. ερωτήματα σχετικά με την $\mathbb{P}(X \in [a, b])$, να έχουν νόημα. Ας υποθέσουμε επιπροσθέτως (και για απλότητα) ότι το τυχερό παιχνίδι είναι αρκετά στοιχειώδες, έτσι ώστε να υπάρχουν k ξένα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_k$, με $A_1 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$, για τα οποία το κέρδος του παίκτη είναι c_j αν εμφανιστεί το A_j. Με άλλα λόγια, υποθέσαμε ότι η τ.μ. που παριστάνει το κέρδος του παίκτη είναι απλή, με κανονική μορφή

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

όπως ακριβώς συμβαίνει στην πράξη για τα περισσότερα τυχερά παιχνίδια.

Είναι προφανές ότι έναν παίκτη τον ενδιαφέρει – εκτός από την πιθανότητα όπως κερδίσει ποσό c_j, $\mathbb{P}(A_j)$ – να προσδιορίσει **το μέσο κέρδος ανά παιχνίδι.** Μα πώς συνδέεται το μέσο κέρδος με την πιθανότητα στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; Μία διαισθητική/εμπειρική αντιμετώπιση τύπου von Mises (βλ. Κεφάλαιο ;;) οδηγεί στην εξής σκέψη: Αν επαναληφθεί το παιχνίδι πολλές φορές, έστω n (με $n \to \infty$), τότε το πραγματικό κέρδος ανά παιχνίδι θα είναι

$$K_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} c_i k_n(A_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{k_n(A_i)}{n},$$

όπου $k_n(A_i)$ είναι το πλήθος των φορών που εμφανίστηκε το A_i (και άρα, το πλήθος των φορών που ο παίκτης κέρδισε ποσό c_i) στις n δοκιμές. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάθε i, το $k_n(A_i)/n$ συγκλίνει – με κάποιον τρόπο – προς το $\mathbb{P}(A_i)$, καθώς $n \to \infty$. [Αν και αυτό είναι διαισθητικά προφανές, η αυστηρή τεκμηρίωση θα γίνει στο Κεφ. ;;.] Τότε, το K_n θα συγκλίνει προς τον αριθμό

$$K = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{P}(A_i),$$

οπότε γίνεται φανερό ότι αυτός ακριβώς ο αριθμός K θα πρέπει να θεωρηθεί ως «το μέσο κέρδος ανά παιχνίδι». Παρατηρούμε ότι ο αριθμός K είναι αυτό που δόθηκε ως ορισμός για το ολοκλήρωμα της X ως προς το μέτρο $\mu = \mathbb{P}$, και μάλιστα, όταν όλα τα c_i είναι ≥ 0, τότε το K δίδεται ακριβώς από τον τύπο (5.2) του Ορισμού 5.1(i), αλλιώς προκύπτει από τον Ορισμό 5.1(iii).

Συνεπώς, η λογική τιμή για το μέσο κέρδος K ανά παιχνίδι είναι

$$K = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int X d\mathbb{P}.$$

Γενικεύοντας αυτές τις ιδέες, ώστε να ισχύουν και για μη απλές τ.μ. X, που, άλλωστε, αποτελούν όρια απλών, και συνήθως, και τα ολοκληρώματά τους αποτελούν όρια των αντιστοίχων ολοκληρωμάτων των απλών που συγκλίνουν προς αυτές (Θεωρήματα Μονότονης και Κυριαρχημένης Σύγκλισης), οδηγούμαστε φυσιολογικά στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.17 (μέση τιμή) Για μία τ.μ. X στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ορίζουμε ως **μέση τιμή** (ή μαθηματική ελπίδα ή αναμενόμενη τιμή (expectation, mean value)) τον (εκτεταμένο) αριθμό[23]

$$\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int X d\mathbb{P},$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int X d\mathbb{P}$ ορίζεται. Λέμε ότι η $\mathbb{E}(X)$ **υπάρχει**, ή ότι η X **έχει μέση τιμή**, όταν η X είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\mathbb{E}|X| < \infty$), ενώ λέμε ότι η $\mathbb{E}(X)$ **ορίζεται** (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι υπάρχει) όταν $\min\{\mathbb{E}(X^+), \mathbb{E}(X^-)\} < +\infty$, οπότε $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-) \in [-\infty, +\infty]$.

Ο ορισμός της μέσης τιμής ως ολοκλήρωμα εξηγεί τον λόγο για τον οποίον αναγκαστήκαμε να κάνουμε εκτενή αναφορά στην Θεωρία Ολοκλήρωσης, στις προηγούμενες παραγράφους. Το κέρδος είναι ότι οι ιδιότητες της μέσης τιμής προκύπτουν άμεσα από τα προηγούμενα, ακριβώς επειδή η $\mathbb{E}(X)$ είναι ολοκλήρωμα. Επιπροσθέτως, προκύπτουν και νέες ιδιότητες επειδή το $\mathbb{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας (δηλ. πεπερασμένο μέτρο). Συνοψίζοντας, οι βασικές ιδιότητες της μέσης τιμής είναι οι εξής:

[23] μερικές φορές η $\mathbb{E}(X)$ συμβολίζεται και ως $\mu(X)$, ή μ_X, ή και απλά μ, αλλά θα αποφύγουμε (προς το παρόν) αυτόν τον συμβολισμό, διότι παραπέμπει σε μέτρο.

(M1) Εάν $X = \alpha$ (με πιθ. 1)[24] τότε $\mathbb{E}(X) = \alpha$ (α σταθερά).

(M2) **(Μονοτονία)** Εάν $X \le Y$ (με πιθ. 1), και οι X και Y έχουν μέση τιμή, τότε $\mathbb{E}(X) \le \mathbb{E}(Y)$.

(M3) **(Γραμμικότητα)** $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$, εφ' όσον το δεξιό μέλος ορίζεται, δηλ. δεν είναι της μορφής $+\infty + (-\infty)$ ή $(-\infty) + (+\infty)$.

(M4) **(Μονότονη Σύγκλιση)** Εάν $0 \le X_n \nearrow X$ τότε[25] $\mathbb{E}(X_n) \nearrow \mathbb{E}(X)$.

(M5) **(Beppo Levi)** Εάν $X_n \ge 0$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)$.

(M6) **(Fatou)** Εάν $X_n \ge 0$ τότε $\mathbb{E}\left(\liminf X_n\right) \le \liminf \mathbb{E}(X_n)$.

(M7) **(Κυριαρχημένη Σύγκλιση)** Εάν $|X_n| \le |Y|$, $\mathbb{E}|Y| < \infty$, και $X_n \to X$ (κατά σημείο, δηλ. $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$),[26] τότε:

(α) $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ για κάθε n.

(β) $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

---

[24] Η συντομογραφία «με πιθ. 1» σημαίνει, προφανώς, «με πιθανότητα 1». Στα μέτρα πιθανότητας $\mu = \mathbb{P}$, οι έννοιες «$\mathbb{P}$-σχεδόν παντού» και «με πιθανότητα 1» ταυτίζονται. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η ιδιότητα $\mathbb{P}(X \neq \alpha) = 0$ ισοδυναμεί με την $\mathbb{P}(X = \alpha) = 1$.

[25] Ως γνωστόν (βλ. Πόρισμα 5.8 και σχόλια που ακολουθούν), οι υποθέσεις $X_n \ge 0$, $X_n \le X_{n+1}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ και $X_n \to X$, είναι αρκετό να ισχύουν $\sigma.\pi.$, δηλ. με πιθ. 1.

[26] Ως γνωστόν (βλ. Πόρισμα 5.8 και απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης, Θεώρημα 5.10), οι υποθέσεις $|X_n| \le |Y|$ και $X_n \to X$, είναι αρκετό να ισχύουν $\sigma.\pi.$, δηλ. με πιθ. 1.

(γ) $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$.

(M8) Εάν $\mathbb{E}(XI_A) = \mathbb{E}(YI_A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε $X = Y$ με πιθ. 1.

(M9) Έστω X μία τ.μ. στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και $Y = g(X)$ (όπου g μία Borel συνάρτηση). Τότε[27]

$$\mathbb{E}(Y) = \int_\Omega g(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)dF_X(x) = \int_\mathbb{R} ydF_Y(y).$$

[Με την έννοια ότι όταν ορίζεται ένα από τα πέντε τότε ορίζονται όλα και είναι ίσα, ή όταν δεν ορίζεται ένα από τα πέντε τότε δεν ορίζεται κανένα.]

[27] τύπος αφηρημένου μαθηματικού

Απόδειξη της (M9): Η σχέση $\int_\Omega g(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$ προκύπτει από τον ορισμό της $Y(\omega) = g(X(\omega))$, ενώ, φυσικά, $\mathbb{E}(Y) = \int_\Omega Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$, εξ' ορισμού. Η σχέση

$$\int_\Omega g(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)dF_X(x)$$

προκύπτει από το Λήμμα 5.15 (βλ. Πόρισμα 5.16), ενώ η σχέση

$$\int_\Omega Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} ydF_Y(y)$$

προκύπτει και πάλι από το Λήμμα 5.15 (και το Πόρισμα 5.16), για $X = Y$, και g την ταυτοτική συνάρτηση, με $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες που η μέση τιμή του γινομένου τ.μ. κληρονομεί από την ανεξαρτησία τους, είναι η εξής:

Θεώρημα 5.18[28] Εάν οι τ.μ. X, Y, του χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, είναι ανεξάρτητες, και $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|Y| < \infty$, τότε και $\mathbb{E}|XY| < \infty$, και μάλιστα,[29]

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

[28] Με επαγωγή στο n, το συμπέρασμα γενικεύεται άμεσα και για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος από ανεξάρτητες, ολοκληρώσιμες, τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, αφού η ισχύς του για τις τ.μ. $X_1, \ldots, X_{n-1}$, μας εξασφαλίζει ότι $\mathbb{E}|X_1 \cdots X_{n-1}| < \infty$, και $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_{n-1}) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_{n-1})$. Όμως, οι $X = X_1 \cdots X_{n-1}$ και $Y = X_n$ είναι ανεξάρτητες (αφού οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})$ και $\sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες), και, δεδομένου ότι και $\mathbb{E}|X_n| < \infty$, προκύπτει ότι $\mathbb{E}|XY| = \mathbb{E}|X_1 \cdots X_{n-1}X_n| < \infty$, και τελικά, $\mathbb{E}(X_1 \cdots X_{n-1}X_n) = \mathbb{E}(X_1 \cdots X_{n-1})\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n)$.

[29] Θα γίνει φανερό κατά την απόδειξη ότι, για ανεξάρτητες (ακόμα και εκτεταμένες), **μη αρνητικές**, τ.μ. X, Y, η σχέση $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ισχύει **πάντα**, ακόμα και αν κάποια (ή και οι δύο) από τις X, Y δεν είναι ολοκληρώσιμη, φθάνει να θεωρήσουμε ότι $0 \cdot (+\infty) = 0$, και $(+\infty) \cdot 0 = 0$, τόσο για τα γινόμενα $X(\omega)Y(\omega)$, $\omega \in \Omega$, όσο και για το γινόμενο $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε την κλασική τεχνική απόδειξης, βλ. §5.2. Για $X = I_A,\ Y = I_B$, το συμπέρασμα είναι άμεσο, διότι $A \in \sigma(X),\ B \in \sigma(Y)$, και $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (αφού οι $\sigma(X), \sigma(Y)$ είναι, από υπόθεση, ανεξάρτητες), οπότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(I_A I_B) = \mathbb{E}(I_{AB}) = \mathbb{P}(AB) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{E}(I_A)\mathbb{E}(I_B) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

[Χρησιμοποιήθηκε η προφανής σχέση $\mathbb{E}(I_A) = \int_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$.]

Αν οι X, Y είναι απλές, με κανονικές μορφές $\sum_{i=1}^k a_i I_{A_i}$ και $\sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$, αντίστοιχα, και αν $X \geq 0,\ Y \geq 0$, τότε $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \sigma(X)$, και $\{B_1, \ldots, B_m\} \subset \sigma(Y)$, οπότε $\mathbb{P}(A_i B_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)$, για κάθε i, j.

Επομένως, $XY = \sum_{(i,j)} a_i b_j I_{A_i B_j}$, και

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)} a_i b_j \, \mathbb{E}(I_{A_i B_j}) = \sum_{(i,j)} a_i b_j \, \mathbb{P}(A_i B_j)$$

$$= \sum_{(i,j)} a_i b_j \, \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B_j) = \Big(\sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathbb{P}(A_i) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{m} b_j \, \mathbb{P}(B_j) \Big) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y).$$

[Θέμα πεπερασμένου δεν έχει τεθεί ακόμα, αφού οι X, Y, και XY, είναι φραγμένες.]

Έστω $X \geq 0$, $Y \geq 0$, μετρήσιμες και ανεξάρτητες. Θεωρούμε την ακολουθία απλών X_n που κατασκευάσαμε στο Θεώρημα ;;, με $0 \leq X_n \nearrow X$, και έστω η ακολουθία

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{\Gamma_{k,n}}(\omega) + n I_{\Delta_n}(\omega)$$

όπου

$$\Gamma_{k,n} = \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leq Y < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad \Delta_n = \{Y \geq n\}.$$

[Οπότε $\Gamma_{k,n} \in \sigma(Y)$, $\Delta_n \in \sigma(Y)$, και συνεπώς, οι Y_n είναι $\sigma(Y)$–μετρήσιμες.]

Τώρα έχουμε ότι $0 \leq X_n \nearrow X$, $0 \leq Y_n \nearrow Y$, οι X_n είναι $\sigma(X)$–μετρήσιμες (δηλ. $\sigma(X_n) \subset \sigma(X)$), και οι Y_n είναι $\sigma(Y)$–μετρήσιμες. Άρα, οι X_n, Y_n είναι ανεξάρτητες. Προφανώς, $X_n Y_n \nearrow XY$ (όπου $X(\omega)Y(\omega) = 0$, αν $X(\omega) = 0$ και $Y(\omega) = +\infty$, ή αντίστροφα). Επομένως,

$$\mathbb{E}(XY) = \lim_n \mathbb{E}(X_n Y_n) = \lim_n \mathbb{E}(X_n) \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y),$$

όπου το τελευταίο γινόμενο θεωρείται 0, αν είναι της μορφής $0 \cdot (+\infty)$, ή $(+\infty) \cdot 0$. Συνεπώς, όταν $\mathbb{E}(X) < +\infty$ και $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, τότε και $\mathbb{E}(XY) < +\infty$. Είναι σαφές ότι η σχέση $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ ισχύει ακόμα και αν δεν υπάρχει, π.χ., η $\mathbb{E}(X)$.

Στην γενική περίπτωση θέτουμε $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$, και οι X^+, X^- είναι $\sigma(X)$–μετρήσιμες, ενώ οι Y^+, Y^- είναι $\sigma(Y)$–μετρήσιμες. Άρα, τα ζεύγη

$$X^+, Y^+, \quad X^+, Y^-, \quad X^-, Y^+, \quad X^-, Y^-,$$

είναι ζεύγη ανεξαρτήτων, μη αρνητικών, τ.μ. Αν υποθέσουμε ότι οι X και Y έχουν μέση τιμή (δηλ. $\mathbb{E}(X^+) < \infty$, $\mathbb{E}(X^-) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^+) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^-) < \infty$), τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|XY| &= \mathbb{E}[(X^+ + X^-)(Y^+ + Y^-)] \\
&= \mathbb{E}(X^+Y^+) + \mathbb{E}(X^+Y^-) + \mathbb{E}(X^-Y^+) + \mathbb{E}(X^-Y^-) \\
&= \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^+) + \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^-) + \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^+) + \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^-) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

λόγω των προηγουμένων.

Επομένως, η $\mathbb{E}(XY)$ υπάρχει, και μάλιστα,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}[(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-)] \\ &= \mathbb{E}(X^+Y^+) - \mathbb{E}(X^+Y^-) - \mathbb{E}(X^-Y^+) + \mathbb{E}(X^-Y^-) \\ &= \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(X^+)\mathbb{E}(Y^-) - \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^+) + \mathbb{E}(X^-)\mathbb{E}(Y^-) \\ &= \mathbb{E}(X^+)[\mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-)] - \mathbb{E}(X^-)[\mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-)] \\ &= [\mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)]\,[\mathbb{E}(Y^+) - \mathbb{E}(Y^-)] \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \ \square\end{aligned}$$

5.7 Συνήθεις Ανισότητες

Για μία τ.μ. X, σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για την οποία η $\mathbb{E}(X)$ υπάρχει (δηλ. $\mathbb{E}|X| < \infty$), ορίζουμε την **διασπορά** της X (ή διακύμανση (variance)) ως[30]

$$\mathrm{Var}(X) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \int_\Omega [X(\omega) - \mathbb{E}(X)]^2 d\mathbb{P}(\omega),$$

η δε ποσότητα[31] $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ονομάζεται **τυπική απόκλιση**[32] της X.

Η διασπορά της X, που είναι στην ουσία η μέση τετραγωνική απόκλιση της X από την μέση τιμή της, είναι πάντα ένας

---

[30]πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\sigma^2(X)$ ή σ_X^2 ή, απλά, σ^2, αντί του $\mathrm{Var}(X)$, αλλά, προς το παρόν, τον αποφεύγουμε επειδή υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με σ-άλγεβρες.

[31]για την τυπική απόκλιση της X χρησιμοποιείται συνήθως ο συμβολισμός $\sigma(X)$ ή σ_X ή, απλά, σ, αλλά, προς το παρόν, τον αποφεύγουμε επειδή υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με σ-άλγεβρες.

[32]standard deviation

μη αρνητικός, πιθανώς εκτεταμένος, αριθμός, του $[0, +\infty]$. Άμεσα συνδεδεμένη με την διασπορά της X είναι η ποσότητα $\mathbb{E}[X-\alpha]^2$ (όπου $\alpha \in \mathbb{R}$), δηλ. η μέση τετραγωνική απόκλιση της X από την σταθερά α, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:[33]

(i) Αν $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ τότε και $\mathbb{E}|X| < +\infty$ (διότι $|X| \leq 1 + X^2$), και μάλιστα,

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[X-\alpha]^2 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \mathrm{Var}(X).$$

(ii) Αν $\mathbb{E}(X^2) = +\infty$ τότε $\mathbb{E}[X-\alpha]^2 = +\infty$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Αν $\mathbb{E}[X-\alpha]^2 = +\infty$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε και $\mathbb{E}(X^2) = +\infty$.

[33] Οι ιδιότητες (ii) και (iii) προκύπτουν από τις ανισότητες $X^2/2-\alpha^2 \leq [X-\alpha]^2 \leq 2X^2+2\alpha^2$, ενώ η (i) αποδεικνύεται με ελαχιστοποίηση, ως προς α, του τριώνυμου $\mathbb{E}[X-\alpha]^2 = \alpha^2-2\alpha\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X^2)$.

Συνεπώς, μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathrm{Var}(X) = +\infty$, όταν $\mathbb{E}(X^2) = +\infty$ (και αδιάφορο εάν $\mathbb{E}|X| < +\infty$, ή $\mathbb{E}|X| = +\infty$), ενώ η διασπορά είναι πεπερασμένη, και ίση με $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2$, όταν $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ (οπότε και $\mathbb{E}|X| < +\infty$). Όταν $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, εύκολα διαπιστώνεται ότι

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

[Αυτή η σχέση ισχύει και όταν $\mathbb{E}(X^2) = +\infty$, εφ′ όσον $\mathbb{E}|X| < \infty$, αλλιώς γίνεται $\infty - \infty$ ή, ακόμη χειρότερα, $\infty - (\infty - \infty)^2$.]

Η επόμενη ανισότητα, αν και είναι ιδιαιτέρως απλή, είναι πολύ χρήσιμη στην Θεωρία Πιθανοτήτων.

Πρόταση 5.19 (ανισότητα Markov) Για τυχούσα τ.μ. $X \geq 0$, και για κάθε $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X).$$

Απόδειξη: Αφού $X \geq 0$, η $\mathbb{E}(X)$ ορίζεται. Αν $\mathbb{E}(X) = +\infty$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $\mathbb{E}(X) < +\infty$, τότε για κάθε $\alpha > 0$,

$$X = XI(X < \alpha) + XI(X \geq \alpha),$$

όπου[34]

$$I(X \in B) = I_{X^{-1}(B)}, \quad \text{δηλ.} \quad I(X(\omega) \in B) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad X(\omega) \in B, \\ 0, & \text{αν} \quad X(\omega) \notin B, \end{cases} \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Συνεπώς, $X \geq XI(X \geq \alpha) \geq \alpha I(X \geq \alpha)$, και τελικά,

$$\mathbb{E}(X) \geq \alpha \mathbb{E}[I(X \geq \alpha)] = \alpha \mathbb{P}(X \geq \alpha). \ \square$$

Πόρισμα 5.20 (ανισότητα Chebychev) Εάν $\mathbb{E}|X| < \infty$, τότε

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha] \leq \frac{1}{\alpha^2} \mathrm{Var}(X) \quad (\text{για κάθε } \alpha > 0).$$

Απόδειξη: Είναι $\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \alpha^2\}$, και η τ.μ. $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ είναι ≥ 0, οπότε εφαρμόζεται η ανισότητα Markov για την Y, με $\mathbb{E}(Y) = \mathrm{Var}(X)$. $\square$

---

[34] Παρατηρήστε ότι στην Θεωρία Πιθανοτήτων αλλάζουν οι καθιερωμένοι (στα θεωρητικά μαθηματικά) συμβολισμοί. Έτσι, ο συμβολισμός $I(X \in B)$ για την δείκτρια, φαίνεται να επικρατεί του λιγότερο περιγραφικού $I_{X^{-1}(B)}$.

Μία τ.μ. X (και η αντίστοιχη σ.κ. F_X) ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate), όταν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(X = \alpha) = 1$, δηλ. $X = \alpha$ με πιθ. 1, οπότε η αντίστοιχη σ.κ. είναι της μορφής

$$F_X(x) = I(x \geq \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad x < \alpha, \\ 1, & \text{αν} \quad x \geq \alpha. \end{cases}$$

Φυσικά, $\mathbb{E}(X) = \alpha$ και $\mathrm{Var}(X) = 0$, σε αυτήν την περίπτωση. Αλλά και αντίστροφα, εάν $\mathrm{Var}(X) = 0$ τότε η X είναι εκφυλισμένη. Πράγματι, αφού $\mathrm{Var}(X) < \infty$, έπεται ότι $\mathbb{E}|X| < \infty$, και άρα, υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{E}(X) = \alpha$. Τότε, από την ανισότητα Chebychev, προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}\left[|X - \alpha| \geq \frac{1}{n}\right] \leq n^2 \mathrm{Var}(X) = 0, \text{ δηλ. } \mathbb{P}\left[|X - \alpha| < \frac{1}{n}\right] = 1, \text{ για κάθε } n.$$

Όμως, $\{X = \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X-\alpha| < \frac{1}{n}\} = \lim_n\{|X-\alpha| < \frac{1}{n}\}$, που σημαίνει ότι

$$\mathbb{P}(X = \alpha) = \lim_n \mathbb{P}\left[|X - \alpha| < \frac{1}{n}\right] = 1.$$

Άρα, μηδενική διασπορά έχουν **μόνο** οι εκφυλισμένες τυχαίες μεταβλητές.

Πρόταση 5.21 (ανισότητα Cauchy-Schwarz) Για δύο τ.μ. X, Y, του χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ισχύουν τα εξής:

(i) $$(\mathbb{E}|XY|)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2). \quad (0 \cdot (+\infty) =$$

$(+\infty)\cdot 0 = 0)$

Στην ειδική περίπτωση που $0 < \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$, η ισότητα επιτυγχάνεται όταν και μόνο όταν υπάρχει πραγματική σταθερά $\lambda_0 > 0$, τέτοια ώστε $|X| = \lambda_0|Y|$, με πιθανότητα 1.

(ii) Όταν, επιπροσθέτως, η $\mathbb{E}(XY)$ ορίζεται, τότε

$$[\mathbb{E}|XY|]^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2). \quad (0\cdot(+\infty) =$$

$(+\infty)\cdot 0 = 0)$

Στην ειδική περίπτωση που $0 < \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$, η ισότητα επιτυγχάνεται όταν και μόνο όταν υπάρχει σταθερά $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ($\lambda_0 \neq 0$), τέτοια ώστε $X = \lambda_0 Y$, με πιθ. 1.

Απόδειξη: Εάν $\mathbb{E}(X^2) = 0$ τότε $X = 0$ (με πιθ. 1), διότι $\mathbb{P}(X^2 \geq \frac{1}{n}) \leq n\mathbb{E}(X^2) = 0$, από την ανισότητα Markov, και συνεπώς,

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}\left[\lim_n \left\{0 \leq X^2 < \frac{1}{n}\right\}\right] = \lim_n \mathbb{P}\left[X^2 < \frac{1}{n}\right] = 1.$$

Τότε και $|XY| = 0$ με πιθ. 1 (οπότε και $XY = 0$ με πιθ. 1), και συνεπώς, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}|XY| = 0 \leq 0 \cdot \mathbb{E}(Y^2) = 0$ (η ανισότητα αυτή ισχύει ακόμα και αν $\mathbb{E}(Y^2) = +\infty$, επειδή έχουμε θέσει $0\cdot(+\infty) = 0$). Ομοίως, οι ανισότητες γίνονται προφανείς όταν $\mathbb{E}(Y^2) = 0$. Εάν, τώρα, $\mathbb{E}(X^2) > 0$ και $\mathbb{E}(Y^2) = +\infty$, τότε οι ανισότητες γίνονται και πάλι προφανείς, αφού $\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = +\infty$. Το ίδιο συμβαίνει και όταν

$\mathbb{E}(X^2) = +\infty$ και $\mathbb{E}(Y^2) > 0$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$, και $0 < \mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Προκύπτει τότε, επειδή $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$, ότι και $\mathbb{E}|XY| < +\infty$, και συνεπώς, η $\mathbb{E}(XY)$ υπάρχει. Επίσης, για τυχόν $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ανισότητες

$$(X - \lambda Y)^2 \leq (1 + \lambda^2)(X^2 + Y^2) \quad \text{και} \quad (|X| - \lambda|Y|)^2 \leq (1 + \lambda^2)(X^2 + Y^2).$$

Άρα, $\mathbb{E}(X - \lambda Y)^2 < \infty$, και $\mathbb{E}(|X| - \lambda|Y|)^2 < \infty$. Επομένως, αφού $\mathbb{E}(|X| - \lambda|Y|)^2 \geq 0$, και $\mathbb{E}(|X| - \lambda|Y|)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2\lambda|XY| + \lambda^2 Y^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\lambda\mathbb{E}|XY| + \lambda^2\mathbb{E}(Y^2)$ (όλα πεπερασμένα), έπεται ότι (το τριώνυμο ως προς λ)

$$\lambda^2\mathbb{E}(Y^2) - 2\lambda\mathbb{E}|XY| + \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(|X| - \lambda|Y|)^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλ.

$$\Delta = 4(\mathbb{E}|XY|)^2 - 4\mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(X^2) \leq 0,$$

που σημαίνει ότι $(\mathbb{E}|XY|)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση (που $0 < \mathbb{E}(X^2) < \infty$ και $0 < \mathbb{E}(Y^2) < \infty$), ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε ισότητα στην ανισότητα $(\mathbb{E}|XY|)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$, είναι να υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{E}(|X| - \lambda_0|Y|)^2 = 0$ (αφού η ισότητα ισοδυναμεί με $\Delta = 0$), που σημαίνει ότι $|X| = \lambda_0|Y|$, με πιθ. 1. [Φυσικά, πρέπει $\lambda_0 > 0$.]

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει άμεσα επειδή

$$|\mathbb{E}(XY)| \le \mathbb{E}|XY|.$$

Στην μη τετριμμένη περίπτωση κατά την οποία $0 < \mathbb{E}(X^2) < \infty$ και $0 < \mathbb{E}(Y^2) < \infty$, η ισότητα

$$[\mathbb{E}(XY)]^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

επιτυγχάνεται όταν και μόνο όταν υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ (και μάλιστα, $\lambda_0 \neq 0$), τέτοιο ώστε $\mathbb{E}(X - \lambda_0 Y)^2 = 0$, ή, ισοδύναμα, $X = \lambda_0 Y$, με πιθ. 1. [Δηλ. $\mathbb{P}(X \neq \lambda_0 Y) = 0$.] $\square$

Εφαρμογή 5.22 (συνδιακύμανση (συνδιασπορά) – συντελεστής συσχέτισης) Ας θεωρήσουμε δύο τ.μ. X, Y, με $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ (οπότε οι $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$ είναι πεπερασμένες). Η ποσότητα[35]

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

είναι καλά ορισμένη, διότι $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|Y| < \infty$, και, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}|(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} < \infty.$$

Η $\mathrm{Cov}(X, Y)$ είναι ένα μέτρο της **γραμμικής εξάρτησης** των X, Y, και ονομάζεται **συνδιακύμανση** ή **συνδιασπορά** (covariance) των X και Y. Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

και, από τον ορισμό της διασποράς, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Cov}(-X, -X)$. Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{Var}(X) = 0$ (δηλ. η X είναι εκφυλισμένη), τότε, προφανώς, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, διότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $X = c$ με πιθ. 1, οπότε $XY = cY$ με πιθ. 1, και άρα, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(cY) - c\mathbb{E}(Y) = 0$. Το ίδιο ισχύει όταν $\mathrm{Var}(Y) = 0$.

Στην μη τετριμμένη περίπτωση κατά την οποία $0 < \mathrm{Var}(X) <$

[35] πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\sigma(X, Y)$, ή $\sigma_{X,Y}$, αντί του $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

∞ και $0 < \mathrm{Var}(Y) < \infty$, ορίζεται η ποσότητα[36]

$$\mathrm{Corr}(X,Y) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}},$$

η οποία είναι απαλλαγμένη από μονάδες μέτρησης (στην ουσία είναι η τυποποιημένη συνδιακύμανση), και ονομάζεται **συντελεστής συσχέτισης** (correlation coefficient) των X και Y. Εύκολα προκύπτει, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, ότι

$$-1 \le \mathrm{Corr}(X,Y) \le 1,$$

διότι $[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 \le \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)$.

Όταν, επιπροσθέτως, οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε (βλ. Θεώρημα 5.18)

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y), \quad (\text{όλα πεπερασμένα})$$

οπότε $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ και, κατά συνέπεια, ισχύει ότι $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$, με την προϋπόθεση ότι καμία από τις X, Y δεν είναι εκφυλισμένη. Άρα, οι ανεξάρτητες τ.μ. είναι και **ασυσχέτιστες**, δηλ. έχουν συντελεστή συσχέτισης 0. Φυσικά, το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. υπάρχουν εξαρτημένες τ.μ. X, Y, με $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$, $0 < \mathrm{Var}(Y) < \infty$, τέτοιες ώστε $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y) = 0$. [Ως απλό παράδειγμα, θεωρήστε τις $X = X_1 - X_2$, $Y = X_1 + X_2$, με X_1, X_2 ανεξάρτητες δοκιμές

[36] πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\rho(X,Y)$ ή $\rho_{X,Y}$ ή, απλά, ρ, αντί του $\mathrm{Corr}(X,Y)$.

Bernoulli(1/2), δηλ. $\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = 1/4$, για κάθε $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$.]

Αφού ισχύει ότι $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$, έπεται ότι $\mathrm{Corr}(X, X) = 1$ (εφ΄ όσον $0 < \mathrm{Var}(X) < \infty$). Γενικότερα, όταν $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$, προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, η οποία γίνεται ισότητα, ότι

$$X - \mathbb{E}(X) = \lambda_0(Y - \mathbb{E}(Y)) \ \ (\text{για κάποιο } \lambda_0 > 0), \ \ \text{με πιθ. } 1.$$

Άρα, η X είναι **γραμμικά εξαρτημένη** από την Y (με πιθ. 1), και μάλιστα, $X = \lambda_0 Y + b$, με $\lambda_0 > 0$, οπότε, με πιθ. 1, το ζεύγος (X, Y) βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία με θετική κλίση. Ομοίως, όταν $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$, τότε υπάρχει $\lambda_0 < 0$, τέτοιο ώστε $X = \lambda_0 Y + b$ (με πιθ. 1). Επομένως, οι ακραίες τιμές ± 1 του συντελεστή συσχέτισης χαρακτηρίζουν τις γραμμικά εξαρτημένες τ.μ. X, Y, με πεπερασμένη, μη μηδενική, διασπορά.

Από τον ορισμό της διασποράς προκύπτει ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X).$$

[Έχουμε υποθέσει ότι $\mathrm{Var}(X) < \infty$.] Επίσης, αν $c, d \in \mathbb{R}$, τότε, λαμβάνοντας υπόψιν και την υπόθεση $\mathrm{Var}(Y) < \infty$, έχουμε

$$\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y),$$

και τελικά, όταν $ac \neq 0$, και $\min\{\operatorname{Var}(X), \operatorname{Var}(Y)\} > 0$, προκύπτει ότι

$$\operatorname{Corr}(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \operatorname{Corr}(X,Y), & \text{αν } \; ac > 0, \\ -\operatorname{Corr}(X,Y), & \text{αν } \; ac < 0. \end{cases}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y),$$

οπότε

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y),$$

όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες ή, γενικότερα, ασυσχέτιστες.

Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται ως εξής: Για κάθε $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, και οποιεσδήποτε τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, με $\mathrm{Var}(X_j) < \infty$ για $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j X_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \mathrm{Var}(X_j) + 2 \sum\sum_{1 \le j < k \le n} c_j c_k \mathrm{Cov}(X_j, X_k),$$

ή, σε μορφή πινάκων,

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{c}'\mathbb{D}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{c},$$

όπου $\boldsymbol{c}' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ (εδώ ο τόνος δηλώνει ανάστροφο), και $\mathbb{D}(\boldsymbol{X})$ είναι ο **πίνακας διασπορών–συνδιασπορών** (dispersion matrix) του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X}$, δηλ.

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} (\sigma_{jk}), \quad \text{όπου } \sigma_{jk} = \mathrm{Cov}(X_j, X_k), \ \ 1 \le j \le n, \ \ 1 \le k \le n.$$

[Ειδικότερα, $\sigma_{jj} = \sigma_j^2 = \mathrm{Var}(X_j)$.] Επειδή για τυχόν $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}) \ge 0$, δηλ. $\boldsymbol{c}'\mathbb{D}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{c} \ge 0$ για κάθε $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, προκύπτει ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$, ο πίνακας $\mathbb{D}(\boldsymbol{X})$ είναι θετικά ημιορισμένος (positive semi-definite).[37]

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι **κάθε πίνακας διασπορών–συνδιασπορών είναι θετικά ημιορισμένος**:

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) \ge 0.$$

[37] Υπενθυμίζεται ότι ένας πίνακας $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ καλείται **θετικά ημιορισμένος**, όταν είναι συμμετρικός ($\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$), και για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, ισχύει ότι $x'\boldsymbol{A}x \ge 0$. Γράφουμε τότε $\boldsymbol{A} \ge 0$. Αν, επιπλέον, $x'\boldsymbol{A}x > 0$ για κάθε $x \ne \boldsymbol{0}$ (προφανώς για $x = \boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)'$, $x'\boldsymbol{A}x = 0$ για κάθε πίνακα $\boldsymbol{A}$), τότε λέμε ότι ο $\boldsymbol{A}$ είναι **θετικά ορισμένος** (positive definite), και αυτό δηλώνεται με $\boldsymbol{A} > 0$.

Αν, τώρα, υπάρχει $\boldsymbol{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c}_0 \neq \mathbf{0}$, τέτοιο ώστε $\boldsymbol{c}_0' \mathbb{D}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{c}_0 = 0$, τότε $\mathrm{Var}(\boldsymbol{c}_0'\boldsymbol{X}) = 0$, που σημαίνει ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$\boldsymbol{c}_0'\boldsymbol{X} = c_{01}X_1 + \ldots + c_{0n}X_n = \alpha, \quad \mu\epsilon\ \pi\iota\vartheta.\ 1,$$

και συνεπώς, το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$ περιορίζεται στο $(n-1)$-διάστατο υπερεπίπεδο $\boldsymbol{c}_0'\boldsymbol{x} = \alpha$ (του χώρου $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), με μέτρο Lebesgue ($n$-διάστατο όγκο) 0. Επομένως, η *σ.κ.* του $\boldsymbol{X}$ είναι ιδιάζουσα. Τελικά, για τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ με πεπερασμένες διασπορές, προκύπτει ότι αν η από κοινού *σ.κ.* $F_{\boldsymbol{X}}$ δεν είναι ιδιάζουσα, τότε $\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) > 0$, χωρίς φυσικά να ισχύει και το αντίστροφο.

Τέλος, από τον ορισμό της συνδιακύμανσης και την γραμμικότητα της μέσης τιμής, διαπιστώνεται άμεσα ότι για οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ \text{και}\ \ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m,$$

και για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \text{ και } b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

ισχύει η ταυτότητα

$$\mathrm{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i,\ \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \,\mathrm{Cov}(X_i, Y_j),$$

με την προϋπόθεση, φυσικά, ότι $\mathbb{E}(X_i^2) < \infty$ και $\mathbb{E}(Y_j^2) < \infty$, για κάθε i, j. □

Άλλες γνωστές ανισότητες δίδονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.23 (i) **(ανισότητα Hölder)** Έστω $1 < p < +\infty$ και $1 < q < +\infty$, με $1/p + 1/q = 1$ (οι p, q λέγονται **συζυγείς εκθέτες**). Εάν $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$ και $\mathbb{E}|Y|^q < +\infty$, τότε και $\mathbb{E}|XY| < +\infty$, και μάλιστα,

$$\mathbb{E}(XY) \leq |\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}.$$

(ii) **(ανισότητα Minkowski)** Υποθέτουμε ότι $1 < p < +\infty$, $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$, και $\mathbb{E}|Y|^p < +\infty$. Τότε και $\mathbb{E}|X + Y|^p < +\infty$, και μάλιστα,

$$(\mathbb{E}|X + Y|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} + (\mathbb{E}|Y|^p)^{1/p}.$$

(iii) **(ανισότητα Jensen)** Εάν η $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $I = (a, b)$, με $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, και εάν $\mathbb{P}(X \in I) = 1$, και $\mathbb{E}|X| < +\infty$, τότε

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}(X)).$$

[Η ανισότητα αλλάζει φορά όταν η g είναι κοίλη.] Η ίδια ανισότητα ισχύει και για διάστημα I της μορφής $I = [a, b)$, με $-\infty < a < b \leq +\infty$, ή $I = (a, b]$, με $-\infty \leq a < b < +\infty$, ή $I = [a, b]$, με $-\infty < a \leq b < +\infty$, με την προϋπόθεση, φυσικά, ότι η g είναι κυρτή στο I, $\mathbb{P}(X \in I) = 1$, και $\mathbb{E}|X| < +\infty$. Στις περιπτώσεις αυτές επιτρέπονται ακόμα και οι τιμές $g(a) = +\infty$ (για $I = [a, b))$, $g(b) = +\infty$ (για $I = (a, b]$), και $g(a) = +\infty$, $g(b) \in \mathbb{R}$, ή $g(a) \in \mathbb{R}$, $g(b) = +\infty$, ή $g(a) = g(b) = +\infty$ (για $I = [a, b]$), αντίστοιχα. [Ομοίως, για κοίλη g επιτρέπεται και η τιμή $-\infty$ στο ένα, ή και στα δύο, πεπερασμένα άκρα του διαστήματος.]

(iv) **(ανισότητα Lyapounov)** Για $0 < p < q$,

$$\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}|X|^q\right)^{1/q}.$$

[Άρα, $\mathbb{E}|X| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2} \leq \sqrt[3]{\mathbb{E}|X|^3} \leq \cdots \leq \sqrt[n]{\mathbb{E}|X|^n} \leq \cdots$.]

Απόδειξη: (i) Εάν $\mathbb{E}|X|^p = 0$ τότε $X = 0$ με πιθ. 1, οπότε $|XY| = XY = 0$ με πιθ. 1, και η ανισότητα καθίσταται προφανής $(0 = 0)$. Ομοίως αν $\mathbb{E}|Y|^q = 0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \mathbb{E}|X|^p < \infty,\ 0 < \mathbb{E}|Y|^q < \infty$. Θέτουμε

$$\widetilde{X} = \frac{X}{(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}}\ , \quad \widetilde{Y} = \frac{Y}{(\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}},$$

οπότε $\mathbb{E}|\widetilde{X}|^p = \mathbb{E}|\widetilde{Y}|^q = 1$. Όμως εύκολα διαπιστώνεται ότι για τυχόντα $x > 0$, $y > 0$, και για $a > 0$, $b > 0$, με $a + b = 1$,

$$x^a y^b \le ax + by,$$

διότι η συνάρτηση $\log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, και επομένως,

$$\log(ax + by) \ge a \log x + b \log y = \log(x^a y^b).$$

[Φυσικά, η ανισότητα $x^a y^b \le ax + by$ ισχύει και όταν κάποιο (ή και τα δύο) από τα x, y είναι 0.] Επομένως, θέτοντας

$$x = |\widetilde{X}|^p, \quad y = |\widetilde{Y}|^q, \quad a = 1/p, \quad b = 1/q,$$

έχουμε

$$x^a y^b = \left(|\widetilde{X}|^p\right)^{1/p} \left(|\widetilde{Y}|^q\right)^{1/q} = |\widetilde{X}\widetilde{Y}| \le \frac{1}{p}|\widetilde{X}|^p + \frac{1}{q}|\widetilde{Y}|^q,$$

οπότε

$$\mathbb{E}|\widetilde{X}\widetilde{Y}| \le \frac{1}{p}\mathbb{E}|\widetilde{X}|^p + \frac{1}{q}\mathbb{E}|\widetilde{Y}|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Όμως, $|\widetilde{X}\widetilde{Y}| = |XY| \Big/ \left\{ (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q} \right\}$, που σημαίνει ότι

$$\frac{\mathbb{E}|XY|}{(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}} \leq 1, \quad \text{δηλ.} \quad \mathbb{E}|XY| \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}.$$

Φυσικά, αυτό δείχνει ότι $\mathbb{E}|XY| < \infty$, και μάλιστα, αφού προφανώς

$$\mathbb{E}(XY) \leq |\mathbb{E}(XY)| \leq \mathbb{E}|XY|,$$

παίρνουμε όλες τις ανισότητες που θέλαμε. [Παρατηρήστε ότι για $p = q = 2$ προκύπτει η ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

(ii) Πρώτα δείχνουμε ότι για $a > 0,\ b > 0$, και $p \geq 1$,

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Αυτό προκύπτει εύκολα, επειδή η συνάρτηση $f(x) = (a+x)^p - 2^{p-1}(a^p + x^p)$ $(x \geq 0)$ είναι αύξουσα για $x < a$, και φθίνουσα για $x > a$, οπότε $f(x) \leq f(a) = 0$, δηλαδή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$, και συνεπώς, $f(b) \leq 0$. Φυσικά, η ανισότητα ισχύει και για $a = 0$, ή $b = 0$, ή $a = b = 0$. Επομένως, θέτοντας $a = X$, $b = Y$, έχουμε

$$|X+Y|^p \leq (|X| + |Y|)^p \leq 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p),$$

που σημαίνει ότι $\mathbb{E}|X+Y|^p < \infty$ (αφού $\mathbb{E}|X|^p + \mathbb{E}|Y|^p < \infty$).

Για $p = 1$, η ανισότητα Minkowski καθίσταται προφανής, αφού $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ (και άρα, $\mathbb{E}|X+Y| \leq \mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|Y|$). Επίσης, η ανισότητα προφανώς αληθεύει όταν $\mathbb{E}|X+Y|^p = 0$ (που σημαίνει ότι $X+Y=0$ με πιθ. 1).

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $p > 1$ και $\mathbb{E}|X+Y|^p > 0$, και θέτουμε $q = \frac{p}{p-1}$ (οπότε $1/p + 1/q = 1$). Προφανώς,

$$|X+Y|^p = |X+Y||X+Y|^{p-1} \leq |X||X+Y|^{p-1} + |Y||X+Y|^{p-1}.$$

Όμως,

$$\mathbb{E}\left[\left(|X+Y|^{p-1}\right)^q\right] = \mathbb{E}|X+Y|^p < +\infty,$$

λόγω των προηγουμένων, οπότε, από την ανισότητα Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|X||X+Y|^{p-1}\right) &\leq \left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}\left[(|X+Y|^{p-1})^q\right]\right)^{1/q} \\ &= \left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο,

$$\mathbb{E}\left(|Y||X+Y|^{p-1}\right) \leq \left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X+Y|^p &\leq \mathbb{E}\left(|X||X+Y|^{p-1}\right) + \mathbb{E}\left(|Y||X+Y|^{p-1}\right) \\ &\leq \left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q} + \left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^{1/p} \left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q} \\ &= \left[\left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} + \left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^{1/p}\right] \left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1/q} > 0$, προκύπτει η

$$\left(\mathbb{E}|X+Y|^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\mathbb{E}|X|^p\right)^{1/p} + \left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^{1/p},$$

που είναι η ανισότητα Minkowski, αφού $1 - 1/q = 1/p$.

(iii) Έστω ότι η g είναι κυρτή στο (a, b). Αυτό, εξ' ορισμού, σημαίνει ότι για κάθε $x < y$ (με $a < x < y < b$), και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Ισοδύναμα (βλ. Άσκηση 5.1), για κάθε $x_0 \in (a, b)$, υπάρχει (πεπερασμένος) αριθμός $\lambda(x_0)$, τέτοιος ώστε

$$g(x) \geq g(x_0)+\lambda(x_0)(x-x_0), \text{ για κάθε } x \in (a, b). \qquad (\star)$$

Αφού $a < X < b$ με πιθ. 1, έπεται ότι $a < \mathbb{E}(X) < b$ (διότι η $\mathbb{E}(X)$ υπάρχει), και θέτοντας $x = \widetilde{X}(\omega)$, και $x_0 = \mathbb{E}(X)$, έχουμε

$$g(\widetilde{X}) \geq g(\mathbb{E}(X)) + \lambda(\mathbb{E}(X))(\widetilde{X} - \mathbb{E}(X)),$$

όπου, π.χ.,

$$\widetilde{X} = XI(a < X < b) + \mathbb{E}(X)[I(X \leq a) + I(X \geq b)],$$

έτσι ώστε να ισχύει $\mathbb{P}[\widetilde{X} = X] = 1$, και $a < \widetilde{X}(\omega) < b$, για κάθε $\omega \in \Omega$. Τώρα, προφανώς, $X = \widetilde{X}$ με πιθ. 1, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\widetilde{X})$, $g(X) = g(\widetilde{X})$ με πιθ. 1, και $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(\widetilde{X})]$, οπότε, λαμβάνοντας μέσες τιμές στην προηγούμενη ανισότητα, προκύπτει η αποδεικτέα, $\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}(X))$, διότι ο $\lambda(\mathbb{E}(X))$ είναι (πεπερασμένος) πραγματικός αριθμός.

Η ανισότητα για τις άλλες μορφές διαστημάτων προκύπτει με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα, όταν $I = [a, b)$ με a πεπερασμένο, τότε και $\mathbb{E}(X) \in I$. Στην τετριμμένη περίπτωση κατά την οποία $\mathbb{E}(X) = a$, έπεται ότι $\mathbb{P}(X = a) = 1$, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\mathbb{P}(X \geq a) = 1$, και έτσι, $\mathbb{P}[g(X) = g(a)] = 1$, και $g(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}[g(X)] = g(a)$. Αν, τώρα, $\mathbb{E}(X) > a$, τότε, χρησιμοποιώντας την $(\star)$, μπορεί να δειχθεί ότι για κάθε $x_0 \in (a, b)$, υπάρχει (πεπερασμένος) αριθμός $\lambda(x_0)$, τέτοιος ώστε[38]

$$g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b).$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για

$$x_0 = \mathbb{E}(X) \in (a, b),$$

και θέτοντας, π.χ.,

$$x = XI(a \leq X < b) + \mathbb{E}(X)[I(X < a) + I(X \geq b)] = \widetilde{X} \in [a, b),$$

όπως προηγουμένως, η αποδεικτέα προκύπτει λαμβάνοντας μέσες τιμές.

[38]Η απόδειξη αυτής της ανισότητας προκύπτει από την $(\star)$ ως εξής: Η g υποτέθηκε κυρτή στο $I = [a, b)$, επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$, για $x = a$, $y = a + \theta$, $\lambda = 1 - 1/n$, $1 - \lambda = 1/n$, όπου $\theta > 0$ είναι αρκετά μικρό, έτσι ώστε το $a + \theta$ να είναι εσωτερικό σημείο του I. Προκύπτει τότε ότι

$$g(a) \geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) g\left(a + \frac{\theta}{n}\right) - \frac{1}{n-1} g(a + \theta),$$

και αφού το $a + \theta/n$ είναι εσωτερικό σημείο του I, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $(\star)$ για $x = a + \theta/n$. Έτσι, $g(a + \theta/n) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(a - x_0 + \theta/n)$, και σε συνδυασμό με την προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$g(a) - [g(x_0) + \lambda(x_0)(a - x_0)] \geq \frac{g(x_0) + \lambda(x_0)(a + \theta - x_0) - g(a + \theta)}{n - 1},$$

από την οποία προκύπτει η αποδεικτέα, λαμβάνοντας όρια για $n \to \infty$.

Η ανισότητα για κοίλες g προκύπτει εύκολα, παρατηρώντας ότι η $-g$ είναι κυρτή.

(iv) Στην περίπτωση που $\mathbb{E}|X|^q = \infty$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Ομοίως, όταν $\mathbb{E}|X|^p = \infty$, τότε, επειδή $p < q$, έχουμε

$$|X|^p \leq 1 + |X|^q, \quad \text{οπότε} \quad |X|^q \geq |X|^p - 1,$$

και άρα $\mathbb{E}|X|^q = \infty$, επίσης.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbb{E}|X|^q < \infty$ (και, επομένως, $\mathbb{E}|X|^p < \infty$, επίσης). Προφανώς, η συνάρτηση $g(x) = x^{q/p}$ είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$. Αν θέσουμε $Y = |X|^p$, τότε θα είναι $\mathbb{E}|Y| < \infty$, $\mathbb{P}(Y \in [0, +\infty)) = 1$, και, από την ανισότητα Jensen,

$$\mathbb{E}[g(Y)] \geq g(\mathbb{E}(Y)),$$

δηλαδή,

$$\mathbb{E}(Y^{q/p}) \geq (\mathbb{E}(Y))^{q/p}, \quad \text{ή} \quad \mathbb{E}|X|^q \geq (\mathbb{E}|X|^p)^{q/p},$$

που σημαίνει ότι $(\mathbb{E}|X|^q)^{1/q} \geq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$. $\square$

Παρατήρηση 5.24 (i) Η ανισότητα Jensen μας εξασφαλίζει ότι η μέση τιμή της $g(X)$ είναι (πιθανώς εκτεταμένος) αριθμός του διαστήματος $[g(\mathbb{E}(X)), +\infty]$. Επομένως, όταν υπάρχει η $\mathbb{E}(X)$ και η g είναι κυρτή, τότε η $\mathbb{E}[g(X)]$ ορίζεται, και μάλιστα, η $\mathbb{E}[g(X)]$ είτε είναι της μορφής $+\infty - c_1 = +\infty$, ή είναι της μορφής $c_2 - c_1 \in \mathbb{R}$, με $c_2 - c_1 \geq g(\mathbb{E}(X))$, όπου $c_1 = \mathbb{E}[(g(X))^-]$, $c_2 = \mathbb{E}[(g(X))^+]$ (δηλ., υποχρεωτικά, $c_1 < \infty$).

(ii) Η ανισότητα $g(x) \geq g(x_0)+\lambda(x_0)(x-x_0)$ μας διαβεβαιώνει (γεωμετρικά) ότι το γράφημα της g βρίσκεται όλο πάνω από την «υποστηρίζουσα» ευθεία

$$y = g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0).$$

(iii) Σημειώνεται ότι αν υπάρχει η $g'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η κυρτότητα της g ισοδυναμεί με το ότι η συνάρτηση $h(x) = g'(x)$ είναι αύξουσα στο (a, b), ενώ όταν υπάρχει η $g''(x)$, τότε η g είναι κυρτή αν και μόνο αν $g''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a, b)$ (βλ. Άσκηση 5.1).

(iv) Για μία κυρτή συνάρτηση g στο (a, b), τόσο η δεξιά όσο και η αριστερή παράγωγος, $g'(x_{0+})$ και $g'(x_{0-})$, αντίστοιχα, υπάρχουν (και είναι πεπερασμένες) για κάθε $x_0 \in (a, b)$, και μάλιστα,

$$g'(x_{0-}) \leq g'(x_{0+}).$$

Ο αριθμός $\lambda(x_0)$, στην απόδειξη της Πρότασης 5.23(iii), πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε

$$g'(x_{0-}) \leq \lambda(x_0) \leq g'(x_{0+}),$$

οπότε, $\lambda(x_0) = g'(x_0)$ είναι η μόνη επιλογή, όταν η g είναι διαφορίσιμη στο x_0. Επίσης, και οι δύο συναρτήσεις, $g'(x_-)$ και $g'(x_+)$, είναι αύξουσες στο (a, b).

(v) Τέλος, σημειώνεται ότι μία κυρτή συνάρτηση g στο διάστημα I είναι συνεχής στο εσωτερικό του I (και άρα Borel – βλ. Άσκηση 5.1).

5.8 Ομοιόμορφη Ολοκληρωσιμότητα

Η έννοια της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας είναι πολύ σημαντική, διότι **χαρακτηρίζει** τις ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, για τις οποίες **η μέση τιμή του ορίου ισούται με το όριο των μέσων τιμών.**

Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε από τα Θεωρήματα Μονότονης και Κυριαρχημένης Σύγκλισης (βλ. Ιδιότητες (Μ4) και (Μ7) της §5.6) ότι, κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες, η κατά σημείο σύγκλιση (ή, έστω, η σ.π. σύγκλιση) $X_n \to X$, συνεπάγεται την αντίστοιχη σύγκλιση των μέσων τιμών, $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$. Έτσι, οι συνθήκες που δίδονται σε αυτά τα θεωρήματα είναι ικανές (ώστε η $X_n \to X$ να συνεπάγεται την $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$), χωρίς, φυσικά, να γνωρίζουμε αν είναι και αναγκαίες. Είναι, λοιπόν, χρήσιμο να βρεθεί κάποια ικανή και αναγκαία συνθήκη, κάτω από την οποία ισχύει, πράγματι, η παραπάνω σύγκλιση, τουλάχιστον στην περίπτωση κατά την οποία οι $\mathbb{E}(X_n)$ και $\mathbb{E}(X)$ υπάρχουν. [Η αλήθεια είναι ότι αυτή είναι και η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση.]

Το βασικό αποτέλεσμα της παρούσης παραγράφου δείχνει ότι η ζητούμενη συνθήκη είναι, στην ουσία, η συνθήκη **ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας.**

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί η κλασική περίπτωση, κατά την οποία η ακολουθία τ.μ. ορίζεται **στον ίδιο** χώρο πιθανότητας. Σημειώνεται ότι ανάλογα, και μάλιστα πιο γενικά, αποτελέσματα (τα οποία είναι ουσιωδώς πιο εύχρηστα στις εφαρμογές) θα δοθούν και στο Κεφάλαιο ;;, παρακάτω (βλ. §7.3, Ορισμός ;; και Θεώρημα ;;). Τα γενικότερα αυτά αποτελέσματα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Skorohod, το οποίο, επίσης, παρουσιάζεται στο Κεφ. ;; (Θεώρημα ;; της §7.2).

Ορισμός 5.25 (ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα) Η ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ (σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) λέγεται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη** (uniformly integrable) όταν[39]

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] = 0.$$

Επειδή για $\alpha > 0$, $|X_n| = |X_n| I(|X_n| \geq \alpha) + |X_n| I(|X_n| < \alpha)$, είναι προφανές ότι, όταν οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_n| &\leq \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] + \alpha \mathbb{P}[|X_n| < \alpha] \\
&\leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] + \alpha \\
&= \alpha + g(\alpha),
\end{aligned}$$

όπου $g(\alpha) = \sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] \to 0$, καθώς $\alpha \to$

[39] Πολλές φορές θα χρησιμοποιείται, για συντομία, η έκφραση «οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες», η οποία σημαίνει ό,τι ακριβώς και η φράση «η ακολουθία $\{X_n\, n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη».

$+\infty$. Αφού το άνω φράγμα, $\alpha+g(\alpha)$, δεν εξαρτάται από το n, έπεται ότι και $\sup_n \mathbb{E}|X_n| \le \alpha+g(\alpha)$. Άρα, για τυχόν $\varepsilon>0$, μπορούμε να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο $M=M(\varepsilon)>0$, έτσι ώστε $\sup_n \mathbb{E}|X_n| \le \alpha+\varepsilon$, όταν $\alpha>M$, και συνεπώς, **όλες** οι X_n είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα, $\sup_n \mathbb{E}|X_n|<\infty$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάτι «ελαφρώς» ισχυρότερο ισχύει, και συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\delta>0$, $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{1+\delta}<\infty$. Αφού για τυχόν $\alpha>0$, ισχύει η ανισότητα[40]

$$\mathbb{E}[|X_n| I(|X_n|\ge\alpha)] \le \frac{1}{\alpha^\delta}\mathbb{E}|X_n|^{1+\delta},$$

έχουμε

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n|\ge\alpha)] \le \frac{1}{\alpha^\delta}\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{1+\delta} = \frac{c}{\alpha^\delta}\to 0, \text{ καθώς } \alpha\to+\infty,$$

(αφού $c=\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{1+\delta}<\infty$, από υπόθεση), και συνεπώς, οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες (δηλ., η ακολουθία $\{X_n,\ n\ge 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη). Άρα, η συνθήκη $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^{1+\delta}<\infty$ (για κάποιο $\delta>0$) μας εξασφαλίζει την συνθήκη ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας, ενώ η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα μας εξασφαλίζει την ασθενέστερη συνθήκη $\sup_n \mathbb{E}|X_n|<\infty$. Άλλες συνθήκες για ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα θα δοθούν στο Κεφ. ;;.

Πάντως σημειώνεται ότι εάν $|X_n|\le|Y|$ (για κάθε n), και

[40]διότι $\alpha^\delta|X_n|I(|X_n|\ge\alpha)\le|X_n|^{1+\delta}$

$\mathbb{E}|Y| < \infty$ (δηλαδή, όταν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης για τις X_n), τότε οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες. [Για παράδειγμα, η «ακολουθία» $X_n = Y$ (σταθερή) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη όταν και μόνο όταν η Y είναι ολοκληρώσιμη.] Αυτό συμβαίνει επειδή η σχέση $|X_n| \le |Y|$ (για κάθε n) συνεπάγεται την [41]

$$|X_n| I(|X_n| \ge \alpha) \le |Y| I(|Y| \ge \alpha), \ \text{για κάθε}\ \alpha > 0, \ \text{και για κάθε}\ n.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \ge \alpha)] \le \mathbb{E}[|Y| I(|Y| \ge \alpha)] \le \mathbb{E}[|Y| I(|Y| \ge m)] \to \mathbb{E}(0) = 0,$$

καθώς $\alpha \to +\infty$ (όπου $m = [\alpha]$, το ακέραιο μέρος του α), διότι $m = [\alpha] \to \infty$, και η ακολουθία τ.μ. $Y_m = |Y| I(|Y| \ge m)$ είναι τέτοια ώστε $Y_m \to 0$, ενώ, ταυτόχρονα, $|Y_m| \le |Y|$ (για κάθε m), με $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

Η σπουδαιότητα της έννοιας της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας οφείλεται στο επόμενο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.26 (Ομοιόμορφης Ολοκληρωσιμότητας) (i) Ας θεωρήσουμε μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \ge 1\}$, και ας υποθέσουμε ότι $X_n \to X$ (με πιθ. 1). Τότε ισχύουν τα εξής:

[41] Η ανισότητα αυτή δείχνεται ως εξής: Αν $|X_n(\omega)| < \alpha$, τότε θα είναι $|X_n(\omega)| I(|X_n(\omega)| \ge \alpha) = 0$, οπότε η ανισότητα ισχύει, ενώ, όταν $|X_n(\omega)| \ge \alpha$, τότε θα είναι και $|Y(\omega)| \ge \alpha$ (επειδή υποτέθηκε ότι $|Y(\omega)| \ge |X_n(\omega)|$), οπότε έχουμε ότι $I(|X_n| \ge \alpha) = I(|Y| \ge \alpha) = 1$, και τελικά, $|X_n| I(|X_n| \ge \alpha) = |X_n| \le |Y| = |Y| I(|Y| \ge \alpha)$, και η ανισότητα ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.

(α) Η X είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\mathbb{E}|X| < \infty$).

(β) $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

(γ) $\mathbb{E}|X_n - X| \to 0$.

(ii) Εάν $X_n \geq 0$, $X_n \to X$ (με πιθ. 1), $\mathbb{E}(X) < \infty$, $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$, τότε η ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: (i) Για τυχόν $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}[X_n I(X_n \leq -\alpha)] + \mathbb{E}[X_n I(X_n > -\alpha)].$$

Όμως

$$\begin{aligned} |\,\mathbb{E}[X_n I(X_n \leq -\alpha)]| &\leq \mathbb{E}[|X_n| I(X_n \leq -\alpha)] \leq \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] \\ &\leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n| I(|X_n| \geq \alpha)] = h(\alpha), \end{aligned}$$

όπου $h(\alpha) \to 0$, καθώς $\alpha \to +\infty$, από υπόθεση. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$, μπορούμε να εκλέξουμε τόσο μεγάλο $\alpha > 0$, έτσι ώστε $h(\alpha) < \varepsilon$, οπότε

$$\mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}[X_n I(X_n > -\alpha)] - \varepsilon.$$

Επομένως, $\liminf_n \mathbb{E}(X_n) \geq \liminf_n \mathbb{E}[X_n I(X_n > -\alpha)] - \varepsilon$, εφ΄ όσον το α είναι αρκετά μεγάλο. Είναι όμως $\alpha + X_n I(X_n > -\alpha) \geq 0$, και επειδή, προφανώς, $X_n I(X_n > -\alpha) \geq X_n$, από το Λήμμα Fatou έπεται ότι

$$\begin{aligned} \liminf_n \Big(\alpha + \mathbb{E}[X_n I(X_n > -\alpha)]\Big) &= \liminf_n \mathbb{E}\Big[\alpha + X_n I(X_n > -\alpha)\Big] \\ &\geq \mathbb{E}\Big[\liminf_n (\alpha + X_n I(X_n > -\alpha))\Big] = \mathbb{E}\Big[\alpha + \liminf_n (X_n I(X_n > -\alpha))\Big] \\ &= \alpha + \mathbb{E}\Big[\liminf_n (X_n I(X_n > -\alpha))\Big] \geq \alpha + \mathbb{E}\Big(\liminf_n X_n\Big), \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha + \liminf_n \mathbb{E}\Big[X_n I(X_n > -\alpha)\Big] \geq \alpha + \mathbb{E}\Big(\liminf_n X_n\Big).$$

Επομένως,

$$\liminf_n \mathbb{E}\left[X_n I(X_n > -\alpha)\right] \geq \mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right),$$

και, τελικά,

$$\liminf_n \mathbb{E}(X_n) \geq \liminf_n \mathbb{E}\left[X_n I(X_n > -\alpha)\right] - \varepsilon \geq \mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right) - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n).$$

Από τον Ορισμό 5.25 είναι άμεσο ότι και η ακολουθία $\{-X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, και, φυσικά, συγκλίνει στην $-X$ (με πιθ. 1). Εφαρμόζοντας το παραπάνω συμπέρασμα στις $-X_n$ και $-X$, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\left[\liminf_n (-X_n)\right] \leq \liminf_n \mathbb{E}(-X_n) = \liminf_n (-\mathbb{E}(X_n)) = -\limsup_n \mathbb{E}(X_n),$$

δηλαδή,

$$\limsup_n \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}\left(\limsup_n X_n\right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n) \leq \limsup_n \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}\left(\limsup_n X_n\right).$$

Αφού $X_n \to X$, έπεται ότι $X = \liminf X_n = \limsup X_n$ (με πιθ. 1). Επίσης, αφού οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, οι $\liminf \mathbb{E}(X_n)$, $\limsup \mathbb{E}(X_n)$, είναι καλά ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί, κατ΄ απόλυτη τιμή μικρότεροι ή ίσοι από το

$$\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η $\mathbb{E}(X)$ υπάρχει, διότι για την $X = \liminf X_n = \limsup X_n$ ισχύουν οι ανισότητες $\mathbb{E}(X) \le \liminf \mathbb{E}(X_n)$, και $\mathbb{E}(X) \ge \limsup \mathbb{E}(X_n)$, και τα $\liminf \mathbb{E}(X_n)$, $\limsup \mathbb{E}(X_n)$ είναι πεπερασμένα. Τελικά, $\mathbb{E}(X) = \liminf \mathbb{E}(X_n) = \limsup \mathbb{E}(X_n) \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η X είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα, ισχύει ότι $\lim \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$. Το (γ) προκύπτει από το γεγονός ότι η ακολουθία $Z_n = |X_n - X|$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη,[42] παρατηρώντας ότι $Z_n = |X_n - X| \to 0$ (με πιθ. 1), και εφαρμόζοντας το συμπέρασμα του (β) στην Z_n.

(ii) Έστω $S = \{\beta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = \beta) > 0\}$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της F_X (που είναι το πολύ αριθμήσιμο). Τότε, για $\alpha \notin S$, $X_n I(X_n < \alpha) \to X I(X < \alpha)$ (με πιθ. 1), και η ακολουθία $X_n I(X_n < \alpha)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη (αφού, π.χ., $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2 I^2(X_n < \alpha)] \le \alpha^2 < \infty$). Άρα, από το (i), προκύπτει για τυχόν $\alpha \notin S$,

$$\mathbb{E}[X_n I(X_n < \alpha)] \to \mathbb{E}[X I(X < \alpha)], \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Συνεπώς, αφού και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$, έχουμε ότι

$$\lim_n \mathbb{E}[X_n I(X_n \ge \alpha)] = \mathbb{E}[X I(X \ge \alpha)], \quad \text{για κάθε } \alpha \notin S.$$

[42] χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|Z_n| I(|Z_n| \ge \alpha) \le 2|X_n| I(|X_n| \ge \alpha/2) + 2|X| I(|X| \ge \alpha/2)$

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Επιλέγουμε ένα $\alpha_0 \notin S$, τόσο μεγάλο ώστε $\mathbb{E}[XI(X \geq \alpha_0)] < \varepsilon/2$ (αυτό είναι εφικτό επειδή $\mathbb{E}[XI(X \geq \alpha_0)] \to 0$, καθώς $\alpha_0 \to +\infty$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης). Όμως, αφού $\alpha_0 \notin S$,

$$\mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha_0)] \to \mathbb{E}[XI(X \geq \alpha_0)], \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

οπότε μπορούμε να εκλέξουμε έναν φυσικό n_0, αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε για $n \geq n_0$,

$$\mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha_0)] \leq \mathbb{E}[XI(X \geq \alpha_0)] + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Άρα, για $n \geq n_0$ έχουμε $\mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha_0)] \leq \varepsilon$. Τώρα εκλέγουμε $\alpha_1 \geq \alpha_0$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{E}[X_j I(X_j \geq \alpha_1)] \leq \varepsilon, \quad \text{για } j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1.$$

[Αυτό γίνεται διότι έχουμε υποθέσει ότι $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ για κάθε n, οπότε, για $j = 1, 2, \ldots, n_0$, $\mathbb{E}[X_j I(X_j \geq \alpha)] \to 0$ καθώς $\alpha \to +\infty$, και, τελικά (αφού το n_0 είναι σταθερό), έπεται ότι $\max\limits_{1 \leq j \leq n_0 - 1} \mathbb{E}[X_j I(X_j \geq \alpha)] \to 0$ καθώς $\alpha \to +\infty$.] Έχουμε τότε ότι $\sup\limits_n \mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha_1)] \leq \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για δοθέν $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό), μπορούμε να βρούμε α_1 (αρκετά μεγάλο), έτσι ώστε $\sup\limits_n \mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha_1)] \leq \varepsilon$ (και, φυσικά, θα ισχύει τότε ότι και $\sup\limits_n \mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha)] \leq \varepsilon$, για κάθε $\alpha \geq \alpha_1$, αφού $X_n I(X_n \geq \alpha) \leq X_n I(X_n \geq \alpha_1)$, όταν

$\alpha \geq \alpha_1$). Συνεπώς,

$$\sup_n \mathbb{E}[X_n I(X_n \geq \alpha)] \to 0, \quad \text{καθώς } \alpha \to +\infty,$$

δηλαδή οι X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες. $\square$

5.9 Το Θεώρημα Tonelli-Fubini

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε (χωρίς απόδειξη) το θεμελιώδες αποτέλεσμα σχετικά με την αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης. Επίσης, στο τέλος της παραγράφου, θα αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) ένα βασικό αποτέλεσμα, που συσχετίζει την ολοκληρωσιμότητα με την μετρησιμότητα.

Κατ΄ αρχήν, θεωρούμε ότι έχουμε δύο χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου, $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, και κατασκευάζουμε (Θεώρημα ;;) τον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, με $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Το μ είναι το μοναδικό μέτρο (και μάλιστα σ-πεπερασμένο), στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$, με την ιδιότητα

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \qquad [0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0]$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Μία συνάρτηση $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (ή $\overline{\mathbb{R}}$) είναι, στην ουσία, συνάρτηση δύο μεταβλητών, αφού $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, και $X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2)$. Το Θεώρημα Tonelli (ή Θεώρημα Fubini για θετικές συναρτήσεις) είναι το εξής:

Θεώρημα 5.27 (Tonelli) Εάν η συνάρτηση $X : \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, τότε

$$\begin{aligned}\int_\Omega X(\omega)d\mu(\omega) &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2)\right)d\mu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)d\mu_1(\omega_1)\right)d\mu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

[Δηλ. το «διπλό ολοκλήρωμα», $\int_\Omega X(\omega)d\mu(\omega) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)d(\mu_1\times\mu_2)(\omega_1,\omega_2)$, μπορεί πάντα να υπολογιστεί ως δύο επάλληλα, με όποια σειρά προτιμάμε.]

Φυσικά, οι ισότητες ισχύουν και όταν $\int_\Omega X(\omega)d\mu(\omega) = +\infty$. [Στην περίπτωση αυτή, το τελικό αποτέλεσμα των επάλληλων ολοκληρώσεων (με όποια σειρά και αν υπολογιστεί) είναι $+\infty$.]

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, π.χ., η συνάρτηση $Y : \Omega_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, με τύπο

$$Y(\omega_1) = \int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)d\mu_2(\omega_2) \geq 0, \quad \omega_1 \in \Omega_1,$$

θα πρέπει να είναι $\mathcal{A}_1/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$–μετρήσιμη, έτσι ώστε να έχει νόημα το $\int_{\Omega_1} Y(\omega_1)d\mu_1(\omega_1)$. Αυτό, αν και δεν το αναφέραμε ρητά, είναι ένα από τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Tonelli (για τις λεπτομέρειες βλ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης, 1988, Θεώρημα 9.12).[43]

[43] Φυσικά, αποδεικνύεται ότι και το ολοκλήρωμα που ορίζει την $Y(\omega_1)$ έχει νόημα, δηλ., ότι για σταθερό $\omega_1 \in \Omega_1$, η συνάρτηση $Z(\omega_2) = X(\omega_1,\omega_2)$ είναι $\mathcal{A}_2/\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$–μετρήσιμη. Βλ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης (1988), Πρόταση 9.4.

Πόρισμα 5.28 Μία ($\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμη) συνάρτηση $X : \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\int_\Omega |X| d\mu < \infty$) όταν και μόνο όταν

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |X(\omega_1, \omega_2)| d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1) < \infty,$$

όταν και μόνο όταν

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |X(\omega_1, \omega_2)| d\mu_1(\omega_1) \right) d\mu_2(\omega_2) < \infty.$$

[Διότι το $\int_\Omega |X| d\mu$, και τα δύο παραπάνω επάλληλα ολοκληρώματα, είναι πάντα ίσα (αφού $|X| \geq 0$), από το Θεώρημα Tonelli.]

Θεώρημα 5.29 (Fubini) Εάν η $X : \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη (δηλ. $\int_\Omega |X| d\mu < \infty$), τότε

$$\int_\Omega X d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} X d\mu_1 \right) d\mu_2.$$

Ας σημειωθεί ότι στο παραπάνω θεώρημα, αν και το τελικό αποτέλεσμα (μετά την διπλή, ή την επάλληλη ολοκλήρωση) είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός, το ολοκλήρωμα

$$Y(\omega_1) = \int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)$$

μπορεί να είναι $+\infty$, ή $-\infty$, ή ακόμα και να μην ορίζεται, για κάποια $\omega_1 \in \Omega_1$. Όταν αυτό συμβαίνει, η $Y(\omega_1)$ πρέπει να αντικατασταθεί από την

$$\widetilde{Y}(\omega_1) = \begin{cases} \int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2) d\mu_2(\omega_2), & \text{αν η } Z_2(\omega_2) \text{ είναι ολοκληρώσιμη,} \\ 0, & \text{αν η } Z_2(\omega_2) \text{ δεν είναι ολοκληρώσιμη,} \end{cases}$$

όπου $Z_2(\omega_2) = X(\omega_1,\omega_2)$, και λέμε ότι η Z_2 είναι ολοκληρώσιμη (ως προς μ_2) όταν $\int_{\Omega_2} |Z_2(\omega_2)| d\mu_2(\omega_2) < \infty$. Τότε, το πρώτο επάλληλο ολοκλήρωμα έχει την εξής έννοια:

$$\int_{\Omega_1} \widetilde{Y}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1).$$

[Αντίστοιχα και για το δεύτερο.] Συνεπώς, ένα από τα συμπεράσματα του θεωρήματος είναι ότι η $\widetilde{Y}(\omega_1)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ_1.

Στην πράξη, η ολοκληρωσιμότητα μιας μετρήσιμης $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ελέγχεται από το Πόρισμα 5.28.

Εφαρμογή 5.30 Έστω X και Y ανεξάρτητες τ.μ., με σ.κ. F_X και F_Y. Θέτουμε $Z = X + Y$. Τότε η σ.κ. της Z δίδεται από την **συνέλιξη** (convolution) των F_X, F_Y:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = (F_X * F_Y)(z) &\overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y) dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x) dF_X(x), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Απόδειξη: Κατ΄ αρχήν υπενθυμίζεται ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty}$ είναι ένας άλλος συμβολισμός για το $\int_{\mathbb{R}}$. Είναι

$$\mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(X+Y \le z) = \mathbb{E}[I(X+Y \le z)] = \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \le z) dF(x,y),$$

όπου $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ η σ.κ. της (X,Y). Θεωρούμε το μέτρο γινόμενο $\mathbb{P}$ στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, με $\mathbb{P} = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$.

Τότε, F είναι η σ.κ. του $\mathbb{P}$, F_X του $\mathbb{P}_X$, και F_Y του $\mathbb{P}_Y$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x+y \leq z) d(\mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y) \stackrel{\text{Tonelli}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I(x+y \leq z) d\mathbb{P}_Y(y) \right) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} I(x+y \leq z) dF_Y(y) \right) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{(-\infty, z-x]} 1 \cdot dF_Y(y) \right) dF_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_Y(z-x) dF_X(x). \end{aligned}$$

Η άλλη ισότητα προκύπτει από τον δεύτερο τύπο του Θεωρήματος Tonelli. □

Πόρισμα 5.31 Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη, δηλαδή ισχύει ότι $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$, και $F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3$.

[Διότι η *σ.κ.* της $X + Y$ ταυτίζεται με αυτήν της $Y + X$, ενώ η *σ.κ.* της $X + (Y + Z)$ ταυτίζεται με αυτήν της $(X + Y) + Z$, θεωρώντας τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X, Y, Z, με *σ.κ.* F_1, F_2, F_3, αντίστοιχα, σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Τέτοιες τ.μ. υπάρχουν λόγω των θεωρημάτων ύπαρξης.]

Στα επόμενα δύο πορίσματα χρησιμοποιούμε, για απλότητα, τον συνήθη συμβολισμό $\int_a^b g(z)dz$, αντί του $\int_{(a,b)} g(z) d\lambda(z)$ $\left(\equiv \int g I_{(a,b)} d\lambda\right)$. Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης αφού, ως προς το μέτρο Lebesgue λ, είναι αδιάφορο εάν τα άκρα του διαστήματος περιλαμβάνονται στο πεδίο ολοκλήρωσης, ή όχι.

Πόρισμα 5.32 Εάν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., με *σ.κ.* F_X και F_Y, και η X έχει πυκνότητα f_X (δηλ., η X είναι απόλυτα συνεχής – βλ. Ιδιότητα (6) της §5.5, για την πυκνότητα των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων κατανομής, ως προς το μέτρο Lebesgue), τότε η $Z = X + Y$ είναι απόλυτα συνεχής, με πυκνότητα

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)dF_Y(y) = \mathbb{E}[f_X(z-Y)], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Για f_Z όπως στην εκφώνηση, ισχύει ότι

$$\int_B f_Z(z)dz = \int_B \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(z-y)dF_Y(y)\right) dz \overset{\text{Tonelli}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_B f_X(z-y)dz\right) dF_Y(y),$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Θέτοντας $B = (-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\int_B f_X(z-y)dz = \int_{-\infty}^{t} f_X(z-y)dz = F_X(t-y),$$

και συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{t} f_Z(z)dz = \int_{\mathbb{R}} F_X(t-y)dF_Y(y) = F_Z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η f_Z είναι, πράγματι, (μία) πυκνότητα της Z.

□

Πόρισμα 5.33 Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, με πυκνότητες f_X και f_Y, τότε η $Z = X + Y$ έχει πυκνότητα

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-t)f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-t)f_X(t)dt.$$

[Η f_Z συμβολίζεται με $f_X * f_Y$, και ονομάζεται, επίσης, **συνέλιξη** των f_X, f_Y. Άρα η συνέλιξη πυκνοτήτων είναι, επίσης, αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη, όπως και η συνέλιξη των σ.κ.]

Απόδειξη: Αφού $f_Z(z) = \mathbb{E}[f_X(z-Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)dF_Y(y) = \mathbb{E}[f_Y(z-X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)dF_X(x)$ (λόγω του Πορίσματος 5.32), και η F_X (και F_Y) είναι απόλυτα συνεχής, με $F'_X = f_X$ σ.π. ($F'_Y = f_Y$ σ.π.), έπεται ότι (βλ. Ιδιότητα (6) της §5.5)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)f_X(x)dx. \quad \square$$

Κάτι που, ίσως, δεν είναι τόσο προφανές, είναι το γεγονός ότι όταν $F'_X = f_X$ σ.π., και η F_X είναι απόλυτα συνεχής, τότε

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)dF_Y(y), \quad \sigma.\pi.$$

Αυτό ισχύει επειδή το δεξιό μέλος είναι, απλώς, μία πυκνότητα της απόλυτα συνεχούς σ.κ. του αριστερού μέλους, της οποίας λαμβάνουμε την παράγωγο.

Παρατήρηση 5.34 Σημειώνεται ότι στην απόδειξη της Εφαρμογής 5.30 χρησιμοποιήθηκε μία ειδική περίπτωση ($g(x,y) = I(x+y \le z)$) της σχέσης[44]

$$\mathbb{E}[g(X_1,X_2)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)d\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2), \qquad (5.9)$$

η οποία ισχύει για τυχούσα Borel συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}$ είναι το επαγόμενο μέτρο στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, που επάγει το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1,X_2)$, με τύπο $\mathbb{P}_{(X_1,X_2)}(B) = \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Αυτή η σχέση ισχύει γενικότερα (και για n τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$), και είναι μία απλή εφαρμογή του

[44] διδιάστατος τύπος αφηρημένου μαθηματικού

Λήμματος 5.15, για $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu) = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ [ο αρχικός χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζονται οι X_1, X_2], $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_X) = \big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{(X_1,X_2)}\big)$ [δηλ. $X = (X_1, X_2) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$], και $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ μία Borel συνάρτηση.

Παρατήρηση 5.35 Στην ειδική περίπτωση που η $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ έχει μία διδιάστατη πυκνότητα $f_{\boldsymbol{X}}$, τότε, και μόνο τότε, το αντίστοιχο επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, είναι α-πόλυτα συνεχές ως προς λ^2 (το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$). Επίσης (πρβλ. Ιδιότητα (1) της §5.5), μπορεί να δειχθεί ότι η αντίστοιχη διδιάστατη *σ.κ.* F, με τύπο

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{\boldsymbol{X}}(t_1, t_2) dt_2 dt_1 \left(= \int_{(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2]} f_{\boldsymbol{X}} d\lambda^2 \right), \ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \tag{5.10}$$

ικανοποιεί την σχέση $f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$, λ^2-*σ.π.*

Αλλά, και αντίστροφα, εάν για δεδομένο διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X}$, με *σ.κ.* F, υπάρχει η $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$ σχεδόν για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (δηλ. λ^2-*σ.π.*), και, επίσης, ικανοποιείται η ταυτότητα

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F(t_1, t_2) dt_2 dt_1, \ \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι το επαγόμενο μέτρο $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, στον $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, είναι απόλυτα συνεχές ως προς λ^2, και μάλιστα έχει πυκνότητα

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2), \quad \lambda^2\text{-}\sigma.\pi. \tag{5.11}$$

Κατά συνέπεια, στην (διδιάστατη) απόλυτα συνεχή περίπτωση, ισχύει η ταυτότητα

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \in B) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(B) = \int_B f_{\boldsymbol{X}} d\lambda^2, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \qquad (5.12)$$

όπου η $f_{\boldsymbol{X}}$ είναι (μία) πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X}$. Η *σ.κ.* F του τυχαίου διανύσματος $\boldsymbol{X}$, και η αντίστοιχη πυκνότητα $f_{\boldsymbol{X}}$ (η οποία, σύμφωνα με την (5.12), είναι και «πυκνότητα» (Radon-Nikodym) του $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}$, ως προς το λ^2), συνδέονται μέσω των σχέσεων (5.10) και (5.11).

Τώρα, είναι σαφές από την (5.12), σε συνδυασμό με την Παρατήρηση 5.34 και την Πρόταση 5.6(iv), ότι η $\mathbb{E}[g(X_1, X_2)]$ δίδεται από την σχέση[45]

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

όπου το $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) dx_2 dx_1$ είναι ένας άλλος συμβολισμός για το $\int_{\mathbb{R}^2} g d\lambda^2$.

Αυτά, φυσικά, γενικεύονται και για περισσότερες από δύο τ.μ.

---

[45] η οποία, σε εισαγωγικά κείμενα, δίδεται συνήθως ως ορισμός της μέσης τιμής, και αποτελεί ειδική περίπτωση του διδιάστατου τύπου του αφηρημένου μαθηματικού

Κλείνοντας την παράγραφο αυτή, θα αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) το εξής αποτέλεσμα, το οποίο καταδεικνύει τον θεμελιώδη ρόλο των μετρησίμων συναρτήσεων στην θεωρία ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 5.36[46] Έστω ότι η συνάρτηση $X \geq 0$ (στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) είναι φραγμένη, και το μ είναι πεπερασμένο. [Η X **δεν υποτίθεται μετρήσιμη**, αλλά είναι, απλώς, μία συνάρτηση

$$X : \Omega \longrightarrow [0, c],$$

με $c < \infty$.]

Ορίζουμε το **κατώτερο ολοκλήρωμα** της X ως

$$\int_* X d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=} \sup \left\{ \int Z d\mu : \ 0 \leq Z \leq X, \ Z \text{ απλή} \right\},$$

και το **ανώτερο ολοκλήρωμα** της X ως

$$\int^* X d\mu \stackrel{\text{ορ.}}{=} \inf \left\{ \int Z d\mu : \ Z \geq X, \ Z \text{ απλή} \right\}.$$

Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η ισότητα[47]

$$\int_* X d\mu = \int^* X d\mu,$$

είναι η εξής:

Η X είναι $\mathcal{A}_\mu$–μετρήσιμη.

[46] για την απόδειξη βλ. Billingsley, 1986, σελ. 207-208.

[47] αφού είναι προφανές ότι, γενικά, ισχύει η ανισότητα $\int_* X d\mu \leq \int^* X d\mu$

Δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση Y, η οποία είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη, και ένα σύνολο $B \in \mathcal{A}$, με $\mu(B) = 0$, τέτοιο ώστε $A = \{X \neq Y\} \subset B$.
[Με άλλα λόγια, η X είναι **σχεδόν μετρήσιμη**, ή μετρήσιμη ως προς την πλήρωση $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \overline{\mu})$, του χώρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Φυσικά, αν ο χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης, αυτό ισοδυναμεί με το ότι η X είναι μετρήσιμη.]

Η κοινή τιμή,

$$\int_* X d\mu = \int^* X d\mu,$$

είναι, στην ουσία, αυτό που ορίσαμε ως

$$\int X d\mu,$$

για μετρήσιμες $X \geq 0$.

Ασκήσεις Κεφ. 5:

5.1. Μία συνάρτηση $g : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ καλείται **κυρτή** στο I, όπου το I είναι τυχόν διάστημα (φραγμένο ή μη, κλειστό, ή ανοικτό, ή τίποτα από τα δύο – υπάρχουν 9 διαφορετικοί τύποι διαστημάτων), όταν $-\infty < g(x) < +\infty$ για κάθε x που είναι εσωτερικό σημείο του I, και όταν για κάθε x, y, με $x < y$, $x, y \in I$, και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

Στην συνέχεια της άσκησης περιοριζόμαστε σε κυρτές συναρτήσεις $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, με $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, δηλαδή σε ανοικτά διαστήματα I.

(i) Δείξτε ότι η g είναι κυρτή αν και μόνο αν κάποιο από τα (α) ή (β) ισχύει:

(α) Για κάθε $a < x < x_0 < y < b$,
$$\frac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x} \leq \frac{g(y) - g(x_0)}{y - x_0}.$$

(β) Για κάθε $x_0 \in (a, b)$, υπάρχει $\lambda(x_0) \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε

$$g(x) \geq g(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

(ii) Δείξτε ότι μία κυρτή συνάρτηση g έχει δεξιά και αριστερή παράγωγο, $g'(x_{0+})$ και $g'(x_{0-})$, αντίστοιχα, σε κάθε $x_0 \in (a, b)$, και μάλιστα,

$$-\infty < g'(x_{0-}) \leq g'(x_{0+}) < +\infty.$$

Ο αριθμός $\lambda(x_0)$ στο ερώτημα (i)-(β) μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα στο διάστημα $[g'(x_{0-}), g'(x_{0+})]$, και μόνο σε αυτό.
(iii) Αν η g είναι διαφορίσιμη στο (a, b), τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι κυρτή είναι η εξής:

$$\text{Η } g' \text{ είναι αύξουσα στο } (a, b).$$

(iv) Αν η g είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο (a, b), τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι κυρτή είναι η εξής:

$$g''(x) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

(v) Μία κυρτή συνάρτηση g (στο (a, b)) είναι συνεχής στο (a, b) (και, άρα, Borel).

5.2. Έστω X, Y δύο τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, για τις οποίες οι $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(Y)$ ορίζονται. Δείξτε ότι αν το «άθροισμα» $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ορίζεται (δηλ. δεν είναι της μορφής $(+\infty) + (-\infty)$, ή $(-\infty) + (+\infty)$), τότε και η $\mathbb{E}(X + Y)$ ορίζεται, και μάλιστα, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

5.3. Ας υποθέσουμε ότι οι X, Y, Z, και οι X_n, Y_n, Z_n, είναι τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και ότι $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, $Z_n \to Z$ (με πιθ. 1), και, επίσης, ότι $X_n \leq Y_n \leq Z_n$, και ότι $\mathbb{E}(Z_n) \to \mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$. Δείξτε ότι αν οι $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(Z)$ υπάρχουν, τότε και η $\mathbb{E}(Y)$ υπάρχει, και μάλιστα, $\mathbb{E}(Y_n) \to \mathbb{E}(Y)$.

5.4. Δώστε παράδειγμα αριθμών $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, για τους οποίους ισχύει ότι $\sum_i a_{ij} = \beta_j \in \mathbb{R}$ (για κάθε j), και $\sum_j \beta_j \in \mathbb{R}$, και, επίσης, $\sum_j a_{ij} = \gamma_i \in \mathbb{R}$ (για κάθε i), και $\sum_i \gamma_i \in \mathbb{R}$, αλλά

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \Big) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Big).$$

Δείξτε ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν $\sum_{(i,j)} |a_{ij}| < \infty$.

5.5. Εάν η $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ είναι αύξουσα, και $g(x) > 0$ για $x > 0$, τότε για κάθε $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(\alpha)}.$$

5.6. (i) Δείξτε ότι αν οι ακολουθίες $\{X_n,\ n \geq 1\}$ και $\{Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, τότε και η ακολουθία $\{X_n + Y_n,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(ii) Βρείτε παράδειγμα ακολουθίας $\{X_n,\ n \geq 1\}$, με $X_n \geq 0$, $X_n \to X$, $\mathbb{E}(X_n) < \infty$ για κάθε n, και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X) < \infty$, για την οποία δεν υπάρχει ολοκληρώσιμη $|Y|$, με $|X_n| \leq |Y|$ για κάθε n.

[Άρα, το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης είναι **γνήσια ασθενέστερο** από το Θεώρημα Ομοιόμορφης Ολοκληρωσιμότητας.]

5.7. Εάν $X_n \geq 0$, $X_n \to X$ με πιθ. 1, και $\mathbb{E}(X_n) \leq c < \infty$, τότε η X είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα, $\mathbb{E}(X) \leq c$.

5.8. Δείξτε ότι για μία τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής F,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx,$$

και

$$\mathrm{Var}(X) = 2 \iint_{-\infty<x<y<+\infty} F(x)(1 - F(y))dydx.$$

Βρείτε ανάλογο τύπο για την $\mathbb{E}(X^n)$, και για την $\mathbb{E}|X|^n$.

[**Υπόδειξη:** $X = \int_0^{+\infty} I(X > t)dt - \int_{-\infty}^{0} I(X \leq t)dt$. Εφαρμόστε Tonelli-Fubini.]