Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Κεφάλαιο 6

Κεφάλαιο 7

Κεφάλαιο 8

Κεφάλαιο 9

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

9.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Με τον όρο **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα**[1] εννοούμε ένα πλήθος θεωρημάτων που το κοινό χαρακτηριστικό τους είναι η (συνήθως ασθενής) σύγκλιση αθροισμάτων τ.μ., που αποτελούνται από «πολλούς» προσθετέους, προς την τυποποιημένη κανονική κατανομή, $N(0,1)$, με πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue)[2]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Ιστορικά, το πρώτο αποτέλεσμα προς αυτήν την κατεύθυνση δόθηκε από τους de Moivre–Laplace (1730), στην πολύ ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση που το άθροισμα S_n ακολουθεί την

[1] central limit theorem – CLT

[2] θα αποφύγουμε τον συνήθη συμβολισμό, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, για την πυκνότητα της τυποποιημένης κανονικής, καθότι το γράμμα φ παραπέμπει σε χαρακτηριστική συνάρτηση

διωνυμική κατανομή, $S_n \sim \mathbf{b}(n,p)$, με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n, \;\; 0 < p < 1,$$

δηλαδή $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, όπου η $\{X_j, \ j \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_j = 0)$. [Με άλλα λόγια, όταν οι προσθετέοι X_j είναι ανεξάρτητες (και, προφανώς, ισόνομες) δοκιμές Bernoulli(p).] Σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύεται ότι

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty, \tag{9.2}$$

όπου $\Phi(x)$ είναι η *σ.κ.* της τυποποιημένης κανονικής, $N(0,1)$, που αντιστοιχεί στην πυκνότητα (9.1):

$$\Phi(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Το αποτέλεσμα των de Moivre–Laplace ήρθε να συμπληρώσει, κατά κάποιον τρόπο, το παλαιότερο αποτέλεσμα του Bernoulli (1713):

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty. \tag{9.3}$$

Η σχέση (9.3) καλείται **νόμος μεγάλων αριθμών του Bernoulli**, αφού, σύμφωνα με τον καθιερωμένο συμβολισμό, ισοδυναμεί με την

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} p. \tag{9.4}$$

Προφανώς, η (9.4) είναι (πολύ) ειδική περίπτωση του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών, και είναι εύκολο να δειχθεί ότι η (9.2) συνεπάγεται την (9.4) (Άσκηση 9.7). Ως γνωστόν, η (9.4) ισοδυναμεί με την ασθενή σύγκλιση των δειγματικών μέσων, $\overline{X}_n = S_n/n$, προς την εκφυλισμένη τ.μ. X, με $\mathbb{P}(X = p) = 1$, δηλαδή,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq x\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} \begin{cases} 0, & \text{αν } x < p, \\ 1, & \text{αν } x \geq p. \end{cases}$$

Στην ουσία, η (9.4) μας λέει ότι, «κατά πιθανότητα», οι δειγματικοί μέσοι S_n/n συγκλίνουν προς τον θεωρητικό μέσο p, δηλαδή, για μεγάλο n αναμένουμε ότι

$$\frac{S_n}{n} \simeq p,$$

και αυτό εξηγεί τον βασικό λόγο για τον οποίον στην Στατιστική χρησιμοποιούμε ακριβώς αυτήν την **εκτιμήτρια**, δηλ. τον δειγματικό μέσο $\overline{X}_n = S_n/n$, για να **εκτιμήσουμε** το (άγνωστο) p. Η (9.2) εκλεπτύνει αυτό το αποτέλεσμα, αφού μας εξασφαλίζει ότι για τυχόντα (σταθερά) a και b, με $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(p + a\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{S_n}{n} \leq p + b\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \simeq \Phi(b) - \Phi(a),$$

δηλαδή μας δίνει αριθμητική προσέγγιση για την πιθανότητας όπως

«το S_n/n βρίσκεται εντός ενός (μικρού) διαστήματος γύρω από το p».

Η $\chi.\sigma.$ που μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία, κατάλληλο για την μελέτη αποτελεσμάτων όπως τα (9.2) και (9.4). Οι αποδείξεις γίνονται σχεδόν άμεσες, και η γενικότητα δεν περιορίζεται λόγω της ύπαρξης της $\chi.\sigma.$ για κάθε τ.μ. Φυσικά, δεν πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε πολύ ισχυρά αποτελέσματα,[3] όπως ο Τύπος Αντιστροφής και, ιδιαίτερα, το Θεώρημα Συνεχείας των $\chi.\sigma.$, καθώς επίσης και τις σχέσεις ροπών που παρουσιάστηκαν στο Θεώρημα ;;.

9.2 Κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Lévy

Στην παρούσα παράγραφο επικεντρωνόμαστε στην **κλασική περίπτωση**, κατά την οποία η βασική ακολουθία τ.μ. είναι **ανεξάρτητη και ισόνομη**. Για την απόδειξη του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών (με μόνη απαίτηση την ύπαρξη της ροπής πρώτης τάξεως, δηλ. της μέσης τιμής), και του κλασικού Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Lindeberg–Lévy), θα χρειαστούμε το παρακάτω στοιχειώδες λήμμα.

Λήμμα 9.1 Εάν $\{z_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών, τέτοια ώστε $z_n \to z \in \mathbb{C}$, καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e^z, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

[3] φημολογείται ότι όταν ο Lévy παρουσίασε αποδείξεις οριακών αποτελεσμάτων, σαν τα (9.2) και (9.4), με χρήση $\chi.\sigma.$, ο Markov διαμαρτυρήθηκε έντονα ότι «αυτά είναι βρώμικα κόλπα!».

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι, εξ' ορισμού, ο e^z είναι ο μιγαδικός αριθμός που ορίζεται από την σειρά

$$e^z = 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \tag{9.5}$$

[Η (9.5) έχει ακτίνα σύγκλισης ∞, δηλαδή ο e^z είναι καλά ορισμένος σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.] Από τον τύπο του διωνύμου,

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = 1 + z_n + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z_n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(k), \tag{9.6}$$

όπου $a_n(0) = 1$, $a_n(1) = z_n$, $a_n(k) = (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \frac{z_n^k}{k!}$ για $2 \leq k \leq n$, και $a_n(k) = 0$ για $k > n$.

Προφανώς, για κάθε σταθερό k, $a_n(k) \to a(k) = z^k/k!$, καθώς $n \to \infty$. Επίσης, $|a_n(k)| \leq |z_n|^k/k! \leq M^k/k!$, όπου M ένα άνω φράγμα της $\{|z_n|,\ n \geq 1\}$, που υπάρχει (πεπερασμένο) διότι $z_n \to z$, από υπόθεση. Επομένως, $|a_n(k)| \leq \beta(k) = M^k/k!$, με $\sum_{k=0}^{\infty} \beta(k) = e^M < \infty$ (προφανώς). Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, εφαρμοζόμενο στον χώρο μέτρου $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, όπου $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$, και μ το αριθμητικό μέτρο, με $\mu(A) =$ πλήθος στοιχείων του A (πρβλ. Εφαρμογή ;;), προκύπτει ότι

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_n(k) = \lim_n \int_{\mathbb{N}} a_n(k) d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} \lim_n a_n(k) d\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} a(k) d\mu(k) = \sum_{k=0}^{\infty} a(k),$$

δηλαδή $(1 + z_n/n)^n \to e^z$. $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία απλή απόδειξη του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών για μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$.

Θεώρημα 9.2 (ασθενής νόμος μεγάλων αριθμών του Khinchine) Εάν η ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη, με $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ (και $\mathbb{E}|X_1| < \infty$), τότε

$$\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu, \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

όπου $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Απόδειξη: Βλέπουμε ότι η αποδεικτέα, $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu$, είναι ισοδύναμη με την $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{d}} \mu$, διότι η σύγκλιση κατά πιθανότητα σε σταθερά (ή εκφυλισμένη τ.μ.) ισοδυναμεί με την ασθενή σύγκλιση (βλ. Πρόταση ;; και Παρατήρηση ;;). Άρα, αρκεί να δείξουμε, λόγω του Θεωρήματος Συνεχείας των $\chi.\sigma.$, ότι

$$\text{για κάθε } t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) \to \varphi(t), \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

όπου $\varphi_n(t)$ η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. S_n/n, και $\varphi(t)$ η $\chi.\sigma.$ της εκφυλισμένης τ.μ. $X \equiv \mu$, δηλαδή $\varphi(t) = e^{it\mu}$. Από το Θεώρημα ;;(i)(γ) για $k = 1$,

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + it\mu + o(t), \quad \text{καθώς } t \to 0,$$

όπου $o(t)$ αυθαίρετη (μιγαδική) συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$\left|\frac{o(t)}{t}\right| \to 0, \quad \text{καθώς } t \to 0. \tag{9.7}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα ;;(i) και (iii),

$$\varphi_n(t) = \varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = [\varphi_{X_1}(t/n)]^n = \left(1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Για σταθερό[4] $t \neq 0$,

$$n\, o(t/n) = \frac{o(t/n)}{t/n}\, t \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

λόγω της (9.7), και συνεπώς,

$$\varphi_n(t) = \left(1 + \frac{it\mu + n\, o(t/n)}{n}\right)^n \to e^{it\mu},$$

από το Λήμμα 9.1 για $z_n = it\mu + n\, o(t/n) \to it\mu = z$. $\square$

Σημείωση 9.3 (ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ισχύ του ασθενούς νόμου) Είναι προφανές ότι η ανωτέρω απόδειξη στηρίζεται αποκλειστικά στην συμπεριφορά της $\chi.\sigma.$ $\varphi_{X_1}(t)$ κοντά στο $t = 0$, δηλαδή στο γεγονός ότι ισχύει η σχέση

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 + it\mu + o(t), \quad \text{καθώς } t \to 0.$$

Αφού $\varphi_{X_1}(0) = 1$, η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει η παράγωγος της $\varphi_{X_1}(t)$ στο σημείο $t = 0$, και μάλιστα,

$$\varphi'_{X_1}(0) = i\mu,$$

[4] Για $t = 0$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, αφού $\varphi(0) = 1$ για κάθε $\chi.\sigma.$ φ.

για κάποια σταθερά $\mu \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι όταν η μέση τιμή της X_1 υπάρχει, τότε, λόγω του Θεωρήματος ;;, η σταθερά αυτή ισούται αναγκαστικά με την μέση τιμή της X_1, δηλ. $\mu = \mathbb{E}(X_1)$. Σημειώνουμε επίσης ότι εάν μία $\chi.\sigma.$ $\varphi_{X_1}(t)$ υποτεθεί διαφορίσιμη στο σημείο $t = 0$, τότε η παράγωγος $\varphi'_{X_1}(0)$ είναι φανταστικός αριθμός, διότι

$$\begin{aligned}
\varphi'_{X_1}(0) &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_{X_1}(t)-1}{t} + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_{X_1}(-t)-1}{-t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{\varphi_{X_1}(t)-1}{2t} + \frac{\varphi_{X_1}(-t)-1}{2(-t)}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_{X_1}(t)-\varphi_{X_1}(-t)}{2t} = i\ \lim_{t\to 0}\frac{\mathbb{E}(\sin tX_1)}{t},
\end{aligned}$$

και το τελευταίο όριο είναι, προφανώς, πραγματικός αριθμός.

Στην Άσκηση ;;.8 παρουσιάστηκε ένα παράδειγμα κατά το οποίο η $\varphi'_{X_1}(0)$ υπάρχει (και είναι 0), και όμως, $\mathbb{E}|X_1| = \infty$ (και έτσι, η X_1 δεν έχει μέση τιμή). Είναι σαφές ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 9.2 (δηλ. ότι $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu$) εξακολουθεί να ισχύει και για τέτοιες τ.μ. X_1, δηλ. για τ.μ. που, ενώ δεν έχουν μέση τιμή, η $\chi.\sigma.$ $\varphi_{X_1}(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 0$. Δεδομένου ότι ο αντίστοιχος ισχυρός νόμος, $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{a.s.}} \mu$, ισχύει αν και μόνο αν $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ (βλ. Θεωρήματα ;; και ;;, ή Θεωρήματα ;; και ;;), ανακύπτουν φυσιολογικά τα εξής ενδιαφέροντα (και εξόχως δύσκολα) ερωτήματα:

(i) Για ποιες ακριβώς τ.μ. X_1 ισχύει ο ασθενής νόμος $S_n/n \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu$;

[Γνωρίζουμε ότι ισχύει για αυτές που έχουν διαφορίσιμη $\chi.\sigma.$ στο σημείο $t = 0$, αλλά το ερώτημα είναι αν υπάρχουν άλλες.]

(ii) Ποιες τ.μ. X_1 έχουν διαφορίσιμη $\chi.\sigma.$ στο σημείο $t = 0$;

Όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα, η απάντηση είναι ότι **δεν υπάρχουν άλλες.** Επομένως, ισχύει το εξής (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία των van der Vaart (1998), σελ. 15, και Révész (1968)):[5]

(A) *Για ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$, ισχύει ότι*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu \in \mathbb{R}$$

όταν και μόνο όταν *η $\chi.\sigma.$ $\varphi_{X_1}(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 0$, και $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$.*

Όσον αφορά στο δεύτερο ερώτημα, αυτό λύθηκε για πρώτη φορά (υπό κάποιες περιοριστικές υποθέσεις) από τον A. Zygmund το 1947, και στην πλήρη γενικότητα από τον E.J.G. Pitman το 1956. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έχει ως εξής (βλ. Feller (1966), σελ. 528):

(B) *Η $\chi.\sigma.$ $\varphi_{X_1}(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $t = 0$, και $\varphi'_{X_1}(0) =$*

[5] Θα ήταν άδικο να μην εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον συνάδελφο Ευστάθιο Παπαροδίτη, για τις αναφορές αυτές, αλλά και για το γεγονός ότι άρχισα να διερευνώ τι ακριβώς συμβαίνει μετά από μία σχετική συζήτηση μαζί του.

ιμ, όταν και μόνο όταν[6]

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}[X_1 I(|X_1| \le x)] = \mu, \text{ και } \lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}[|X_1| \ge x] = 0.$$

Συνδυάζοντας τα (Α) και (Β), προκύπτει ο εξής χαρακτηρισμός του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών:

(Χαρακτηρισμός ασθενούς νόμου) *Για ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$, ισχύει ότι*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mu \in \mathbb{R}$$

όταν και μόνο όταν

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbb{E}[X_1 I(|X_1| \le x)] = \mu, \text{ και } \lim_{x\to+\infty} x\mathbb{P}[|X_1| \ge x] = 0.$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί απευθείας ότι αν υπάρχει η μέση τιμή της X_1 και ισούται με $\mu \in \mathbb{R}$, τότε ικανοποιούνται οι ανωτέρω οριακές σχέσεις. Πράγματι, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης προκύπτει άμεσα ότι αν $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, τότε και

$$\mathbb{E}[X_1 I(|X_1| \le x)] \to \mu, \quad \text{καθώς } x \to +\infty.$$

Για τον ίδιο λόγο προκύπτει ότι και

$$\mathbb{E}[|X_1| I(|X_1| \ge x)] \to 0, \quad \text{καθώς } x \to +\infty,$$

[6] Παρατηρήστε ότι είναι πολύ εύκολο (σχεδόν άμεσο) να ελεγχθούν αυτές οι δύο οριακές συνθήκες στο παράδειγμα της Άσκησης ;;.8, σε αντίθεση με την διαφορισιμότητα της $\chi.\sigma.$ στο $t = 0$.

επειδή, προφανώς,

$$|X_1|I(|X_1| \geq x) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \quad \text{καθώς } x \to +\infty.$$

Όμως,

$$0 \leq xI(|X_1| \geq x) \leq |X_1|I(|X_1| \geq x),$$

και έτσι, λαμβάνοντας μέσες τιμές στην προηγούμενη ανισότητα, έχουμε ότι

$$0 \leq x\mathbb{P}[|X_1| \geq x] \leq \mathbb{E}[|X_1|I(|X_1| \geq x)] \to 0, \text{ καθώς } x \to +\infty,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to +\infty} x\mathbb{P}[|X_1| \geq x] = 0.$$

Φυσικά, το αντίστροφο δεν ισχύει. Μάλιστα, εκείνες οι τ.μ. X_1 που ικανοποιούν τις ανωτέρω οριακές συνθήκες και, ταυτόχρονα, δεν έχουν μέση τιμή, είναι ακριβώς αυτές που ικανοποιούν τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, αλλά όχι τον ισχυρό.
$\square$

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2 κατέστη προφανής η ισχύς της $\chi.\sigma.$, ως αποδεικτικό μέσον. Σχεδόν άμεση είναι και η απόδειξη του παρακάτω βασικού θεωρήματος, που στην ουσία αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Θεώρημα 9.4 (κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg–Lévy) Εάν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία μη εκφυλισμένων τ.μ., με $\mathbb{E}\left(X_1^2\right) < \infty$, $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, και

$\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 > 0$, τότε

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \quad \text{καθώς } n \to \infty, \tag{9.8}$$

όπου $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, και Z είναι η τυποποιημένη κανονική τ.μ., με σ.κ.

$$\mathbb{P}(Z \le x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Ισοδύναμες εκφράσεις της (9.8) είναι οι εξής:

$$\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)}} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \qquad \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z,$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \qquad \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mu\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0, \sigma^2),$$

όπου $\overline{X}_n = S_n/n$ ο **δειγματικός μέσος**.]

Απόδειξη: Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.2, είναι αρκετό να δείξουμε ότι η χ.σ., $\varphi_n(t)$, της $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ συγκλίνει, κατά σημείο, προς την χ.σ. $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$, της τυποποιημένης κανονικής. Επειδή όμως

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \widetilde{S}_n,$$

όπου $\widetilde{S}_n = \widetilde{X}_1 + \ldots + \widetilde{X}_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της $\{\widetilde{X}_i = (X_i - \mu)/\sigma,\ i \ge 1\}$, και $\mathbb{E}(\widetilde{X}_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\widetilde{X}_i) = 1$, αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση που $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$ (οπότε $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$) και, δυνάμει του Θεωρήματος ;;(i)(γ), έχουμε την έκφραση

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \text{καθώς } t \to 0,$$

όπου $o(t^2)$ είναι κάποια (μιγαδική) συνάρτηση, τέτοια ώστε $|o(t^2)/t^2| \to 0$, καθώς $t \to 0$. Τότε όμως, για σταθερό $t \neq 0$, έχουμε από το Λήμμα 9.1 ότι

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \varphi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \left[\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \\
&= \left(1 + \frac{-t^2/2 + n\,o(t^2/n)}{n}\right)^n \to e^{-t^2/2}, \quad \text{καθώς } n \to \infty,
\end{aligned}$$

διότι $y_n = t/\sqrt{n} \to 0$, $y_n \neq 0$, και συνεπώς,

$$n\,o(t^2/n) = \frac{o(t^2/n)}{t^2/n}\,t^2 = \frac{o\left((t/\sqrt{n})^2\right)}{(t/\sqrt{n})^2}\,t^2 = \frac{o\left(y_n^2\right)}{y_n^2}\,t^2 \to 0, \ \text{καθώς } n \to \infty,$$

που σημαίνει ότι και $z_n = -t^2/2 + n\,o(t^2/n) \to -t^2/2 = z$.
□

Πόρισμα 9.5 Υπό τις ίδιες συνθήκες (του Θεωρήματος 9.4),

$$\sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Απόδειξη: Είναι άμεση από το Θεώρημα 9.4 και το Θεώρημα Pólya (βλ. Άσκηση ;;.5), επειδή η Φ είναι συνεχής σ.κ. □

Πολλές φορές ισχυροποιείται και επεκτείνεται η εφαρμοσιμότητα του κλασικού Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Θεώρημα 9.4), όταν χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με την επόμενη, πολύ χρήσιμη, πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως Θεώρημα Slutsky.

Πρόταση 9.6 (Θεώρημα Slutsky) Ας υποθέσουμε ότι $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ και $Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, σταθερά. [Οι X_n και Y_n μπορεί να έχουν **οποιαδήποτε** σχέση μεταξύ τους.] Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X + c$,

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} cX$,

(iii) $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X/c$, εφόσον $c \neq 0$.

Απόδειξη: Έστω F_n, F οι σ.κ. των X_n, X.
(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
F_{X_n+Y_n}(t) &= \mathbb{P}\left(X_n + Y_n \le t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_n + Y_n \le t,\ |Y_n - c| \le \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n + Y_n \le t,\ |Y_n - c| > \varepsilon\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(X_n + Y_n \le t,\ c - \varepsilon \le Y_n \le c + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - c| > \varepsilon\right) \\
&\le F_n(t - c + \varepsilon) + \mathbb{P}\left(|Y_n - c| > \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Παρόμοια,

$$\begin{aligned}
F_n(t-c-\varepsilon) &= \mathbb{P}\left(X_n \le t-c-\varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_n \le t-c-\varepsilon,\ |Y_n-c| \le \varepsilon\right) \\
&\qquad + \mathbb{P}\left(X_n \le t-c-\varepsilon,\ |Y_n-c| > \varepsilon\right) \\
&\le \mathbb{P}\left(X_n+Y_n \le t\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n-c| > \varepsilon\right) \\
&= F_{X_n+Y_n}(t) + \mathbb{P}\left(|Y_n-c| > \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Επομένως, για τυχόν $\varepsilon > 0$,

$$F_n(t-c-\varepsilon) - \mathbb{P}\left(|Y_n-c| > \varepsilon\right) \le F_{X_n+Y_n}(t) \le F_n(t-c+\varepsilon) + \mathbb{P}\left(|Y_n-c| > \varepsilon\right). \tag{9.9}$$

Αφού μία σ.κ. F είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus N$, όπου N είναι ένα (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο, μπορούμε να βρούμε αυθαίρετα[7] μικρό $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε τα $t-c-\varepsilon$ και $t-c+\varepsilon$ να είναι (και τα δύο) σημεία συνεχείας της F. Από την (9.9) έχουμε τότε ότι για κάθε τέτοιο σταθερό $\varepsilon > 0$,

$$F(t-c-\varepsilon) \le \liminf_n F_{X_n+Y_n}(t) \le \limsup_n F_{X_n+Y_n}(t) \le F(t-c+\varepsilon).$$

[7] Μία φορμαλιστική απόδειξη αυτής της παρατήρησης μπορεί να δοθεί ως εξής: Έστω $\delta > 0$ (αυθαίρετα μικρό), και ας θεωρήσουμε τα ανοικτά διαστήματα $I_1 = (t-c-\delta,\ t-c)$, $I_2 = (t-c,\ t-c+\delta)$, τα αριθμήσιμα σύνολα $N_1 = N \cap I_1$ και $N_2 = N \cap I_2$, καθώς και τα αριθμήσιμα σύνολα $N_1' = \{2(t-c)-x,\ x \in N_2\} \subset I_1$, και $N_2' = \{2(t-c)-x,\ x \in N_1\} \subset I_2$. Είναι σαφές ότι η συνάρτηση $g : I_1 \longrightarrow I_2$, με $g(x) = 2(t-c)-x$, $x \in I_1$, είναι ένα προς ένα και επί (αμφιμονοσήμαντη) από το I_1 στο I_2, αλλά και από το $N_1 \cup N_1'$ στο $N_2 \cup N_2'$. Προφανώς το $N_1 \cup N_1'$ είναι αριθμήσιμο, και συνεπώς, υπάρχουν σημεία $x \in I_1 \setminus (N_1 \cup N_1')$, αφού το I_1 είναι υπεραριθμήσιμο. Για κάθε τέτοιο x, το σημείο $g(x) = 2(t-c)-x$ ανήκει, από κατασκευή, στο $I_2 \setminus (N_2 \cup N_2')$. Συνεπώς, μπορούμε να εκλέξουμε $\varepsilon = t-c-x$, όπου x ως ανωτέρω.

Συνεπώς, παίρνοντας όρια για $\varepsilon \searrow 0$, από τιμές του $\varepsilon > 0$ για τις οποίες τα σημεία $t - c \pm \varepsilon$ είναι σημεία συνεχείας της F, προκύπτει ότι

$$F_{X_n+Y_n}(t) \to F(t-c) = \mathbb{P}[X \le t-c] = \mathbb{P}[X+c \le t], \text{ καθώς } n \to \infty,$$

όταν το $t-c$ είναι σημείο συνεχείας της F. Η αποδεικτέα προκύπτει από την παρατήρηση ότι το $t-c$ είναι σημείο συνεχείας της F αν και μόνο αν το t είναι σημείο συνεχείας της F_{c+X}.

(ii) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $c = 0$. Τότε, για $\varepsilon > 0$, $a > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_nY_n| \ge \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_nY_n| \ge \varepsilon,\ |Y_n| < a) + \mathbb{P}(|X_nY_n| \ge \varepsilon,\ |Y_n| \ge a) \\
&\le \mathbb{P}\Big(|X_n| > \frac{\varepsilon}{a}\Big) + \mathbb{P}(|Y_n| \ge a) \\
&\le F_n\Big(-\frac{\varepsilon}{a}\Big) + 1 - F_n\Big(\frac{\varepsilon}{a}\Big) + \mathbb{P}(|Y_n| \ge a).
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$, και εκλέγοντας $a > 0$ τέτοιο ώστε τα $\pm\varepsilon/a$ να είναι σημεία συνεχείας της F,

$$\limsup_n \mathbb{P}(|X_nY_n| \ge \varepsilon) \le F\Big(-\frac{\varepsilon}{a}\Big) + 1 - F\Big(\frac{\varepsilon}{a}\Big) \to 0, \text{ καθώς } a \searrow 0,$$

δηλαδή, $\mathbb{P}(|X_nY_n| \ge \varepsilon) \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Άρα, $X_nY_n \xrightarrow{\mathbf{p}} 0$, δηλαδή $X_nY_n \xrightarrow{\mathbf{d}} 0 = 0 \cdot X$.

Στην γενική περίπτωση όπου $Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} c$, έπεται εύκολα ότι $Y_n - c \xrightarrow{\mathbf{d}} 0$. Άρα, από το αποτέλεσμα που μόλις αποδείξαμε,

$$X_nY_n - cX_n = X_n(Y_n - c) \xrightarrow{\mathbf{d}} 0.$$

Όμως, προφανώς, $cX_n \xrightarrow{\mathbf{d}} cX$ (γιατί;), και από το (i),

$$X_nY_n = X_n(Y_n - c) + cX_n \xrightarrow{\mathbf{d}} 0 + cX = cX.$$

(iii) Από το (ii), και το γεγονός ότι $1/Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} 1/c$ (διότι η συνάρτηση $x \mapsto 1/x$ είναι συνεχής στο $x = c \neq 0$), έπεται ότι

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{1}{Y_n}X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \frac{1}{c}X = \frac{X}{c}. \quad \square$$

Στην απόδειξη της Πρότασης 9.6 χρησιμοποιήθηκε η εξής χρήσιμη ιδιότητα, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη (βλ. Άσκηση 9.1):

Εάν η $g(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x = c$, και $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, σταθερά, τότε και $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} g(c)$.

[Η g υποτίθεται μετρήσιμη φυσικά, έτσι ώστε οι $g(X_n)$ να είναι τ.μ.]

Το ίδιο αποτέλεσμα θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο θεώρημα, που είναι ένα παράδειγμα της μεθόδου **Delta**.

Θεώρημα 9.7 (μέθοδος Delta) Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι **ασυμπτωτικά κανονική** $N(\mu, \sigma_n^2)$, δηλαδή υπάρχει ακολουθία σ_n, $0 < \sigma_n < \infty$, τέτοια ώστε

$$\frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1), \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Θεωρούμε τυχούσα Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο σημείο $x = \mu$, με παράγωγο $g'(\mu) \neq 0$.

Αν ισχύει ότι $\sigma_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, τότε η ακολουθία $\{g(X_n),\ n \geq 1\}$ είναι ασυμπτωτικά κανονική $N\big(g(\mu), \sigma_n^2 (g'(\mu))^2\big)$, δηλαδή,

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{\sigma_n |g'(\mu)|} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1), \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(\mu)}{x - \mu} - g'(\mu), & \text{αν } x \neq \mu, \\ 0, & \text{αν } x = \mu. \end{cases}$$

Η h είναι συνεχής στο μ διότι η g είναι παραγωγίσιμη στο μ. Επειδή $\sigma_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \mu$ (Άσκηση 9.2). Όμως, από την συνέχεια της h στο μ, συμπεραίνουμε ότι (Άσκηση 9.1) $h(X_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} h(\mu) = 0$, και έτσι,

$$h(X_n) \frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} 0,$$

από το Θεώρημα του Slutsky, Πρόταση 9.6(ii). Συνεπώς,[8]

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{\sigma_n} - g'(\mu) \frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} 0,$$

και, αφού $g'(\mu) \neq 0$, έπεται ότι

$$\frac{g(X_n) - g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} - \frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} 0.$$

---

[8]παρατηρήστε ότι η ισότητα $h(x)(x-\mu)/\sigma_n = (g(x) - g(\mu))/\sigma_n - g'(\mu)(x-\mu)/\sigma_n$ ισχύει και για $x = \mu$, αφού και τα δύο μέλη μηδενίζονται.

Επειδή $(X_n - \mu)/\sigma_n \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1)$ (από υπόθεση), προκύπτει, από την Πρόταση 9.6(i), ότι

$$\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} = \frac{X_n-\mu}{\sigma_n} + \left(\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} - \frac{X_n-\mu}{\sigma_n}\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1).$$

Επομένως, ισχύει και η

$$-\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n g'(\mu)} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1).$$

Τελικά,

$$\frac{g(X_n)-g(\mu)}{\sigma_n |g'(\mu)|} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1),$$

δηλαδή η $g(X_n)$ είναι ασυμπτωτικά κανονική $N\big(g(\mu), \sigma_n^2 (g'(\mu))^2\big)$.

$\square$

Παρατήρηση 9.8 Στο προηγούμενο θεώρημα **δεν υποθέσαμε** ότι $\mathbb{E}(X_n) = \mu$, ούτε ότι $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$. Η ασυμπτωτική κανονικότητα της $g(X_n)$ συμπεραίνεται χωρίς να χρειάζεται καν η ύπαρξη της $\mathbb{E}[g(X_n)]$, η οποία, ακόμα και αν υπάρχει, δεν απαιτείται να ισούται με (ή να συγκλίνει στο) $g(\mu)$.

Πόρισμα 9.9 Εάν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, τότε για οποιαδήποτε (Borel μετρήσιμη) συνάρτηση $g(x)$, διαφορίσιμη στο $x = \mu$, με $g'(\mu) \neq 0$, ισχύει ότι

$$\frac{\sqrt{n}\ (g(\overline{X}_n) - g(\mu))}{\sigma |g'(\mu)|} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1),$$

όπου $\overline{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 9.4,

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1),$$

άρα η $\overline{X}_n$ είναι ασυμπτωτικά κανονική $N(\mu, \sigma^2/n)$. Επειδή $\sigma_n = \sigma/\sqrt{n} \to 0$, καθώς $n \to \infty$, και $0 < \sigma/\sqrt{n} < \infty$, το Θεώρημα 9.7 εφαρμόζεται για την $g(\overline{X}_n)$. $\square$

Εφαρμογή 9.10 Εάν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, τότε το Πόρισμα 9.9 μας εξασφαλίζει ότι

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\mu}\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}\right), \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

εφ΄ όσον, φυσικά, $\mu \neq 0$. Όταν $\mu \neq 0$, το αποτέλεσμα αυτό ισχύει **πάντα**, ακόμα και όταν $\mathbb{E}\left|\frac{1}{\overline{X}_n}\right| = \infty$, οπότε η $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right)$ δεν υπάρχει. Σημειώνεται ότι αυτό συμβαίνει συχνά στην πράξη. Δίνουμε δύο παραδείγματα συγκεκριμένων κατανομών, στις οποίες εφαρμόζεται το αποτέλεσμα αυτό.

(i) Αν οι X_j ακολουθούν εκθετική κατανομή με πυκνότητα $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, τότε, ως συνήθως, ο δειγματικός μέσος $\overline{X}_n$ είναι μία «καλή» εκτιμήτρια της μέσης τιμής της κατανομής, $\mathbb{E}(X_j) = 1/\lambda$. Επομένως, μία προφανής εκτιμήτρια της παραμέτρου λ θα ήταν η στατιστική συνάρτηση $1/\overline{X}_n$. Η μέθοδος

Delta μας εξασφαλίζει ότι

$$Y_n = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1),$$

διότι $\mu = \mathbb{E}(X_j) = 1/\lambda$, και $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_j - 1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2$.

(ii) Σε ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli(p) με p άγνωστο, η «λογική» εκτιμήτρια της παραμέτρου[9] $1/p$ θα ήταν η $1/\overline{X}_n$. Επειδή $\mathbb{P}(\overline{X}_n = 0) = (1-p)^n > 0$ για κάθε n, είναι σαφές ότι $\mathbb{E}(1/\overline{X}_n) = +\infty$. [Μάλιστα, η $1/\overline{X}_n$ είναι εκτεταμένη τ.μ., αφού λαμβάνει την τιμή $+\infty$ με θετική πιθανότητα.] Πάντως, η εκτίμηση της παραμέτρου $1/p$ γίνεται χωρίς δυσκολία, αφού, στο παράδειγμα αυτό, $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$, και έτσι,

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{p}\right) \xrightarrow{\mathbf{d}} N\left(0, \frac{1-p}{p^3}\right), \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Είναι σαφές ότι υπάρχουν πολλές στατιστικές εφαρμογές στις οποίες φαίνεται χρήσιμη η μέθοδος Delta, ή παραλλαγές αυτής. □

Είναι, επίσης, ενδιαφέρον το γεγονός ότι από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε σύγκλιση των αντιστοίχων ροπών. Πράγματι, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.[10]

[9] Αξίζει να σημειωθεί ότι, για οποιαδήποτε τιμή του δειγματικού μεγέθους n (οσοδήποτε μεγάλη), δεν υπάρχει αμερόληπτη εκτιμήτρια για το $1/p$, δηλ. Borel συνάρτηση $T_n = T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, που δεν εξαρτάται από το p, τέτοια ώστε $\mathbb{E}(T_n) = 1/p$ για κάθε $p \in (0,1)$.

[10] Για την απόδειξη του Θεωρήματος 9.11 βλ. Gut (1988), σελ. 18. Στην ουσία αποδεικνύεται ότι η ακολουθία $\{|S_n/\sqrt{n}|^r,\ n \geq 1\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει

Θεώρημα 9.11 Εάν η $\{X_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{E}(X_1) = 0$, και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$, και εάν $\mathbb{E}|X_1|^r < \infty$ για κάποιο $r \geq 2$, τότε για κάθε p, με $0 < p \leq r$, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right|^p \to \sigma^p \mathbb{E}|Z|^p, \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

όπου $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, και Z η τυποποιημένη κανονική τ.μ.[11]

9.3 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Feller

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε μία από τις πιο γενικές μορφές του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για ανεξάρτητες τ.μ., και συγκεκριμένα, το **Θεώρημα των Lindeberg–Feller**, που αφορά σε **τριγωνικές ακολουθίες** ανεξαρτήτων τ.μ., της μορφής

$$X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}, \tag{9.10}$$

όπου οι $\{X_{nj},\ 1 \leq j \leq k_n\}$ είναι ανεξάρτητες, με σ.κ. $\{F_{nj},\ 1 \leq j \leq k_n\}$.

Εδώ μας ενδιαφέρει η οριακή κατανομή των αθροισμάτων $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}$, καθώς $n \to \infty$. Τα «κλασικά» μερικά

από το Θεώρημα Ομοιόμορφης Ολοκληρωσιμότητας και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

[11] Ως γνωστόν, $\mathbb{E}|Z|^p = 2^{p/2}\Gamma((p+1)/2)/\sqrt{\pi}$, $p > 0$, όπως προκύπτει (από τον τύπο αφηρημένου μαθηματικού) με απευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος $\sqrt{2/\pi}\int_0^{+\infty} z^p\ e^{-z^2/2}\ dz$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $z^2/2 = t$. Εδώ, $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}dt$ είναι η συνάρτηση Γάμμα του Euler.

αθροίσματα, $X_1 + \ldots + X_n$, προκύπτουν από την (9.10), για $k_n = n$, και $X_{nj} = X_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Στις τριγωνικές ακολουθίες «επιτρέπεται» να αλλάζει η σ.κ. καθώς μεταβάλλεται το n, και γι΄ αυτό γράφουμε F_{nj} και X_{nj}, αντί F_j και X_j.

Το επόμενο απλό λήμμα θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος.

Λήμμα 9.12 Εάν $z_1, z_2, \ldots, z_m$ και $w_1, w_2, \ldots, w_m$ είναι τυχόντες μιγαδικοί αριθμοί, με $|z_j| \le 1$ και $|w_j| \le 1$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$, τότε

$$|w_1 w_2 \cdots w_m - z_1 z_2 \cdots z_m| \le \sum_{j=1}^{m} |w_j - z_j|.$$

Απόδειξη: Η αποδεικτέα καθίσταται προφανώς ισότητα για $m = 1$. Η γενική περίπτωση προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο m, αφού για $m \ge 2$,

$$w_1 w_2 \cdots w_m - z_1 z_2 \cdots z_m = (w_1 - z_1)(z_2 \cdots z_m) + w_1(w_2 \cdots w_m - z_2 \cdots z_m). \quad \Box$$

Υποθέτουμε τώρα ότι για την τριγωνική ακολουθία τ.μ. (9.10) ικανοποιούνται τα παρακάτω:

$$\mathbb{E}(X_{nj}) = 0, \quad \sigma_{nj}^2 = \mathbb{E}(X_{nj}^2) < \infty, \quad s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 > 0. \tag{9.11}$$

Φυσικά, η συνθήκη $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$ δεν βλάπτει τη γενικότητα, αφού μπορούμε να θεωρούμε τις τ.μ. $X_{nj} - \mu_{nj}$, όπου $\mu_{nj} = \mathbb{E}(X_{nj})$. Θα λέμε ότι η τριγωνική ακολουθία (9.10) ικανοποιεί την **συνθήκη του Lindeberg**, εάν ισχύει το εξής:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}\big[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)\big] = 0. \tag{9.12}$$

Αποδεικνύεται ότι η συνθήκη (9.12) είναι η πιο κατάλληλη για να εξασφαλίσει σύγκλιση των τυποποιημένων μερικών αθροισμάτων[12] S_n/s_n προς την τυποποιημένη κανονική. Για παράδειγμα, η (9.12) ικανοποιείται στην κλασική περίπτωση μίας ακολουθίας $\{X_j,\ j \ge 1\}$, ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X_j = X_{nj}$ (θέτοντας $k_n = n$), όταν $\mathbb{E}(X_j) = 0$ και $\mathbb{E}(X_j^2) = \sigma^2$, με $0 < \sigma < \infty$, διότι, τότε, $s_n^2 = n\sigma^2 > 0$, και

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}\big[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)\big] &= \frac{1}{n\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\big[X_j^2 I(|X_j| \ge \varepsilon\sigma\sqrt{n})\big] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}\big[X_1^2 I(|X_1| \ge \varepsilon\sigma\sqrt{n})\big] \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty,\end{aligned}$$

αφού, προφανώς, $Y_n = X_1^2 I(|X_1| \ge \varepsilon\sigma\sqrt{n}) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, καθώς $n \to \infty$, και $|Y_n| \le X_1^2$, με $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.

Η (9.12) μας εξασφαλίζει ότι καθεμία από τις τ.μ. X_{nj}, $j =$

[12]παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με την (9.11), $\mathrm{Var}(S_n) = s_n^2$ και $\mathbb{E}(S_n) = 0$, οπότε οι τ.μ. S_n/s_n έχουν μέσο 0 και διασπορά 1. Δηλ., οι S_n/s_n είναι τα τυποποιημένα μερικά αθροίσματα της n-οστής γραμμής της τριγωνικής ακολουθίας (9.10).

$1, 2, \ldots, k_n$, έχει «αμελητέα συμβολή» στο συνολικό άθροισμα $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}$. Για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι, ομοιόμορφα ως προς j, η διασπορά, σ^2_{nj}, της X_{nj} είναι αμελητέα ως προς την συνολική διασπορά, s^2_n, της S_n.

Πρόταση 9.13 Εάν η συνθήκη του Lindeberg, (9.12), ικανοποιείται, τότε ισχύει και η παρακάτω συνθήκη **ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών**:

$$\frac{1}{s^2_n} \max_{1 \le j \le k_n} \sigma^2_{nj} \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Απόδειξη: Προφανώς για τυχόν $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\sigma^2_{nj} = \mathbb{E}(X^2_{nj}) &= \mathbb{E}[X^2_{nj} I(|X_{nj}| < \varepsilon s_n)] + \mathbb{E}[X^2_{nj} I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)] \\ &\le \varepsilon^2 s^2_n + \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X^2_{nj} I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)].\end{aligned}$$

Επειδή το άνω φράγμα της παραπάνω σχέσης είναι ανεξάρτητο του $j \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$, έπεται ότι και

$$\max_{1 \le j \le k_n} \sigma^2_{nj} \le \varepsilon^2 s^2_n + \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X^2_{nj} I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)],$$

και συνεπώς,

$$\frac{1}{s^2_n} \max_{1 \le j \le k_n} \sigma^2_{nj} \le \varepsilon^2 + \frac{1}{s^2_n} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X^2_{nj} I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)] \to \varepsilon^2, \ \text{καθώς } n \to \infty,$$

λόγω της (9.12). Το συμπέρασμα έπεται άμεσα επειδή το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο. $\square$

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω στοιχειώδες λήμμα.

Λήμμα 9.14 Εάν $-1/2 \le x \le 1/2$, τότε $|e^x - 1 - x| \le x^2$.

Απόδειξη: Είναι

$$\begin{aligned} |e^x - 1 - x| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k+2)!} |x|^k \le \frac{1}{2} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{1-|x|} \le x^2, \end{aligned}$$

αφού $2(1-|x|) \ge 1$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, και συγκεκριμένα, το **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Feller** για τριγωνικές ακολουθίες τ.μ. Σημειώνεται ότι θα αποδείξουμε μόνο το ευθύ (που οφείλεται στον Lindeberg), και, απλώς, θα διατυπώσουμε το αντίστροφο (του Feller).

Θεώρημα 9.15 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Feller για τριγωνικές ακολουθίες)

(α) Εάν η τριγωνική ακολουθία (9.10) ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg, (9.12), και τις συνθήκες (9.11), τότε

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \quad \text{καθώς } n \to \infty, \tag{9.13}$$

όπου $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}$, και Z η τυποποιημένη κανονική τ.μ., με σ.κ. $\Phi(x)$. [Θεώρημα του Lindeberg.]

(β) Έστω ότι η τριγωνική ακολουθία (9.10) ικανοποιεί τις συνθήκες (9.11) και, επιπλέον, την συνθήκη:[13]

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \ \max_{1\le j\le k_n} \mathbb{P}\left[\frac{|X_{nj}|}{s_n} \ge \varepsilon\right] \to 0, \ \text{καθώς } n \to \infty. \tag{9.14}$$

Τότε, αν $S_n/s_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$ (όπου $S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}$), έπεται ότι η τριγωνική ακολουθία ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg, (9.12). [Θεώρημα του Feller.]

Απόδειξη: Για το (β) ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Billingsley (1986), σελ. 374. Ας σημειωθεί ότι, ουσιαστικά, το (β) είναι το αντίστροφο του (α), όταν υποθέσουμε επιπλέον την (9.14). Η (9.14) όμως ικανοποιείται από οποιαδήποτε ακολουθία που ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg, διότι, λόγω της Πρότασης 9.13,

$$\frac{1}{s_n^2} \max_{1\le j\le k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως, από την ανισότητα Chebychev,

$$\mathbb{P}\left[\frac{|X_{nj}|}{s_n} \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma_{nj}^2}{s_n^2},$$

και συνεπώς,

$$\max_{1\le j\le k_n} \mathbb{P}\left[\frac{|X_{nj}|}{s_n} \ge \varepsilon\right] \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{s_n^2} \max_{1\le j\le k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0, \ \text{καθώς } n \to \infty.$$

Η (9.14) επιδέχεται την ερμηνεία ότι κάθε μεμονωμένος προσθετέος, X_{nj}, συμβάλλει «πολύ λίγο» στο συνολικό άθροισμα,

[13] Η (9.14) είναι γνωστή ως infinite smallness, δηλαδή απειροστή μικρότης, στην βιβλιογραφία.

$S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$ (για μεγάλα n), έτσι ώστε το S_n να αποτελείται ουσιαστικά από «πολλούς αμελητέους ανεξάρτητους προσθετέους».[14]

Αποδεικνύουμε τώρα το (α). Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι

$$\frac{S_n}{s_n} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{X_{nj}}{s_n} = \sum_{j=1}^{k_n} \widetilde{X}_{nj} = \widetilde{S}_n,$$

όπου η $\{\widetilde{X}_{nj} = X_{nj}/s_n,\ 1 \le j \le k_n,\ n \ge 1\}$ είναι μία νέα τριγωνική ακολουθία, με $\mathbb{E}(\widetilde{X}_{nj}) = 0$, $\mathrm{Var}(\widetilde{X}_{nj}) = (\widetilde{\sigma}_{nj})^2 = \sigma_{nj}^2/s_n^2$, και $(\widetilde{s}_n)^2 = \sum_{j=1}^{k_n}(\widetilde{\sigma}_{nj})^2 = 1$, από τον ορισμό του s_n. Άρα, η συνθήκη του Lindeberg,

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0,\ \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}\left[\frac{X_{nj}^2}{s_n^2} I(|X_{nj}| \ge \varepsilon s_n)\right] \to 0,\ \text{καθώς } n \to \infty,$$

γράφεται ισοδύναμα, θέτοντας $X_{nj} = s_n \widetilde{X}_{nj}$, ως εξής:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0,\ \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[(\widetilde{X}_{nj})^2 I(|\widetilde{X}_{nj}| \ge \varepsilon)] \to 0,\ \text{καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως, η συνθήκη του Lindeberg ικανοποιείται και για την τριγωνική ακολουθία $\{\widetilde{X}_{nj},\ j = 1, \ldots, k_n,\ n \ge 1\}$ (αφού $\widetilde{s}_n = 1$), και συνεπώς, αν αποδείξουμε το θεώρημα για τις τριγωνικές ακολουθίες με $s_n = 1$, θα έχουμε ότι

$$\widetilde{S}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z,$$

δηλαδή $S_n/s_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$, αφού $\widetilde{S}_n = S_n/s_n$.

[14] *Το σύνολο είναι άθροισμα πολλών ανεξαρτήτων λεπτομερειών.*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν, και δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει τις (9.11), περιοριζόμαστε στις τριγωνικές ακολουθίες $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n,\ n \ge 1\}$, για τις οποίες η n-οστή γραμμή περιέχει τις ανεξάρτητες τ.μ. $X_{nj},\ 1 \le j \le k_n$, με $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$ και $\mathrm{Var}(X_{nj}) = \mathbb{E}(X_{nj}^2) = \sigma_{nj}^2 < \infty$ για κάθε n και j, και $s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = 1$ για κάθε n. Υποθέτουμε, επίσης, ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Lindeberg, δηλαδή:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon)] = 0. \quad (9.15)$$

[Φυσικά οι (9.12) και (9.15) μας λένε το ίδιο πράγμα, αφού έχουμε δεχθεί την (9.12) με $s_n = 1$.] Το συμπέρασμα ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών, της Πρότασης 9.13, λαμβάνει τώρα την μορφή

$$\max_{1\le j\le k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty. \quad (9.16)$$

Από την (;;) για $k = 2$ (βλ. και (;;) για $k = 2$), προκύπτει η ανισότητα

$$\left| e^{itx} - 1 - itx + \frac{1}{2} t^2 x^2 \right| \le t^2 x^2. \quad (9.17)$$

Χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και την (;;) για $k = 2$, και επειδή, προφανώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_0^x (x-y)^2 e^{iy} dy \right| = \left| \int_0^x u^2 e^{i(x-u)} du \right| \le \int_0^{|x|} u^2 du = \frac{|x|^3}{3},$$

συνάγουμε και την ανισότητα

$$\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{1}{2}t^2x^2\right| = \left|\frac{i^3}{2!}\int_0^{tx}(tx-y)^2 e^{iy}dy\right| \le \frac{1}{6}|t|^3|x|^3. \tag{9.18}$$

Έστω φ_{nj} η $\chi.\sigma.$ της X_{nj}. Όμως υποθέσαμε ότι για κάθε n και j, $\mathbb{E}(X_{nj}) = 0$, και $\mathrm{Var}(X_{nj}) = \mathbb{E}(X_{nj}^2) = \sigma_{nj}^2$, και έτσι, από τις (9.17) και (9.18), προκύπτει το άνω φράγμα[15]

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| &= \left|\mathbb{E}\left(e^{itX_{nj}} - 1 - itX_{nj} + \frac{1}{2}t^2X_{nj}^2\right)\right| \\ &\le \mathbb{E}\left|e^{itX_{nj}} - 1 - itX_{nj} + \frac{1}{2}t^2X_{nj}^2\right| \\ &\le \mathbb{E}\left[\min\left\{t^2X_{nj}^2,\ \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3\right\}\right].\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για τυχόν $\varepsilon > 0$ (αυθαίρετα μικρό),

$$\begin{aligned}\min\left\{t^2X_{nj}^2,\ \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3\right\} &\le t^2X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon) + \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3 I(|X_{nj}| < \varepsilon) \\ &\le t^2X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3X_{nj}^2 I(|X_{nj}| < \varepsilon) \\ &\le t^2X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3X_{nj}^2,\end{aligned}$$

και συνεπώς,

$$\mathbb{E}\left[\min\left\{t^2X_{nj}^2,\ \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3\right\}\right] \le t^2\,\mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \ge \varepsilon)] + \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3\sigma_{nj}^2.$$

[15] Σημειώνεται ότι ισχύει η προφανής ανισότητα $\min\{t^2X_{nj}^2,\ \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3\} \le t^2X_{nj}^2$, και συνεπώς, $\mathbb{E}\Big[\min\{t^2X_{nj}^2,\ \frac{1}{6}|t|^3|X_{nj}|^3\}\Big] \le t^2\sigma_{nj}^2 < \infty$, οπότε το άνω φράγμα είναι πεπερασμένο. Βασικά, όπως θα φανεί στην συνέχεια της απόδειξης, χρειαζόμαστε τον όρο X_{nj}^2 όταν το $|X_{nj}|$ είναι «μεγάλο», αλλά για «μικρά» $|X_{nj}|$ είναι προτιμότερος ο όρος $|X_{nj}|^3$.

Έχουμε τελικά

$$\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \leq t^2\,\mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \varepsilon)] + \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3\sigma_{nj}^2,$$

και αθροίζοντας για $j = 1, 2, \ldots, k_n$,

$$\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \leq t^2\sum_{j=1}^{k_n}\mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \varepsilon)] + \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3. \tag{9.19}$$

[Χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^2 = 1$.]

Λόγω της (9.19) και της συνθήκης του Lindeberg, (9.15), έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \leq \frac{1}{6}\varepsilon|t|^3,$$

και επειδή το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (αυθαίρετο αλλά σταθερό),

$$\sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty. \tag{9.20}$$

Προφανώς, λόγω ανεξαρτησίας, προκύπτει η έκφραση

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{nj}(t),$$

για την $\chi.\sigma.$ της S_n. Επίσης, αφού $s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^2 = 1$, έχουμε την έκφραση

$$\varphi_Z(t) = e^{-t^2/2} = \prod_{j=1}^{k_n}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right),$$

για την $\chi.\sigma.$ της τυποποιημένης κανονικής Z.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εκφράσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{S_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| &= \left|\varphi_{S_n}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right) + \prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right) - e^{-t^2/2}\right| \\ &\le \left|\varphi_{S_n}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| + \left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right) - e^{-t^2/2}\right| \\ &= \left|\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{n_j}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \\ &\quad + \left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right) - \prod_{j=1}^{k_n}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left|\varphi_{S_n}(t) - e^{-t^2/2}\right| \le A_n + B_n,$$

όπου

$$A_n = \left|\prod_{j=1}^{k_n}\varphi_{n_j}(t) - \prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|,$$

$$B_n = \left|\prod_{j=1}^{k_n}\left(1 - \frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right) - \prod_{j=1}^{k_n}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|.$$

Η απόδειξη θα είναι πλήρης αν δείξουμε ότι για σταθερό $t \in \mathbb{R}$, $A_n \to 0$, και $B_n \to 0$, αφού, τότε, $\varphi_{S_n}(t) \to e^{-t^2/2}$, που είναι η $\chi.\sigma.$ της τυποποιημένης κανονικής, και το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα Συνεχείας των $\chi.\sigma.$ Οι οριακές αυτές σχέσεις αποδεικνύονται ως εξής:

[Απόδειξη της $A_n \to 0$.] Λόγω της (9.16) μπορούμε να εκλέξουμε n_0 αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε για $n \ge n_0$, να ισχύει ότι $|1-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2|\le 1$, για όλα τα $j=1,2,\ldots,k_n$ (και για όλα τα $n\ge n_0$). Τότε, από το Λήμμα 9.12 (αφού, προφανώς, και $|\varphi_{nj}(t)|\le 1$ για κάθε n και j), προκύπτει ότι

$$A_n \le \sum_{j=1}^{k_n}\left|\varphi_{nj}(t)-\left(1-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right| \to 0, \quad \text{καθώς } n\to\infty,$$

λόγω της (9.20).

[Απόδειξη της $B_n\to 0$.] Εκλέγουμε n_0 όπως παραπάνω, έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα $|1-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2|\le 1$, για όλα τα $j=1,2,\ldots,k_n$, και για όλα τα $n\ge n_0$. Αφού, προφανώς, ισχύει και η ανισότητα $\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|=\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\le 1$, για όλα τα n και $j\in\{1,2,\ldots,k_n\}$, προκύπτει, λόγω και πάλι του Λήμματος 9.12, ότι για $n\ge n_0$,

$$B_n \le \sum_{j=1}^{k_n}\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)-\left(1-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|. \qquad (9.21)$$

Μπορούμε όμως να επιλέξουμε ένα (ακόμη μεγαλύτερο, αν χρειαστεί) n_0, τέτοιο ώστε για κάθε $n\ge n_0$, και για όλα τα $j\in\{1,2,\ldots,k_n\}$, να ισχύει ότι $\left|\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right|\le 1/2$. [Αυτό είναι εφικτό επειδή $\max\limits_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}^2\to 0$, καθώς $n\to\infty$.] Τότε, λόγω του Λήμματος 9.14 (για $x=-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2$), προκύπτει ότι

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)-1-\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma_{nj}^2\right)\right|\le\frac{1}{4}t^4\sigma_{nj}^4,$$

και συνεπώς, λόγω της (9.21),

$$B_n \le \frac{1}{4}t^4 \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^4 \le \frac{1}{4}t^4 \sum_{j=1}^{k_n} \left(\sigma_{nj}^2 \max_{1\le j\le k_n} \sigma_{nj}^2 \right) = \frac{1}{4}t^4 \max_{1\le j\le k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0,$$

οπότε και $B_n \to 0$, και το θεώρημα αποδείχθηκε. $\Box$

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg–Feller έχει διάφορα άμεσα πορίσματα, τα οποία, στην πραγματικότητα, είναι θεωρήματα που προηγήθηκαν χρονικά. Για παράδειγμα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο είναι, ίσως, **το πλέον εύχρηστο** στις εφαρμογές.

Πόρισμα 9.16 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα του Lyapounov για τριγωνικές ακολουθίες) Υποθέτουμε ότι η τριγωνική ακολουθία $\{X_{nj},\ j = 1, 2, \ldots, k_n,\ n \ge 1\}$, όπως στην (9.10), ικανοποιεί την (9.11), και την **συνθήκη του Lyapounov**:

$$\text{Για κάποιο } \delta > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{nj}|^{2+\delta} = 0, \qquad (9.22)$$

όπου $s_n^2 = \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2$, η διασπορά της $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj}$. [Φυσικά, εδώ υποτίθεται ότι όλες οι X_{nj} έχουν πεπερασμένη ροπή τάξεως $2 + \delta > 2$.] Τότε,

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η συνθήκη του Lyapounov συνεπάγεται την συνθήκη του Lindeberg. Αυτό είναι προφανές διότι

$$X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \varepsilon s_n) \leq X_{nj}^2 \frac{|X_{nj}|^\delta}{\varepsilon^\delta s_n^\delta} I(|X_{nj}| \geq \varepsilon s_n) \leq \frac{|X_{nj}|^{2+\delta}}{\varepsilon^\delta s_n^\delta},$$

και επομένως,

$$\mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \varepsilon s_n)] \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} \frac{1}{s_n^\delta} \mathbb{E}|X_{nj}|^{2+\delta}.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \geq \varepsilon s_n)] \leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}|X_{nj}|^{2+\delta} \to 0,$$

λόγω της συνθήκης του Lyapounov. $\square$

9.4 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για Ανεξάρτητη Ακολουθία

Όπως θα έχει ίσως γίνει φανερό, οι τριγωνικές ακολουθίες περιέχουν, ως ειδική περίπτωση, τις ανεξάρτητες ακολουθίες $\{X_n,\ n \geq 1\}$, όπου $X_n \sim F_n$ (όχι κατ΄ ανάγκην ισόνομες). Πράγματι, θέτοντας $X_{nj} = X_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (δηλαδή $k_n = n$), όπου η σ.κ. της X_j είναι η F_j, έχουμε ότι το $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ είναι το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων της ακολουθίας $\{X_j,\ j \geq 1\}$, η οποία είναι ανεξάρτητη (και όχι κατ΄ ανάγκην ισόνομη). Αν $F_j \equiv F$ για κάθε j, παίρνουμε, φυσικά, την περίπτωση ανεξάρτητης και ισόνομης ακολουθίας, που μελετήθηκε στο Θεώρημα 9.4 των Lindeberg–Lévy. Για πληρότητα αναφέρουμε την μορφή του Θεωρήματος 9.15 και του Πορίσματος 9.16, στην ειδική περίπτωση μίας ανεξάρτητης ακολουθίας τ.μ.

Θεώρημα 9.17 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg–Feller για ανεξάρτητη ακολουθία) Έστω $\{X_j,\ j \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., με κατανομές $\{F_j,\ j \geq 1\}$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}(X_j) = 0$, $\mathrm{Var}(X_j) = \mathbb{E}(X_j^2) = \sigma_j^2 < \infty$, και $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 > 0$ για κάποιο n.

(α) Εάν η $\{X_j,\ j \geq 1\}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0,\ \ \frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^n \mathbb{E}\big[X_j^2 I(|X_j| \geq \varepsilon s_n)\big] \to 0,\ \ \text{καθώς } n \to \infty,$$

τότε τα τυποποιημένα αθροίσματα της ακολουθίας συγκλίνουν κατά κατανομή προς την $\Phi(x)$:

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

όπου $Z \sim \Phi(x)$, και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

(β) Αντιστρόφως, εάν $S_n/s_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$, και επιπλέον ικανοποιείται η συνθήκη απειροστής μικρότητος,

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0,\ \ \max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\left[\frac{|X_j|}{s_n} \geq \varepsilon\right] \to 0,\ \ \text{καθώς } n \to \infty,$$

τότε η $\{X_j,\ j \geq 1\}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg.

(γ) Αν, επίσης, $S_n/s_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$, και επιπλέον ικανοποιείται η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών, $\frac{1}{s_n^2}\max_{1\le j\le n}\sigma_j^2 \to 0$, τότε η ακολουθία $\{X_j,\ j\ge 1\}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Lindeberg.

Απόδειξη: Τα (α) και (β) είναι, ουσιαστικά, άμεση διασκευή του Θεωρήματος 9.15 των Lindeberg–Feller, ενώ το (γ) προκύπτει από το (β), και το γεγονός ότι η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών,

$$\frac{1}{s_n^2}\max_{1\le j\le n}\sigma_j^2 \to 0,$$

συνεπάγεται την συνθήκη απειροστής μικρότητος,

$$\text{Για κάθε } \varepsilon>0,\quad \lim_{n\to\infty}\max_{1\le j\le n}\mathbb{P}\left[\frac{|X_j|}{s_n}\ge\varepsilon\right]=0.$$

[πρβλ. στην αρχή της απόδειξης του Θεωρήματος 9.15.] □

Θεώρημα 9.18 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα του Lyapounov για ανεξάρτητη ακολουθία) Έστω $\{X_j,\ j\ge 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., τέτοια ώστε για κάθε j, $\mathbb{E}(X_j)=0$ και $\mathrm{Var}(X_j)=\sigma_j^2$. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποιο $\delta>0$, $\mathbb{E}|X_j|^{2+\delta}<\infty$ (για κάθε $j=1,2,\ldots$). Θέτουμε $S_n = X_1+\ldots+X_n$, $s_n^2=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2$, και υποθέτουμε ότι $s_n^2>0$ για κάποιο n. Τότε, η συνθήκη του Lyapounov,

$$\text{Υπάρχει } \delta>0, \text{ τέτοιο ώστε } \frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}|X_j|^{2+\delta}\to 0,\ \text{ καθώς } n\to\infty,$$

συνεπάγεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, $S_n/s_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$.

Απόδειξη: Άμεση από το αντίστοιχο θεώρημα για τριγωνικές ακολουθίες (βλ. Πόρισμα 9.16). □

Ας σημειωθεί ότι στα δύο παραπάνω θεωρήματα, η απαίτηση $s_n^2 > 0$ για κάποιο n, μας εξασφαλίζει ότι $s_n^2 > 0$ τελικά για κάθε n, αφού, προφανώς, $s_n^2 \leq s_m^2$ για $n < m$. Επίσης, η συνθήκη ασυμπτωτικά αμελητέων διασπορών, $\max_{1\leq j\leq n}\{\sigma_j^2/s_n^2\} \to 0$, μας εξασφαλίζει ότι $s_n^2 \to \infty$ καθώς $n \to \infty$. (γιατί;) Αλλά και η ασθενέστερη συνθήκη, αυτή της απειροστής μικρότητος, δηλ.

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \quad \max_{1\leq j\leq n} \mathbb{P}\left[\frac{|X_j|}{s_n} \geq \varepsilon\right] \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

μας εξασφαλίζει, επίσης, ότι $s_n^2 \to \infty$. (γιατί;)

Η συνθήκη του Lyapounov ελέγχεται, συνήθως, ευκολότερα απ' ότι αυτή του Lindeberg, ενώ εξίσου μας εξασφαλίζει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, και γι αυτό είναι πιο εύχρηστη στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δείξουμε το εξής, αρκετά γενικό, αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9.19 Έστω $\{X_j,\ j \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{E}(X_j) = 0$, και ας υποθέσουμε ότι οι τ.μ. X_j είναι **ομοιόμορφα φραγμένες**, δηλ. υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(|X_j| \leq M) = 1$ για $j = 1, 2, \ldots$, ή, ειδικότερα, $|X_j| \leq M$

για $j = 1, 2, \ldots$. Αν για το $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ισχύει ότι $s_n^2 = \mathrm{Var}(S_n) \to \infty$, καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z.$$

Απόδειξη: Φυσικά, υπάρχουν όλες οι ροπές των X_j, αφού $\mathbb{E}|X_j|^k \leq M^k < \infty$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Προφανώς,

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}|X_j|^3 \leq \frac{1}{s_n^3} \sum_{j=1}^{n} M\,\mathbb{E}(X_j^2) = \frac{M}{s_n} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

και άρα, εφαρμόζεται το Θεώρημα 9.18, αφού η συνθήκη του Lyapounov ικανοποιείται για $\delta = 1$. $\square$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι σε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα εξετάζουμε τα **τυποποιημένα** αθροίσματα, S_n/s_n, με μέσο 0 και διασπορά 1 (και φυσικά υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι δεύτερες ροπές των αρχικών τ.μ.). Σε αυτές τις περιπτώσεις (και με την υπόθεση της απειροστής μικρότητος), είδαμε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση προς την τυποποιημένη κανονική είναι η συνθήκη του Lindeberg. Εντούτοις, είναι δυνατόν να ισχύει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα χωρίς την συνθήκη του Lindeberg (ακόμα και χωρίς να υπάρχουν οι δεύτερες ροπές των υπό μελέτη τ.μ.). Φυσικά, σε αυτήν την περίπτωση, θα αναζητούσαμε **κανονικοποιούσες σταθερές** (normalizing constants), $a_n \in \mathbb{R}$, και $b_n > 0$, έτσι ώστε

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z.$$

Αυτό, βέβαια, δεν σημαίνει ότι $a_n = \mathbb{E}(S_n)$, ή ότι $b_n = \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$ (όπως είπαμε οι διασπορές μπορεί και να μην υπάρχουν!). Σχετικά είναι τα παρακάτω θεωρήματα των Feller–Lévy, και του Lévy. Για την απόδειξή τους ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στην μονογραφία των Gnedenko and Kolmogorov (1954), ή στους Chow and Teicher (1988), σελ. 305.

Θεώρημα 9.20 (Feller–Lévy) Υποθέτουμε ότι η $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n,\ n \ge 1\}$ είναι μία τριγωνική ακολουθία με ανεξάρτητες «γραμμές», δηλ. ότι για κάθε n, οι τ.μ. X_{nj}, $1 \le j \le k_n$, είναι ανεξάρτητες. Θέτουμε $S_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{nk_n}$. Τότε, υπάρχουν σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$S_n - a_n \xrightarrow{\mathbf{d}} Z,$$

και, ταυτόχρονα, επαληθεύεται η συνθήκη

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} \mathbb{P}\left(|X_{nj}| \ge \varepsilon\right) = 0,$$

αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξής δύο συνθήκες:

(i) Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}\left(|X_{nj}| \ge \varepsilon\right) = 0$.

(ii) Για κάθε $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \left\{ \mathbb{E}[X_{nj}^2 I(|X_{nj}| \le a)] - \mathbb{E}^2[X_{nj} I(|X_{nj}| \le a)] \right\} = 1$.

Θεώρημα 9.21 (Lévy) Έστω $\{X_j,\ j \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ., και $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Τότε, υπάρχουν σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$ και $b_n > 0$, τέτοιες ώστε

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z,$$

όταν και μόνο όταν ικανοποιείται η **συνθήκη του Lévy**:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{a^2 \mathbb{P}(|X_1| \geq a)}{\mathbb{E}[X_1^2 I(|X_1| \leq a)]} = 0. \qquad (9.23)$$

9.5 Ταχύτητα Σύγκλισης

Λόγω του Θεωρήματος Pólya (βλ. Άσκηση ;;.5 και Πόρισμα 9.5), όλες οι συγκλίσεις κατανομών προς την $\Phi(x)$, που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, είναι **ομοιόμορφες** ως προς $x \in \mathbb{R}$, δηλ. αν θέσουμε

$$G_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - a_n}{b_n} \leq x\right), \quad \text{και} \quad D_n \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup_x |G_n(x) - \Phi(x)|,$$

(όπου $a_n \in \mathbb{R}$, και $b_n > 0$, κατάλληλες κανονικοποιούσες σταθερές, συνήθως $a_n = \mathbb{E}(S_n)$, και $b_n = s_n = \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$, στις κλασικές περιπτώσεις), τότε ισχύει ότι[16]

$$D_n \to 0, \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

[16] Για δεδομένες τ.μ. X_1 και X_2 με κατανομές F_1 και F_2, ο αριθμός $\sup_x |F_1(x) - F_2(x)|$ ονομάζεται **απόσταση Kolmogorov** (Kolmogorov distance) των X_1 και X_2 (ή των F_1 και F_2), και συνήθως συμβολίζεται με $d_K(X_1, X_2)$ (ή και $d_K(F_1, F_2)$). Προφανώς, $d_K(X_1, X_2) \in [0, 1]$, και η d_K ορίζει μετρική στον χώρο των σ.κ., αφού $d_K(X_1, X_2) = 0$ αν και μόνο αν $X_1 \overset{\mathbf{d}}{=} X_2$, δηλ. αν και μόνο αν $F_1 = F_2$. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ισοδυναμεί με την σύγκλιση της ακολουθίας $D_n = d_K((S_n - a_n)/b_n,\ Z)$ προς το 0, όπου Z η τυποποιημένη κανονική τ.μ.

Ενδιαφέρον, τόσο από θεωρητική σκοπιά, όσο και από την άποψη των εφαρμογών, παρουσιάζει η μελέτη της ταχύτητας (τάξης) σύγκλισης του D_n προς το 0. Προφανώς, η μελέτη της ταχύτητας σύγκλισης στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα απαιτεί πολύ περισσότερη και λεπτομερέστερη ανάλυση, που ξεφεύγει από τους σκοπούς του αντικειμένου μας. Αναφέρουμε, πάντως, το κυριότερο αποτέλεσμα, γνωστό ως Θεώρημα των Berry–Esséen.

Θεώρημα 9.22 (Berry–Esséen για ανεξάρτητη ακολουθία) Έστω $\{X_j,\ j \geq 1\}$ μία ανεξάρτητη ακολουθία τ.μ., με $\mathbb{E}(X_j) = 0$, $\mathbb{E}(X_j^2) = \sigma_j^2$, $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 > 0$, και $\Gamma_n = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$, όπου $\delta \in (0,1]$. Τότε, για το $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ισχύει η εξής ανισότητα:[17]

$$D_n \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{s_n} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq C(\delta) \frac{\Gamma_n}{s_n^{2+\delta}},$$

όπου η $C(\delta)$ είναι πεπερασμένη σταθερά, εξαρτώμενη **μόνο** από το δ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το άνω φράγμα της απόστασης της κατανομής του S_n/s_n από την τυποποιημένη κανονική κατανομή Φ, αν εξαιρέσουμε την σταθερά $C(\delta)$, είναι ακριβώς η ποσότητα που πρέπει να τείνει στο 0, για να ικανοποιείται η

[17] Παρατηρήστε ότι το άνω φράγμα έχει νόημα για οποιαδήποτε σταθερή (πεπερασμένη) τιμή του δειγματικού μεγέθους n, και επομένως, το συμπέρασμα ικανοποιείται όταν απλώς διαθέτουμε n ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (δηλ. δεν μας χρειάζεται ακολουθία τ.μ.).

συνθήκη του Lyapounov (βλ. Θεώρημα 9.18). Επομένως, η συνθήκη του Lyapounov είναι, κατά κάποιον τρόπο, συνυφασμένη με την ταχύτητα σύγκλισης.

Για την περίπτωση ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.23 (Berry–Esséen για ανεξάρτητη και ισόνομη ακολουθία) Έστω $\{X_j,\ j \geq 1\}$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ., με $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2 > 0$, και $\mathbb{E}|X_1|^{2+\delta} = \gamma < \infty$, όπου $\delta \in (0, 1]$. Τότε, για το $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ισχύει η εξής ανισότητα:[18]

$$D_n \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c(\delta)}{n^{\delta/2}} \frac{\gamma}{\sigma^{2+\delta}},$$

όπου η $c(\delta)$ είναι πεπερασμένη σταθερά, εξαρτώμενη **μόνο** από το δ.

Το Θεώρημα 9.23 όχι μόνο μας εξασφαλίζει το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, αλλά μας δίνει και την ταχύτητα σύγκλισης, η οποία είναι τάξης $n^{-\delta/2}$, όταν $\mathbb{E}|X_1|^{2+\delta} < \infty$ για κάποιο $\delta \in (0, 1]$. Αξίζει να σημειωθεί ότι για μεταβλητές που έχουν περισσότερες από τρεις ροπές, η ταχύτητα $n^{-1/2}$ **δεν μπορεί να βελτιωθεί.**[19] Όταν $\delta = 1$ (δηλαδή όταν υπάρχει η τρίτη ροπή –

[18] Παρατηρήστε ότι το άνω φράγμα έχει νόημα για οποιαδήποτε σταθερή (πεπερασμένη) τιμή του δειγματικού μεγέθους n, και επομένως, το συμπέρασμα ικανοποιείται όταν απλώς διαθέτουμε n ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (δηλ. δεν μας χρειάζεται ακολουθία τ.μ.).

[19] Σχετικά αντιπαραδείγματα έχει κατασκευάσει, μεταξύ άλλων, και ο Kolmogorov.

αυτή είναι και η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση, κυρίως γιατί είναι «κομψή» από μαθηματικής απόψεως), τότε, το προηγούμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει (πεπερασμένη) σταθερά $c(1)$ (που δεν εξαρτάται από τίποτα), για την οποία ισχύει ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$,

$$D_n \leq \frac{c(1)\,\mathbb{E}|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \tag{9.24}$$

δηλαδή το D_n συγκλίνει προς το 0, με ταχύτητα **τουλάχιστον** της τάξης του $1/\sqrt{n}$. Για τις αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Chow and Teicher (1988), σελ. 304–305.

Έχει αποδειχθεί ότι η τάξη των φραγμάτων Berry–Esséen **δεν μπορεί να βελτιωθεί** χωρίς να περιοριστεί η γενικότητα των υποθέσεών τους, και έτσι, έχει γίνει αρκετή προσπάθεια ώστε να μειωθούν, κατά το δυνατόν, οι σταθερές $C(\delta)$ και $c(\delta)$.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη τρίτη ροπή ($\delta = 1$), ο P. van Beek[20] απέδειξε ότι μπορούμε να εκλέξουμε $c(1) = 0.7975$ στην ανισότητα (9.24), ενώ ο I.S. Shiganov[21] έχει βελτιώσει την σταθερά αυτή σε $c(1) = 0.7655$. Η αλήθεια είναι ότι δεν μπορούμε να ελπίζουμε και σε πολύ περισσότερα, δεδομένου

[20] van Beek, Paul (1972). An application of Fourier methods to the problem of sharpening the Berry-Esséen inequality. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **23**, σελ. 187–196.

[21] Shiganov, I.S. (1986). Refinement of the upper bound of the constant in the central limit theorem. *Journal of Soviet Mathematics* **50**, σελ. 2545–2550.

ότι ο C.G. Esséen[22] έχει αποδείξει ότι ισχύει το εξής κάτω φράγμα:

$$c(1) \geq \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0.40973\cdots .$$

9.6 Πολυδιάστατο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα αναφερθούμε πολύ περιληπτικά στο πολυδιάστατο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Κατ΄ αρχήν, για ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ (εδώ ο τόνος δηλώνει ανάστροφο), με τιμές στον $\mathbb{R}^k$, ορίζουμε την χαρακτηριστική του συνάρτηση, $\varphi_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{C}$, κατ΄ αναλογία με την μονοδιάστατη περίπτωση, ως

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{E}[\exp(i\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X})], \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_k)' \in \mathbb{R}^k,$$

όπου $\boldsymbol{t}'\boldsymbol{X} = t_1X_1 + \ldots + t_kX_k$. Το Μονοσήμαντο της $\chi.\sigma.$, το Θεώρημα Συνεχείας, καθώς και τα υπόλοιπα σχετικά θεωρήματα, αποδεικνύονται κατά τον ίδιο τρόπο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 9.24 (τέχνασμα των Cramér–Wold) Έστω $\{\boldsymbol{X}_n,\ n \geq 1\}$ μία ακολουθία τυχαίων διανυσμάτων, και $\boldsymbol{X}$ ένα τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^k$. Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει

---

[22] Esséen, C.G. (1956). A moment inequality with an application to the central limit theorem. *Skand. Aktuarietidskr.* **39**, σελ. 160–170.

ότι[23]

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{X} \quad (\text{καθώς } n \to \infty)$$

είναι η εξής:

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}, \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)' \in \mathbb{R}^k.$$

Απόδειξη: Η συνθήκη είναι αναγκαία, διότι η συνάρτηση $h_{\boldsymbol{c}} : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $h_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$, είναι συνεχής, και συνεπώς,

$$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}, \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k.$$

Αντίστροφα, αν $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}$, έπεται ότι και οι αντίστοιχες $\chi.\sigma.$, $\varphi_{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}_n}(t)$, συγκλίνουν προς την $\chi.\sigma.$ $\varphi_{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}}(t)$ του $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}$. Άρα, για κάθε (σταθερό) $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$,

$$\varphi_{\boldsymbol{X}_n}(\boldsymbol{c}) = \varphi_{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}_n}(1) \to \varphi_{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}}(1) = \varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{c}), \quad \text{καθώς } n \to \infty,$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα Συνεχείας των $\chi.\sigma.$ (για τον $\mathbb{R}^k$). $\square$

Χρησιμοποιώντας το τέχνασμα των Cramér–Wold, μπορούμε να ανάγουμε την κατά κατανομή σύγκλιση του $\mathbb{R}^k$ στην κατά κατανομή σύγκλιση του $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε εύκολα το εξής θεώρημα.

[23] Ο ορισμός της ασθενούς σύγκλισης στον $\mathbb{R}^k$ απαιτεί όπως οι αντίστοιχες k-διάστατες συναρτήσεις κατανομής $F_n(x)$ συγκλίνουν προς την k-διάστατη συνάρτηση κατανομής $F(x)$, για κάθε σημείο συνεχείας $x \in \mathbb{R}^k$ της οριακής F. Η σύγκλιση αυτή δηλώνεται με $F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F$, ή και $\boldsymbol{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{X}$, όπου $\boldsymbol{X}_n \sim F_n$, και $\boldsymbol{X} \sim F$, τα αντίστοιχα k-διάστατα τυχαία διανύσματα.

Θεώρημα 9.25 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα στον $\mathbb{R}^k$) Αν $\{\boldsymbol{X}_j,\ j \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων k-διάστατων τυχαίων διανυσμάτων, με μέσο $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)' \in \mathbb{R}^k$, και πίνακα διασπορών–συνδιασπορών $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, θετικά ορισμένο (δηλ. $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x} > 0$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^k$), τότε

$$\frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}},$$

όπου $\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{X}_1 + \ldots + \boldsymbol{X}_n$, και $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}} = (Z_1, \ldots, Z_k)'$ είναι το k-διάστατο κανονικό τυχαίο διάνυσμα, με μέσο $\mathbf{0}$, και πίνακα διασπορών–συνδιασπορών $\boldsymbol{\Sigma}$, δηλ. με πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^k$)

$$f_{\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\!\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}\right), \ \ \boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_k)' \in \mathbb{R}^k.$$

[Η k-διάστατη κανονική με διάνυσμα μέσων τιμών $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)'$ και θετικά ημιορισμένο πίνακα διασπορών-συνδιασπορών $\boldsymbol{\Sigma}$ συμβολίζεται με $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, και έτσι, η κατανομή του $Z_{\boldsymbol{\Sigma}}$ είναι η $N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. Ισοδύναμα, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δηλώνεται και ως

$$\sqrt{n}(\overline{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) = \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

όπου $\overline{\boldsymbol{X}}_n = (\boldsymbol{X}_1 + \ldots + \boldsymbol{X}_n)/n$ είναι ο **πολυδιάστατος δειγματικός μέσος** των k-διάστατων τυχαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$.]

Απόδειξη: Λόγω του τεχνάσματος Cramér–Wold (Θεώρημα 9.24), είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$,

$$\boldsymbol{c}' \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{c}' \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}}. \tag{9.25}$$

Έστω $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^k$. Παρατηρούμε ότι η κατανομή της $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}}$ είναι η (μονοδιάστατη) κανονική, με μέσο 0, και διασπορά $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}$, $N(0, \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c})$ (η οποία είναι εκφυλισμένη στο σημείο 0 αν $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$). Έτσι, αν $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, προφανώς έχουμε

$$\boldsymbol{c}' \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = 0 \xrightarrow{\mathbf{d}} \boldsymbol{c}' \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}} = 0.$$

Αν $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_k)' \neq \mathbf{0}$, έχουμε

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}}) = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{c}' \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}}\right) = 0, \text{ και } \operatorname{Var}(\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}}) = \operatorname{Var}\left(\boldsymbol{c}' \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}}\right) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}.$$

Έστω $\boldsymbol{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nk})'$, και $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)' = \mathbb{E}(\boldsymbol{X}_n)$. Προφανώς, μπορούμε να γράψουμε το πολυδιάστατο τυποποιημένο άθροισμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}' \frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} c_j (X_{1j} + \ldots + X_{nj} - n\mu_j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_j (X_{ij} - \mu_j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i,
\end{aligned}$$

όπου οι (μονοδιάστατες) τ.μ. $\{Y_i = \sum_{j=1}^{k} c_j(X_{ij}-\mu_j),\ i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες,[24] με $\mathbb{E}(Y_i) = 0$, και $\mathrm{Var}(Y_i) = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c} > 0$. Άρα, από το κλασικό Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Θεώρημα 9.4), προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathbf{d}} Z \sim N(0,1),$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c}). \tag{9.26}$$

Αφού

$$\boldsymbol{c}'\frac{\boldsymbol{S}_n - n\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

η (9.26) ισοδυναμεί, προφανώς, με την (9.25), επειδή $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{\Sigma}} \sim N(0,\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{c})$. $\square$

Ασκήσεις Κεφ. 9:

9.1. Αν η (μετρήσιμη) συνάρτηση g είναι συνεχής στο $c \in \mathbb{R}$, και $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} c$, τότε και $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} g(c)$.

9.2. Αν $\sigma_n > 0$, και $\sigma_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, και αν

[24] Η Y_i είναι $\sigma(\boldsymbol{X}_i)$–μετρήσιμη, ως (γραμμική) συνάρτηση της $\boldsymbol{X}_i$, αφού $Y_i = \boldsymbol{c}'(\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\mu})$, και οι $\{\sigma(\boldsymbol{X}_i),\ i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες, από υπόθεση. Η ισονομία των $Y_i = g(\boldsymbol{X}_i)$, $i \geq 1$, είναι προφανής συνέπεια της ισονομίας των $\boldsymbol{X}_i$, $i \geq 1$, επειδή, π.χ., η σχέση $\boldsymbol{X}_1 \stackrel{\mathbf{d}}{=} \boldsymbol{X}_2$ συνεπάγεται την $g(\boldsymbol{X}_1) \stackrel{\mathbf{d}}{=} g(\boldsymbol{X}_2)$, για κάθε Borel $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

$$\frac{X_n - \mu}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} X,$$

όπου X οποιαδήποτε (μη εκτεταμένη) τ.μ., τότε

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \mu.$$

9.3. Έστω $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

(i) Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{a.s.}} X$ τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{a.s.}} g(X)$.

(ii) Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{p}} X$ τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{p}} g(X)$.

(iii) Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ τότε $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} g(X)$.

(iv) Ελέγξτε αν η $X_n \xrightarrow{\boldsymbol{L}^{\mathbf{p}}} X$ συνεπάγεται την $g(X_n) \xrightarrow{\boldsymbol{L}^{\mathbf{p}}} g(X)$.

[**Υπόδειξη:** Το (ii) έπεται από το (i) και το Λήμμα ;;. Το (iii) έπεται από το Θεώρημα του Skorohod.]

9.4. Θεωρούμε την ανεξάρτητη ακολουθία $\{X_n,\ n \geq 1\}$, όπου η X_n έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-n, n)$. Εφαρμόζεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για τα μερικά αθροίσματα $S_n = X_1 + \ldots + X_n$; Αν πράγματι εφαρμόζεται, διατυπώστε την αντίστοιχη οριακή σχέση για τις $\chi.\sigma.$ των S_n.

9.5. Έστω $a > 1$. Ορίζουμε τις ανεξάρτητες τ.μ. X_n ως εξής:

$$\mathbb{P}(X_n = n^a) = \mathbb{P}(X_n = -n^a) = (6n^{2(a-1)})^{-1}, \ \ \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - (3n^{2(a-1)})^{-1}.$$

Δείξτε ότι η συνθήκη του Lindeberg ικανοποιείται αν και μόνο αν $a < 3/2$.

9.6. Δείξτε ότι αν $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ τότε ικανοποιείται και η συνθήκη (9.23) του Lévy, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

9.7. Δείξτε ότι το (κλασικό) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα συνεπάγεται τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών.

9.8. Εάν οι $\{X_j,\ j \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., με $|X_j| \leq C_j$, και $\lim\limits_{n\to\infty} C_n/s_n = 0$, όπου $s_n^2 = \sum_{j=1}^n \mathrm{Var}(X_j) \to \infty$, καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{s_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z.$$

9.9. Μπορεί να έχουμε ασυμπτωτική κανονικότητα ακόμα και όταν **δεν ικανοποιείται** η συνθήκη του Lindeberg: Έστω ότι οι Y_n, $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\mathrm{Var}(Y_1) = 1$, και έστω ότι οι Z_n, $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες (και ανεξάρτητες από τις Y_n), με

$$\mathbb{P}(Z_n = n) = \mathbb{P}(Z_n = -n) = \frac{1}{2n^2}, \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Αποδείξτε ότι $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z$, όπου $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, με $X_j = Y_j + Z_j$. Όμως, η συνθήκη του Lindeberg δεν ικανοποιείται. Εξηγήστε γιατί αυτό δεν είναι αντίφαση.

9.10. Αν η Y_λ έχει κατανομή Poisson με μέσο λ, δείξτε ότι

$$\frac{Y_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z, \quad \text{καθώς } \lambda \to +\infty.$$

9.11. Πώς γίνονται οι συνθήκες του Lindeberg και του Lyapounov όταν όλες οι τ.μ. της ίδιας «γραμμής» της τριγωνικής ακολουθίας είναι και ισόνομες, εκτός από ανεξάρτητες;

9.12. Έστω ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, οι τ.μ. $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, με μέσο $\mathbb{E}(X_1^{(n)}) = \mu_n$, και πεπερασμένη διασπορά $\mathrm{Var}(X_1^{(n)}) = \sigma_n^2 > 0$. Θέτουμε $S_n = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \ldots + X_n^{(n)}$.

(i) Αποδείξτε ότι εάν η ακολουθία των τ.μ. $\{Y_n = (X_1^{(n)} - \mu_n)/\sigma_n,\ n \geq 1\}$ συγκλίνει ασθενώς προς κάποια (οποιαδήποτε) τ.μ. Y, με $\mathbb{E}(Y) = 0$, και $\mathrm{Var}(Y) = 1$, τότε

$$\frac{S_n - n\mu_n}{\sigma_n\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} Z \sim N(0,1).$$

(ii) Αποδείξτε ότι εάν δεν ικανοποιείται η συνθήκη που δίδεται στο (i), δηλ. η

$$\frac{X_1^{(n)} - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} Y, \quad \text{με } \mathbb{E}(Y) = 0,\ \mathrm{Var}(Y) = 1,$$

τότε **δεν μπορούμε** να συμπεράνουμε ότι $(S_n - n\mu_n)/(\sigma_n\sqrt{n}) \xrightarrow{\mathbf{d}} N(0,1)$.

[**Υπόδειξη:** Θεωρήστε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1^{(n)}, \ldots, X_n^{(n)}$, για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{P}(X_i^{(n)} = \pm\sqrt{n}) = 1/(2n)$, $\mathbb{P}(X_i^{(n)} =$

$0) = 1 - 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (παρατηρήστε ότι οι $X_i^{(n)}$ έχουν μέσο 0 και διασπορά 1, για κάθε i και n), και αποδείξτε ότι

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbf{d}} N_1 - N_2,$$

όπου οι N_1 και N_2 είναι ανεξάρτητες Poisson(λ), για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου λ, την οποία και να προσδιορίσετε. Στο παράδειγμα αυτό, η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Y_n = (X_1^{(n)} - \mu_n)/\sigma_n = X_1^{(n)}$ συγκλίνει ασθενώς προς την $Y \equiv 0$, οπότε δεν ικανοποιείται η συνθήκη $\mathrm{Var}(Y) = 1$, που υποθέσαμε στο (i). Θα ήταν, ίσως, ενδιαφέρον να υπολογίσετε και το φράγμα του Θεωρήματος Berry-Esséen (Θεώρημα 9.23), για το παράδειγμα αυτό, και για $\delta = 1$ (δηλ. το φράγμα της ανισότητας (9.24)), χρησιμοποιώντας την βέλτιστη γνωστή σταθερά (μέχρι σήμερα), δηλ. την σταθερά του Shiganov, $c(1) = 0.7655$.]

9.13. Κατασκευάστε παράδειγμα στο οποίο η συνθήκη του Lindeberg ικανοποιείται, αλλά δεν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ικανοποιείται και η συνθήκη του Lyapounov.

9.14. Βρείτε τα εξής όρια:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{[nx]} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, όπου $0 < x < 1$, και $[nx] =$ ακέραιο μέρος του nx.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^n x^{n-1}e^{-x}dx.$