Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Κεφάλαιο 6

Κεφάλαιο 7

Κεφάλαιο 8

Χαρακτηριστική Συνάρτηση

8.1 Ορισμός και Ιδιότητες

Ως γνωστόν (βλ. Εφαρμογή ;;), αν οι X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τ.μ., με σ.κ. F_X και F_Y, τότε η σ.κ. της τ.μ. $S = X + Y$ δίδεται από την **συνέλιξη** (convolution) των F_X και F_Y,

$$F_S(x) = (F_X * F_Y)(x) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(x-t)dF_X(t), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Η (8.1) μπορεί να γενικευτεί επαγωγικά για n ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, με αντίστοιχες σ.κ. $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Έτσι, η σ.κ. F_S του αθροίσματος $S = X_1 + \ldots + X_n$ δίδεται από την σχέση

$$F_S(x) = (F_1 * F_2 * \cdots * F_n)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8.2}$$

όπου $F_1 * F_2 * \cdots * F_n = (\cdots((F_1 * F_2) * F_3) * \cdots) * F_n$. Η (8.2) έχει νόημα διότι η πράξη της συνέλιξης είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική, και η συνέλιξη δύο σ.κ. είναι πάντα σ.κ. Η (8.2) είναι πολύ δύσκολο (αν όχι αδύνατο) να υπολογιστεί σε κλειστό τύπο, και έτσι, η μελέτη της σ.κ. και άλλων ιδιοτήτων των αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ. καθίσταται ιδιαιτέρως δύσκολη. Ένα πολύτιμο «εργαλείο» που μας βοηθάει προς αυτήν την κατεύθυνση είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση (characteristic function).

Ορισμός 8.1 (χαρακτηριστική συνάρτηση) Για μία τ.μ. X με σ.κ. F, θα καλούμε **χαρακτηριστική συνάρτηση** ($\chi.\sigma.$) της X (ή της F) την συνάρτηση $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών), με τύπο

$$\varphi_X(t) \stackrel{\text{ορ.}}{=\!=} \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos tX) + i\,\mathbb{E}(\sin tX), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Σημειώνουμε ότι η $\chi.\sigma.$ φ_X είναι καλά ορισμένη μέσω της (8.3), διότι οι συναρτήσεις $g_1(x) = \cos tx$ και $g_2(x) = \sin tx$ είναι φραγμένες και συνεχείς (άρα Borel), για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$, και έτσι, οι $\mathbb{E}(\cos tX)$ και $\mathbb{E}(\sin tX)$ είναι καλά ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί, που ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

Επειδή στην συνέχεια θα μελετήσουμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές, τα ήδη γνωστά θεωρήματα, όπως και οι αντίστοιχοι ορισμοί, θα πρέπει ελαφρώς να τροποποιηθούν, ώστε να καλύπτουν και την περίπτωση μιγαδικών μετρησίμων συναρτήσεων, ή μιγαδικών τ.μ. Πάντως, οι αναγκαίες αυτές τροποποιήσεις δεν δημιουργούν ιδιαίτερες δυσκολίες. Δίνουμε πρώτα τον εξής ορισμό.

Ορισμός 8.2 (i) **(μιγαδική τυχαία μεταβλητή)** Αν $(\Omega, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος, τότε οποιαδήποτε συνάρτηση $Z = X + iY : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ θα καλείται μιγαδική τυχαία μεταβλητή, όταν οι $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ και $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι (συνήθεις) τ.μ. Η X ονομάζεται **πραγματικό μέρος** (real part), και η Y **φανταστικό μέρος** (imaginary part) της Z, και συμβολίζονται με $\mathcal{R}(Z)$ και $\mathcal{I}(Z)$, αντίστοιχα. Η παραγόμενη σ-άλγεβρα $\sigma(Z)$ είναι, εξ' ορισμού, η $\sigma(X, Y)$, δηλ. η ελάχιστη σ-άλγεβρα ως προς την οποία οι $X = \mathcal{R}(Z)$ και $Y = \mathcal{I}(Z)$ είναι τ.μ.
Ειδικότερα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, με $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in \mathbb{R}$, θα καλείται Borel, όταν οι συναρτήσεις $u = \mathcal{R}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $v = \mathcal{I}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel.

(ii) **(μέση τιμή (ολοκλήρωμα) μιγαδικής τυχαίας μεταβλητής)** Αν η $Z = X + iY$ είναι μία μιγαδική τ.μ. στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, τότε η Z καλείται **ολοκληρώσιμη** όταν, εξ' ορισμού, οι X και Y είναι ολοκληρώσιμες, δηλ. όταν $\int |X| d\mu < \infty$ και $\int |Y| d\mu < \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $Z \in L^1(\mu)$ (δηλ. η Z είναι ολοκληρώσιμη ως προς το μέτρο μ), και ορίζουμε ως ολοκλήρωμα της Z τον μιγαδικό αριθμό

$$\int Z d\mu \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int X d\mu + i \int Y d\mu.$$

Ειδικότερα, στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ορίζουμε ως **μέση τιμή** της Z τον μιγαδικό αριθμό $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + i\mathbb{E}(Y)$, εφ' όσον, φυσικά, $\mathbb{E}|X| < \infty$ και $\mathbb{E}|Y| < \infty$. [Δηλ. εφ' όσον η Z είναι ολοκληρώσιμη ως προς το $\mathbb{P}$, $Z \in L^1(\mathbb{P})$.]

(iii) **(στοχαστική ανεξαρτησία)** Οι μιγαδικές τ.μ. $Z_j = X_j + iY_j$, $j \in J$ (όπου J αυθαίρετο σύνολο δεικτών, πεπερασμένο, αριθμήσιμα άπειρο, ή υπεραριθμήσιμο) καλούνται **(στοχαστικά) ανεξάρτητες** όταν οι σ-άλγεβρες $\sigma(Z_j) = \sigma(X_j, Y_j)$, $j \in J$, είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες.

Ειδικότερα, η ακολουθία μιγαδικών τ.μ. $\{Z_n,\ n \geq 1\}$ καλείται **ανεξάρτητη** όταν οι μιγαδικές τ.μ. $Z_1, \ldots, Z_n$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $n \geq 2$.

(iv) **(ισχυρή (σχεδόν παντού – σχεδόν βέβαιη – με πιθ. 1) σύγκλιση)** Η ακολουθία μιγαδικών τ.μ. $\{Z_n = X_n + iY_n,\ n \geq 1\}$ λέμε ότι συγκλίνει ισχυρά (σχεδόν βεβαίως, ή με πιθ. 1) προς την μιγαδική τ.μ. $Z = X + iY$, και γράφουμε $Z_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Z$, όταν οι Z_n και Z είναι ορισμένες **στον ίδιο** χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και ισχύουν οι $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ και $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$.

Γενικότερα, σε έναν χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, η ακολουθία μιγαδικών μετρησίμων συναρτήσεων $\{Z_n = X_n + iY_n,\ n \geq 1\}$ λέμε ότι συγκλίνει σχεδόν παντού (μ-σχεδόν παντού) προς την μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση $Z = X + iY$, και γράφουμε $Z_n \to Z$ σχεδόν παντού, όταν ισχύουν οι $X_n \to X$ σχεδόν παντού, και $Y_n \to Y$ σχεδόν παντού, δηλ. όταν $\mu(A^c) = 0$, όπου $A = \{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} \cap \{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}$.

(v) **(ισχυρή σύγκλιση με συνεχείς δείκτες)** Έστω T ένα (άπειρο) υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, και t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T, οπότε $t_0 \in [-\infty, +\infty]$. Λέμε ότι, καθώς $t \to t_0$, οι μιγαδικές τ.μ. $Z_t = X_t + iY_t,\ t \in T$, συγκλίνουν ισχυρά (σχεδόν βεβαίως, ή με πιθ. 1) προς την μιγαδική τ.μ. $Z = X + iY$, και γράφουμε $Z_t \xrightarrow{\textbf{a.s.}} Z$ καθώς $t \to t_0$, όταν οι Z_t και Z είναι ορισμένες **στον ίδιο** χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και ισχύουν οι $X_{t_n} \xrightarrow{\textbf{a.s.}} X$ και $Y_{t_n} \xrightarrow{\textbf{a.s.}} Y$ (δηλ., $Z_{t_n} \xrightarrow{\textbf{a.s.}} Z$, σύμφωνα με το (iv)), **για κάθε** ακολουθία $\{t_n,\ n \geq 1\} \subset T \setminus \{t_0\}$, τέτοια ώστε $t_n \to t_0$ καθώς $n \to \infty$. [Δηλ., $t_n \in T$ για κάθε n, $t_n \to t_0$, και $t_n \neq t_0$.]

Γενικότερα, σε έναν χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, οι μιγαδικές μετρήσιμες συναρτήσεις $Z_t = X_t + iY_t,\ t \in T$, συγκλίνουν σχεδόν παντού (μ-σχεδόν παντού), καθώς $t \to t_0$, προς την μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση $Z = X + iY$, και γράφουμε $Z_t \to Z$ σχεδόν παντού καθώς $t \to t_0$, όταν $X_{t_n} \to X$ σχεδόν παντού, και $Y_{t_n} \to Y$ σχεδόν παντού (δηλ., $Z_{t_n} \to Z$ σχεδόν παντού, σύμφωνα με το (iv)), **για κάθε** ακολουθία $\{t_n,\ n \geq 1\} \subset T \setminus \{t_0\}$, τέτοια ώστε $t_n \to t_0$ καθώς $n \to \infty$.

(vi) **(ασθενής σύγκλιση με συνεχείς δείκτες)** Έστω T ένα (άπειρο) υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, και t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T, οπότε $t_0 \in [-\infty, +\infty]$. Λέμε ότι, καθώς $t \to t_0$, οι (πραγματικές)[1] τ.μ. $X_t,\ t \in T$, συγκλίνουν ασθενώς (κατά κατανομή) προς την τ.μ. X, και γράφουμε $X_t \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ καθώς $t \to t_0$ (οι X_t και X μπορούν να είναι ορισμένες σε αυθαίρετους χώρους πιθανότητας), όταν ισχύει η $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} X$, **για κάθε** ακολουθία $\{t_n,\ n \geq 1\} \subset T \setminus \{t_0\}$, τέτοια ώστε $t_n \to t_0$ καθώς $n \to \infty$.

Αναγνωρίζεται εύκολα ότι οι παραπάνω ορισμοί συγκλίσεων για συνεχείς δείκτες γενικεύουν τους αντίστοιχους ορισμούς για συγκλίσεις ακολουθιών τ.μ. (αρκεί να λάβει κανείς $T = \{1, 2, \ldots\}$, και $t_0 = +\infty$, το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του T).

Οι αναγκαίες τροποποιήσεις των γνωστών (για πραγματικές τ.μ.) θεωρημάτων που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια, συγκεντρώνονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 8.3 (i) Η μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση Z, ορισμένη στον χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\int |Z| d\mu < \infty$, όπου με $|Z| = |X + iY| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ συμβολίζουμε το μέτρο της Z. Επίσης, όταν η Z είναι ολοκλη-

[1] Αποφεύγουμε να δώσουμε αντίστοιχο ορισμό ασθενούς σύγκλισης ακολουθίας μιγαδικών τ.μ., επειδή απαιτείται σύγκλιση πολυδιαστάτων σ.κ., και τέτοια σύγκλιση δεν θα μας χρειαστεί ιδιαίτερα (εκτός, ίσως, των Θεωρημάτων ;; και ;; του Κεφ. ;;).

ρώσιμη, ισχύει η ανισότητα[2]

$$\left|\int Z d\mu\right| \leq \int |Z| d\mu.$$

Ειδικότερα, η μιγαδική τ.μ. Z, ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\mathbb{E}|Z| < \infty$, και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα $|\mathbb{E}(Z)| \leq \mathbb{E}|Z|$.

(ii) Αν οι ανεξάρτητες μιγαδικές τ.μ. $Z_1, \ldots, Z_n$, ορισμένες στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, είναι ολοκληρώσιμες, δηλ. $\mathbb{E}|Z_j| < \infty$, $j = 1, \ldots, n$, τότε και η μιγαδική τ.μ. $Z = Z_1 \cdots Z_n$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα,

$$\mathbb{E}(Z_1 \cdots Z_n) = \mathbb{E}(Z_1) \cdots \mathbb{E}(Z_n).$$

(iii) **(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για μιγαδικές τ.μ. και συνεχείς δείκτες)** Έστω Z και Z_t, $t \in T$, μιγαδικές τ.μ., ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και τέτοιες ώστε $Z_t \xrightarrow{\text{a.s.}} Z$ καθώς $t \to t_0$, όπου t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T. Αν υπάρχει (εκτεταμένη) τ.μ. $W : \Omega \longrightarrow \overline{R}$ (ή $\mathbb{C}$), με $\mathbb{E}|W| < \infty$, για την οποία ισχύει ότι $|Z_t| \leq |W|$ για κάθε $t \in T$ (ή, έστω, ισχύει ότι για κάθε $t \in T$, $|Z_t| \leq |W|$ με πιθ. 1, δηλ. $\mathbb{P}(|Z_t| \leq |W|) = 1$), τότε $\mathbb{E}|Z| < \infty$, $\mathbb{E}|Z_t| < \infty$

---

[2] Αν λάβουμε ως χώρο μέτρου τον $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, όπου $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, και μ το αριθμητικό μέτρο με $\mu(A) =$ πλήθος στοιχείων του A, τότε η ανισότητα $|\int Z d\mu| \leq \int |Z| d\mu$ λαμβάνει την μορφή $|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, για οποιαδήποτε ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\{z_n,\ n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$, με $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$.

για κάθε $t \in T$, και μάλιστα,

$$\mathbb{E}(Z_t) \to \mathbb{E}(Z) \text{ καθώς } t \to t_0, \text{ και } \mathbb{E}|Z_t - Z| \to 0 \text{ καθώς } t \to t_0.$$

Γενικότερα, έστω Z και Z_t, $t \in T$, μιγαδικές μετρήσιμες συναρτήσεις, ορισμένες στον ίδιο χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, και τέτοιες ώστε $Z_t \to Z$ σχεδόν παντού καθώς $t \to t_0$, όπου t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T. Αν υπάρχει (εκτεταμένη) μετρήσιμη συνάρτηση $W : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (ή $\mathbb{C}$), με $\int |W| d\mu < \infty$, για την οποία ισχύει ότι $|Z_t| \le |W|$ για κάθε $t \in T$ (ή, έστω, ισχύει ότι για κάθε $t \in T$, $|Z_t| \le |W|$ σχεδόν παντού, δηλ. $\mu(\{\omega : |Z_t(\omega)| > |W(\omega)|\}) = 0$), τότε $\int |Z| d\mu < \infty$, $\int |Z_t| d\mu < \infty$ για κάθε $t \in T$, και μάλιστα,

$$\int Z_t d\mu \to \int Z d\mu \text{ καθώς } t \to t_0, \text{ και } \int |Z_t - Z| d\mu \to 0 \text{ καθώς } t \to t_0.$$

(iv) **(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για ασθενή σύγκλιση (πραγματικών) τ.μ., και για συνεχείς δείκτες)** Έστω X και X_t, $t \in T$, (πραγματικές) τ.μ., ορισμένες σε αυθαίρετους χώρους πιθανότητας, και τέτοιες ώστε $X_t \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ καθώς $t \to t_0$, όπου t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T. Αν υπάρχει (εκτεταμένη) τ.μ. W, με $\mathbb{E}|W| < \infty$, για την οποία ισχύει ότι $|X_t| \le_{\mathbf{st}} |W|$ για κάθε $t \in T$ (δηλ. $\mathbb{P}(|X_t| \le x) \ge \mathbb{P}(|W| \le x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και για κάθε $t \in T$), τότε $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$, και μάλιστα,

$$\mathbb{E}(X_t) \to \mathbb{E}(X), \quad \text{καθώς } t \to t_0.$$

(v) **(Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης για ασθενή σύγκλιση (πραγματικών) τ.μ., και για συνεχείς δείκτες)** Έστω X και X_t, $t \in T$, (πραγματικές) τ.μ., ορισμένες σε αυθαίρετους χώρους πιθανότητας, και τέτοιες ώστε $X_t \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ καθώς $t \to t_0$, όπου t_0 ένα σημείο συσσώρευσης του T. Αν υπάρχει πεπερασμένη, μη αρνητική, σταθερά C, για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{P}(|X_t| \leq C) = 1$ για κάθε $t \in T$, τότε $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$, και μάλιστα,

$$\mathbb{E}(X_t) \to \mathbb{E}(X), \quad \text{καθώς } t \to t_0.$$

Απόδειξη: (i) Η $Z = X + iY$ είναι, εξ' ορισμού, ολοκληρώσιμη, όταν οι X και Y είναι ολοκληρώσιμες. Είναι σαφές ότι αν η Z είναι ολοκληρώσιμη, τότε, αφού $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2} \leq |X| + |Y|$, θα έχουμε $\int |Z| d\mu \leq \int (|X| + |Y|) d\mu = \int |X| d\mu + \int |Y| d\mu < \infty$. Αλλά και αντίστροφα, αφού $|X| \leq |Z|$ και $|Y| \leq |Z|$, έχουμε ότι η σχέση $\int |Z| d\mu < \infty$ συνεπάγεται τις $\int |X| d\mu < \infty$ και $\int |Y| d\mu < \infty$, οπότε οι X και Y είναι ολοκληρώσιμες, και συνεπώς, η Z είναι ολοκληρώσιμη.

Για να αποδείξουμε την ανισότητα[3] $|\int Z d\mu| \leq \int |Z| d\mu$ για ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις $Z = X + iY$, δηλαδή την ανισότητα $(\int X d\mu)^2 + (\int Y d\mu)^2 \leq (\int \sqrt{X^2 + Y^2} d\mu)^2$, δουλεύουμε σύμφωνα με την κλασική τεχνική απόδειξης (βλ. §5.2 του Κεφ. ;;) ως εξής. Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι η ανισότητα αυτή είναι αρκετό να αποδειχθεί για μη αρνητικές μετρήσιμες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις X και Y, επειδή $(\int X d\mu)^2 + (\int Y d\mu)^2 \leq (\int |X| d\mu)^2 + (\int |Y| d\mu)^2$ (διότι, π.χ., $|\int X d\mu| \leq \int |X| d\mu$, επειδή $-|X| \leq X \leq |X|$). Επομένως, είναι αρκετό να δειχθεί μόνο για απλές μη αρνητικές και ολοκληρώσιμες X και Y, διότι, κατά τα γνωστά, αν η ανισότητα ισχύει για απλές, τότε θα έχουμε ότι για τυχούσες μετρήσιμες $X \geq 0$ και $Y \geq 0$, με $\int (X+Y) d\mu < \infty$, υπάρχουν ακολουθίες απλών X_n και Y_n, τέτοιες ώστε $0 \leq X_n \nearrow X$ και $0 \leq Y_n \nearrow Y$, οπότε και $0 \leq \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} \nearrow \sqrt{X^2 + Y^2}$. Έτσι, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης θα προκύψει η

[3]Μία πολύ πιο σύντομη απόδειξη, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο, μπορεί να γίνει ως εξής: Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $w = a + ib$, και για κάθε ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση $Z = X + iY$, η wZ είναι ολοκληρώσιμη, και $\int wZ d\mu = w \int Z d\mu$. Πράγματι, η wZ είναι ολοκληρώσιμη επειδή $\int |wZ| d\mu = \int |w||Z| d\mu = |w| \int |Z| d\mu < \infty$, αφού υποθέσαμε ότι η Z είναι ολοκληρώσιμη, δηλ. $\int |Z| d\mu < \infty$, και η σχέση $\int \lambda X d\mu = \lambda \int X d\mu$ είναι γνωστή για κάθε (πραγματικό) αριθμό $\lambda \geq 0$, και για κάθε (πραγματική) μετρήσιμη συνάρτηση $X \geq 0$. Είναι προφανές ότι αν ο μιγαδικός αριθμός $\int Z d\mu = \int X d\mu + i \int Y d\mu$ είναι ίσος με το 0, τότε θα είναι και $|\int Z d\mu| = 0$, οπότε η ανισότητα ισχύει. Αν υποθέσουμε ότι $\int Z d\mu \neq 0$, τότε υπάρχει μιγαδικός αριθμός w, με $|w| = 1$, τέτοιος ώστε $w \int Z d\mu = |\int Z d\mu|$. Έστω $w = a + ib$ ο μιγαδικός αυτός, με $a^2 + b^2 = 1$. Τότε $|\int Z d\mu| = w \int Z d\mu = \int wZ d\mu = \int (a+ib)(X+iY) d\mu = \int [(aX - bY) + i(bX + aY)] d\mu = \int (aX - bY) d\mu + i \int (bX + aY) d\mu = \int (aX - bY) d\mu$, επειδή το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να είναι (θετικός) πραγματικός αριθμός. Παρατηρώντας ότι $(aX - bY)^2 \leq (a^2 + b^2)(X^2 + Y^2) = X^2 + Y^2 = |Z|^2$, έπεται ότι $aX - bY \leq |Z|$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

ισχύς της ανισότητας και στη γενική περίπτωση, ως συνήθως:

$$\left(\int X d\mu\right)^2 + \left(\int Y d\mu\right)^2 = \left(\lim_n \int X_n d\mu\right)^2 + \left(\lim_n \int Y_n d\mu\right)^2$$

$$= \lim_n \left[\left(\int X_n d\mu\right)^2 + \left(\int Y_n d\mu\right)^2\right] \le \lim_n \left(\int \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} d\mu\right)^2$$

$$= \left(\lim_n \int \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} d\mu\right)^2 = \left(\int \sqrt{X^2 + Y^2} d\mu\right)^2.$$

Θεωρούμε τώρα τις απλές ολοκληρώσιμες $X = \sum_{i=1}^k a_i I_{A_i}$ και $Y = \sum_{j=1}^m b_j I_{B_j}$ (όπου, τόσο τα A_i, όσο και τα B_j, αποτελούν μία διαμέριση του Ω). Παρατηρούμε ότι τα $A_i B_j$ αποτελούν διαμέριση του Ω, και $X = \sum_{(i,j)} a_{ij} I_{A_i B_j}$, $Y = \sum_{(i,j)} b_{ij} I_{A_i B_j}$ (οι αθροίσεις λαμβάνονται για $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$), όπου $a_{ij} = a_i$, $b_{ij} = b_j$. Η ολοκληρωσιμότητα της X (αντ. της Y) συνεπάγεται ότι $0 \le a_{ij}\mu(A_i B_j) < \infty$ (αντ., $0 \le b_{ij}\mu(A_i B_j) < \infty$) για κάθε i, j. Προφανώς,

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sum_{(i,j)} \sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} I_{A_i B_j},$$

οπότε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισούνται με

$$\int X d\mu = \sum_{(i,j)} a_{ij}\mu(A_i B_j), \qquad \int Y d\mu = \sum_{(i,j)} b_{ij}\mu(A_i B_j),$$

$$\int \sqrt{X^2 + Y^2} d\mu = \sum_{(i,j)} \sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2}\mu(A_i B_j).$$

Θέτοντας $x_{ij} = a_{ij}\mu(A_i B_j) \ge 0$, και $y_{ij} = b_{ij}\mu(A_i B_j) \ge 0$, η προς απόδειξη ανισότητα, $(\int X d\mu)^2 + (\int Y d\mu)^2 \le (\int \sqrt{X^2 + Y^2} d\mu)^2$, ισοδυναμεί με την ανισότητα

$$\left(\sum_{(i,j)} x_{ij}\right)^2 + \left(\sum_{(i,j)} y_{ij}\right)^2 \le \left(\sum_{(i,j)} \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}\right)^2, \ x_{ij} \ge 0, \ y_{ij} \ge 0,$$

η οποία, προφανώς, ισοδυναμεί με την

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right)^2, \ x_i \ge 0, \ y_i \ge 0.$$

Η τελευταία ανισότητα αποδεικνύεται εύκολα, αναπτύσσοντας τα τετράγωνα. Πράγματι,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j, \qquad \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{i<j} y_i y_j,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{i<j} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\sqrt{x_j^2 + y_j^2},$$

οπότε έχουμε

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = 2\sum_{i<j}(B_{ij} - A_{ij}),$$

όπου $A_{ij} = x_i x_j + y_i y_j \ge 0$, και $B_{ij} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\sqrt{x_j^2 + y_j^2} \ge 0$. Παρατηρώντας ότι $B_{ij}^2 - A_{ij}^2 = (x_i y_j - x_j y_i)^2 \ge 0$, έπεται ότι $B_{ij} - A_{ij} \ge 0$, το οποίο αποδεικνύει την ανισότητα.

(ii) Οι τ.μ. $|Z_1|, \ldots, |Z_n|$ είναι μη αρνητικές (προφανώς), ολοκληρώσιμες (από την υπόθεση – βλ. (i)), και ανεξάρτητες, επειδή για κάθε $j = 1, 2 \ldots, n$, η $|Z_j| = \sqrt{X_j^2 + Y_j^2}$ είναι, προφανώς, $\sigma(X_j, Y_j)$–μετρήσιμη, δηλ. $\sigma(Z_j)$–μετρήσιμη. Από το Θεώρημα ;; προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}|Z_1 \cdots Z_n| = \mathbb{E}(|Z_1| \cdots |Z_n|) = \mathbb{E}|Z_1| \cdots \mathbb{E}|Z_n| < \infty,$$

οπότε, από το (i), η $Z_1 \cdots Z_n$ είναι ολοκληρώσιμη. Είναι σαφές ότι είναι αρκετό να αποδείξουμε τη σχέση για $n = 2$, δηλ., αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}(Z_1 Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) \mathbb{E}(Z_2),$$

αφού η γενική περίπτωση προκύπτει άμεσα με επαγωγή στο n. Είναι όμως $Z_1 Z_2 = (X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = (X_1 X_2 - Y_1 Y_2) + i(X_1 Y_2 + Y_1 X_2)$, και οι $X_1 X_2$, $Y_1 Y_2$, $X_1 Y_2$, και $Y_1 X_2$, είναι ολοκληρώσιμες, ως γινόμενο ολοκληρωσίμων και ανεξαρτήτων τ.μ. Ας σημειωθεί ότι π.χ. οι X_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες επειδή η X_1 είναι $\sigma(X_1)$–μετρήσιμη, και $\sigma(X_1) \subset \sigma(Z_1) = \sigma(X_1, Y_1)$, ενώ η Y_2 είναι $\sigma(Y_2)$–μετρήσιμη, και $\sigma(Y_2) \subset \sigma(Z_2) = \sigma(X_2, Y_2)$ – παρόμοια, οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, οι Y_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, και οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες. Τώρα, αφού όλες οι μέσες τιμές των παρακάτω γινομένων είναι πεπερασμένες, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1Z_2) &= \mathbb{E}[(X_1X_2 - Y_1Y_2) + i(X_1Y_2 + Y_1X_2)] \\
&= \mathbb{E}(X_1X_2 - Y_1Y_2) + i\,\mathbb{E}(X_1Y_2 + Y_1X_2) \\
&= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(Y_1Y_2) + i\,\mathbb{E}(X_1Y_2) + i\,\mathbb{E}(Y_1X_2) \\
&= \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2) + i\,\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Y_2) + i\,\mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(X_2) \\
&= [\mathbb{E}(X_1) + i\,\mathbb{E}(Y_1)][\mathbb{E}(X_2) + i\,\mathbb{E}(Y_2)] \\
&= \mathbb{E}(Z_1)\mathbb{E}(Z_2).
\end{aligned}$$

(iii) Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2(v), πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $\{t_n,\ n \geq 1\} \subset T \setminus \{t_0\}$, με $t_n \to t_0$, ισχύει ότι $\mathbb{E}(Z_{t_n}) \to \mathbb{E}(Z)$, και $\mathbb{E}|Z_{t_n} - Z| \to 0$ (και, επίσης, ότι $\mathbb{E}|Z_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$, και $\mathbb{E}|Z| < \infty$). Φυσικά, η σχέση $\mathbb{E}|Z_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$ προκύπτει άμεσα από την υπόθεση ότι $|Z_t| \leq |W|$, και $\mathbb{E}|W| < \infty$. Αφού, εξ' υποθέσεως, $Z_{t_n} = X_{t_n} + iY_{t_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} Z = X + iY$, αυτό σημαίνει ότι $X_{t_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, και $Y_{t_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$. Είναι προφανές ότι $|X_{t_n}| \leq |Z_{t_n}|$ και $|Y_{t_n}| \leq |Z_{t_n}|$, οπότε $|X_{t_n}| \leq |W|$ και $|Y_{t_n}| \leq |W|$, με $\mathbb{E}|W| < \infty$. Αφού $X_{t_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, και $|X_{t_n}| \leq |W|$ με $\mathbb{E}|W| < \infty$, έχουμε από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (βλ. Θεώρημα ;;, ή Ιδιότητα (M7) της §5.6 του Κεφ. ;;) ότι $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}(X_{t_n}) \to \mathbb{E}(X)$, και $\mathbb{E}|X_{t_n} - X| \to 0$. Για τον ίδιο λόγο έχουμε ότι $\mathbb{E}|Y| < \infty$, $\mathbb{E}(Y_{t_n}) \to \mathbb{E}(Y)$, και $\mathbb{E}|Y_{t_n} - Y| \to 0$. Τελικά, $\mathbb{E}|Z| \leq \mathbb{E}|X| + \mathbb{E}|Y| < \infty$, $\mathbb{E}(Z_{t_n}) = \mathbb{E}(X_{t_n}) +$

$i\mathbb{E}(Y_{t_n}) \to \mathbb{E}(X) + i\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z)$, και

$$\mathbb{E}|Z_{t_n} - Z| = \mathbb{E}|(X_{t_n} - X) + i(Y_{t_n} - Y)| \le \mathbb{E}|X_{t_n} - X| + \mathbb{E}|Y_{t_n} - Y| \to 0,$$

όπως έπρεπε να δειχθεί.

Η γενική περίπτωση που, αντί για χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, έχουμε γενικό χώρο μέτρου $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, προκύπτει ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα ;;, και γράφοντας, π.χ., $\int Z d\mu$ αντί $\mathbb{E}(Z)$, κ.ο.κ.

(iv) Σύμφωνα με τον Ορισμό 8.2(vi), πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $\{t_n,\ n \ge 1\} \subset T \setminus \{t_0\}$, με $t_n \to t_0$, ισχύει ότι $\mathbb{E}(X_{t_n}) \to \mathbb{E}(X)$ (και, επίσης, ότι $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \in T$, και $\mathbb{E}|X| < \infty$). Η σχέση $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε t προκύπτει από την υπόθεση, αφού $|X_t| \le_{\mathbf{st}} |W|$, και $\mathbb{E}|W| < \infty$, βλ. Πρόταση ;;(i). Τα υπόλοιπα συμπεράσματα αποτελούν αναδιατύπωση του Θεωρήματος ;; για την ακολουθία τ.μ. $\{X_{t_n},\ n \ge 1\}$, για την οποία ισχύει ότι $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} X$, και την τ.μ. $Y = W$.

(v) Είναι ειδική περίπτωση του (iv) για την τ.μ. W, με $\mathbb{P}(W = C) = 1$. $\square$

Από τον Ορισμό 8.1 και την Πρόταση 8.3 προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ιδιότητες μίας $\chi.\sigma.$

Λήμμα 8.4 Για κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση φ_X (οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής X) ισχύουν τα εξής:

(i) $\varphi_X(0) = 1$.

(ii) $|\varphi_X(t)| \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$, όπου $\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy$ ο συζυγής μιγαδικός του $z = x + iy$.

Απόδειξη: Το μόνο που αξίζει κάποιας προσοχής είναι το (ii), το οποίο προκύπτει από την ανισότητα της Πρότασης 8.3(i): $|\varphi_X(t)| = |\mathbb{E}(e^{itX})| \leq \mathbb{E}|e^{itX}| = \mathbb{E}(1) = 1$. Τα (i) και (iii) είναι προφανή. $\square$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει άλλη μία βασική ιδιότητα της $\chi.\sigma.$

Θεώρημα 8.5 Οποιαδήποτε $\chi.\sigma.$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $t, h \in \mathbb{R}$. Τότε, αφού $|e^{itX}| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= |\mathbb{E}(e^{i(t+h)X}) - \mathbb{E}(e^{itX})| \\
&= |\mathbb{E}[e^{itX}(e^{ihX} - 1)]| \\
&\leq \mathbb{E}\big(|e^{itX}||e^{ihX} - 1|\big) = \mathbb{E}|e^{ihX} - 1|. \qquad (\text{ανεξάρτητο του } t)
\end{aligned}$$

Προφανώς $\lim_{h\to 0} |e^{ihX} - 1| = 0$, και $|e^{ihX} - 1| \leq 2$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Πρόταση 8.3(iii)) έχουμε

$$g(h) = \mathbb{E}|e^{ihX} - 1| \to \mathbb{E}(0) = 0, \quad \text{καθώς } h \to 0.$$

Άρα, $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq g(h) \to 0$ καθώς $h \to 0$, που αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Το παρακάτω θεώρημα είναι πολύ εύκολο να δειχθεί (είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 8.3(ii)), αλλά έχει θεμελιώδη σημασία στην μελέτη αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ. Η απόδειξή του αφήνεται στον αναγνώστη.

Θεώρημα 8.6 Έστω $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ., με $\sigma.\kappa.$ $F, F_1, \ldots, F_n$, και $\chi.\sigma.$ $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Τότε:

(i) Η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. $Y = aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ είναι η

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi(at).$$

(ii) Η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. $S = X_1 + \ldots + X_n$ είναι η

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t).$$

(iii) Η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. $S = X_1 + \ldots + X_n$, στην περίπτωση που οι $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ έχουν την ίδια κατανομή F (είναι δηλαδή και ισόνομες εκτός από ανεξάρτητες), είναι η

$$\varphi_S(t) = [\varphi(t)]^n.$$

Στην πραγματικότητα, τα (ii) και (iii) του Θεωρήματος 8.6 είναι αυτά που αναδεικνύουν την $\chi.\sigma.$ ως το πλέον χρήσιμο και απαραίτητο εργαλείο για την μελέτη ενός αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ., δεδομένου ότι η συνέλιξη, όπως είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου, δεν προσφέρεται για περαιτέρω υπολογισμούς, λόγω της πολυπλοκότητάς της. Σε πλήρη αντίθεση, η $\chi.\sigma.$ ενός αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ. είναι, απλά, το γινόμενο των $\chi.\sigma.$ των προσθετέων. Ας σημειωθεί ότι, κυρίως σε μαθηματικά κείμενα, η χαρακτηριστική συνάρτηση καλείται **μετασχηματισμός Fourier**.

8.2 Θεώρημα Αντιστροφής

Η μεγάλη σπουδαιότητα της $\chi.\sigma.$ έγκειται στο γεγονός ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ $\sigma.\kappa.$ και $\chi.\sigma.$ Για να αποδειχθεί αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε μερικά βοηθητικά αποτελέσματα, και θα κάνουμε συνεχή χρήση του Θεωρήματος Tonelli–Fubini για μιγαδικές μετρήσιμες συναρτήσεις, το οποίο αναφέρουμε και εδώ για πληρότητα (βλ. επίσης Κεφ. ;;, Θεωρήματα ;;, ;;, και Πρόταση ;;, όπου τα αντίστοιχα αποτελέσματα είχαν αναφερθεί για πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις).

Υπενθυμίζουμε πρώτα τους παρακάτω ορισμούς, που δόθηκαν ήδη στο Κεφ. ;;.

Ορισμός 8.7 Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ δύο χώροι μέτρου. Τότε, ως σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$, καλείται η σ-άλγεβρα

$$\sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}),$$

που παράγεται από τα μετρήσιμα «ορθογώνια» $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$, και συμβολίζεται με $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
Ο χώρος μέτρου

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \rho),$$

καλείται χώρος γινόμενο των $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$, το δε μέτρο ρ καλείται μέτρο γινόμενο των ν_1 και ν_2, με την προϋπόθεση ότι ισχύει

$$\rho(A_1 \times A_2) = \nu_1(A_1)\nu_2(A_2), \ \text{ για κάθε } A_1 \in \mathcal{A}_1, \ A_2 \in \mathcal{A}_2. \ \ (0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0)$$

Αποδεικνύεται (βλ. π.χ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης, 1988, σελ. 123) ότι το μέτρο ρ είναι μοναδικό (και σ-πεπερασμένο), όταν τα ν_1 και ν_2 είναι σ-πεπερασμένα (δηλ. όταν υπάρχει $\{A_n, \ n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_1$ με $\nu_1(A_n) < \infty$ και $\Omega_1 = \bigcup_n A_n$, και υπάρχει $\{B_n, \ n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_2$ με $\nu_2(B_n) < \infty$ και $\Omega_2 = \bigcup_n B_n$). Επίσης αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα κάποιο μέτρο ρ με την παραπάνω ιδιότητα (βλ. π.χ. Κουμουλλής και Νεγρεπόντης, 1988, σελ. 125), ακόμα και όταν το ν_1, ή το ν_2 (ή και τα δύο), δεν είναι σ-πεπερασμένα, αλλά σε αυτήν την περίπτωση το μέτρο ρ μπορεί να μην είναι μοναδικό. Έτσι, περιοριζόμαστε στην περίπτωση που τα ν_1 και ν_2 είναι σ-πεπερασμένα, και ορίζουμε $\rho \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \nu_1 \times \nu_2$ το μοναδικό αυτό μέτρο γινόμενο.

Τα παρακάτω αποτελέσματα είναι θεμελιώδη στην ανάλυση και έχουν πολλές εφαρμογές.

Θεώρημα (Tonelli) Αν οι χώροι μέτρου $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \nu_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \nu_2)$ είναι σ-πεπερασμένοι, και η συνάρτηση $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$

είναι $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμη, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d(\nu_1\times\nu_2) &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\nu_2(\omega_2)\right)d\nu_1(\omega_1)\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)d\nu_1(\omega_1)\right)d\nu_2(\omega_2),\end{aligned}$$

με την έννοια ότι, ή όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι $+\infty$, ή όλα είναι πεπερασμένα και ίσα.

Ας σημειωθεί ότι για να έχει νόημα, π.χ., το

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\nu_2(\omega_2)\right)d\nu_1(\omega_1),$$

θα πρέπει η συνάρτηση

$$g(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)d\nu_2(\omega_2) : \Omega_1 \longrightarrow [0,+\infty]$$

να είναι $\mathcal{A}_1$–μετρήσιμη, έτσι ώστε να έχει νόημα το

$$\int_{\Omega_1} g(\omega_1)d\nu_1(\omega_1).$$

Αυτό είναι πράγματι αληθές και, αν και δεν το αναφέραμε ρητά στην εκφώνηση του Θεωρήματος Tonelli, είναι στην πραγματικότητα ένα από τα συμπεράσματα, και προκύπτει από το γεγονός ότι η f είναι $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμη. Παρατηρήστε επίσης ότι επιτρέπεται η f να παίρνει και την τιμή $+\infty$, αν και είναι σαφές ότι για να είναι

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d(\nu_1\times\nu_2) < \infty$$

πρέπει (και δεν αρκεί) $(\nu_1\times\nu_2)(\{(\omega_1,\omega_2) : f(\omega_1,\omega_2) = +\infty\}) = 0$, δηλαδή το μέτρο των σημείων (ω_1,ω_2) για τα οποία $f(\omega_1,\omega_2) = +\infty$ να είναι 0 ή, ισοδύναμα, $f < +\infty$, $\nu_1\times\nu_2$–σχεδόν παντού.

Το Θεώρημα Tonelli λέγεται και «Θεώρημα Fubini για θετικές συναρτήσεις». Η ισχύς του φαίνεται από το γεγονός ότι μας «επιτρέπει» την αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης **για οποιαδήποτε** μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f, με την προϋπόθεση ότι τα δύο επιμέρους μέτρα ν_1 και ν_2 είναι σ-πεπερασμένα. Το μέτρο Lebesgue, λ, είναι σ-πεπερασμένο, κάθε πεπερασμένο μέτρο είναι σ-πεπερασμένο και, φυσικά, κάθε μέτρο πιθανότητας είναι σ-πεπερασμένο, άρα η εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης γίνεται «σχεδόν πάντα» στις ενδιαφέρουσες περιπτώσεις.

Πόρισμα 8.8 Έστω $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\nu_1)$ και $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\nu_2)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, και $f : \Omega_1\times\Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ (το σύνολο των μιγαδικών αριθμών) μία $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$–μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f| d(\nu_1\times\nu_2) < \infty$$

αν και μόνο αν

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(\omega_1,\omega_2)| d\nu_2(\omega_2)\right) d\nu_1(\omega_1) < \infty$$

αν και μόνο αν

$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(\omega_1,\omega_2)| d\nu_1(\omega_1)\right) d\nu_2(\omega_2) < \infty.$$

Όταν η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται γράφουμε για συντομία $f \in L^1(\nu_1 \times \nu_2)$. [Αυτό σημαίνει ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** ως προς $\nu_1 \times \nu_2$.]

Θεώρημα (Fubini) Αν $f \in L^1(\nu_1 \times \nu_2)$ (εννοείται πως η f είναι $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμη μιγαδική συνάρτηση) τότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\nu_1 \times \nu_2) &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\nu_2(\omega_2) \right) d\nu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\nu_1(\omega_1) \right) d\nu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

[Δηλ. μπορεί να δειχθεί ότι όλα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται παραπάνω είναι καλά ορισμένα, και παριστάνουν τον ίδιο μιγαδικό αριθμό.]

Αξίζει να σημειωθεί ότι μία μιγαδική συνάρτηση $f = u + iv$ (όπου u και v οι (πραγματικές) συναρτήσεις που δηλώνουν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της f) είναι, εξ' ορισμού, μετρήσιμη όταν οι u και v είναι μετρήσιμες, και τότε

$$\int f \overset{\text{ορ.}}{=\!=} \int u + i \int v,$$

με την προϋπόθεση ότι οι u και v είναι ολοκληρώσιμες (δηλ. $\int |u| < \infty$ και $\int |v| < \infty$), οπότε η f καλείται ολοκληρώσιμη επίσης. Η προϋπόθεση αυτή είναι ισοδύναμη με την $\int |f| < \infty$, διότι $|u| \leq |f| \leq |u| + |v|$ και $|v| \leq |f| \leq |u| + |v|$, αφού $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$, βλ. Πρόταση 8.3(i).

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Fubini, σε συνδυασμό με το Πόρισμα 8.8, για να εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης μίας $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$–μετρήσιμης μιγαδικής συνάρτησης f (εφ' όσον έχουμε σ-πεπερασμένα μέτρα ν_1 και ν_2), είναι αρκετό να ελέγξουμε μία από τις (ισοδύναμες) συνθήκες

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| d\nu_2(\omega_2) \right) d\nu_1(\omega_1) < \infty, \quad \text{ή}$$
$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(\omega_1, \omega_2)| d\nu_1(\omega_1) \right) d\nu_2(\omega_2) < \infty.$$

Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπεται στο Κεφάλαιο 9 των Κουμουλλή και Νεγρεπόντη (1988).

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Fubini, και πολύ χρήσιμο για τα επόμενα.

Λήμμα 8.9

$$\lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{8.4}$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^c \sin x \left(\int_0^\infty e^{-tx} dt \right) dx. \tag{8.5}$$

Επειδή

$$\int_0^c \int_0^\infty |e^{-tx} \sin x| dt dx = \int_0^c |\sin x| \int_0^\infty e^{-tx} dt dx = \int_0^c \frac{|\sin x|}{|x|} dx \le c < \infty,$$

μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης στην (8.5), σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini, οπότε

$$\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \left(\int_0^c e^{-tx} \sin x dx \right) dt. \tag{8.6}$$

Παρατηρούμε ότι[4]

$$\int_0^c e^{-tx} \sin x dx = \frac{1}{1+t^2}(1 - e^{-tc}(t \sin c + \cos c)), \tag{8.7}$$

η οποία αποδεικνύεται εύκολα δείχνοντας ότι και τα δύο μέλη ταυτίζονται (μηδενίζονται) για $c = 0$, ενώ έχουν παράγωγο $e^{-tc} \sin c$. Θέτοντας την (8.7) στην (8.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^c \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}(1 - e^{-tc}(t \sin c + \cos c)) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^\infty \frac{e^{-tc}(t \sin c + \cos c)}{1+t^2} dt \\
&= \frac{\pi}{2} - g(c),
\end{aligned}$$

όπου

$$g(c) = \int_0^\infty \frac{e^{-tc}(t \sin c + \cos c)}{1+t^2} dt.$$

Αρκεί να δειχθεί ότι $g(c) \to 0$, καθώς $c \to +\infty$. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
|g(c)| &\leq \int_0^\infty \frac{e^{-tc}}{1+t^2} |t \sin c + \cos c| dt \leq \int_0^\infty \frac{1+t}{1+t^2} e^{-tc} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{c+u}{c^2+u^2} e^{-u} du \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2c} \to 0, \quad \text{καθώς } c \to +\infty.
\end{aligned}$$

[Χρησιμοποιήθηκε η εύκολα αποδεικνυόμενη ανισότητα $f_c(u) =$

[4] Η (8.7) μπορεί να δειχθεί και άμεσα, κάνοντας δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις, ή και έμμεσα, εξισώνοντας τα φανταστικά μέρη της ταυτότητας $\int_0^c e^{-tx} \cos x dx + i \int_0^c e^{-tx} \sin x dx = \int_0^c e^{(i-t)x} dx = (e^{(i-t)c} - 1)/(i - t)$.

$(c+u)/(c^2+u^2) \leq (1+\sqrt{2})/(2c)$, η οποία ισχύει για $u \geq 0$.]

$\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 8.10 (Τύπος Αντιστροφής της χαρακτηριστικής συνάρτησης) Αν η τ.μ. X έχει σ.κ. F_X και χ.σ. φ_X, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$, με $a < b$,[5]

$$\begin{aligned}\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt &= \frac{1}{2}[F_X(b)+F_X(b_-)-F_X(a)-F_X(a_-)] \\ &= \mathbb{P}(a<X<b)+\frac{1}{2}[\mathbb{P}(X=a)+\mathbb{P}(X=b)].\end{aligned}$$

Απόδειξη: Για $c > 0$ θέτουμε

$$I_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dF_X(x)\right)dt. \tag{8.8}$$

Όμως, για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$, $|e^{itx}| = |e^{-itx}| = 1$, οπότε

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right| = \left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| = \left|\int_a^b e^{-itx}dx\right| \leq \int_a^b dx = b-a,$$

και τελικά,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}\right| dF_X(x)dt \leq \frac{c}{\pi}(b-a) < \infty.$$

[5] Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $t \mapsto (e^{-ita}-e^{-itb})/(it)$ είναι συνεχής και στο σημείο $t=0$, με τιμή $b-a$, και ότι το όριο ισούται με $F_X(b)-F_X(a) = \mathbb{P}(a<X\leq b)$, όταν τα a και b είναι σημεία συνεχείας της F_X.

Επομένως (βλ. Πόρισμα 8.8), μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini, στην (8.8), παίρνοντας

$$I_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dt \right) dF_X(x). \qquad (8.9)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $x \mapsto g_c(x)$, η οποία ορίζεται ως

$$g_c(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} f(x,t) dt,$$

με

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} = \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} \\ &= \frac{1}{it}[\cos t(x-a) - \cos t(x-b)] + \frac{1}{t}[\sin t(x-a) - \sin t(x-b)] \\ &= \frac{1}{i} f_1(x,t) + f_2(x,t), \end{aligned}$$

όπου[6]

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= \frac{1}{t}[\cos t(x-a) - \cos t(x-b)], \\ f_2(x,t) &= \frac{1}{t}[\sin t(x-a) - \sin t(x-b)]. \end{aligned}$$

Προφανώς η $f_1(x,t)$ είναι περιττή ως προς t, ενώ η $f_2(x,t)$ είναι άρτια. Άρα,[7]

$$g_c(x) = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^c f_2(x,t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^c \frac{\sin t(x-a)}{t} dt - \int_0^c \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \right].$$

[6] Παρατηρήστε ότι για σταθερό $x \in \mathbb{R}$, οι $f_1(x,t)$ και $f_2(x,t)$ είναι συνεχείς ως προς t, και στο σημείο $t = 0$, με τιμή 0 και $b - a$, αντίστοιχα.

[7] Αυτή η μορφή της g_c δείχνει ότι ο $g_c(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, και συνεπώς το $I_c = \mathbb{E}[g_c(X)]$ (του οποίου το όριο, καθώς $c \to +\infty$, προσπαθούμε να υπολογίσουμε) είναι, επίσης, πραγματικός αριθμός.

Με την αντικατάσταση $t(x-a)=u$, και $t(x-b)=u$, στα δύο τελευταία ολοκληρώματα, έχουμε

$$g_c(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\pi}\int_0^{|x-a|c}\frac{\sin u}{u}du-\frac{\operatorname{sgn}(x-b)}{\pi}\int_0^{|x-b|c}\frac{\sin u}{u}du, \tag{8.10}$$

όπου $\operatorname{sgn}(t)=\left\{\begin{array}{rl}0, & \text{αν } t=0\\ 1, & \text{αν } t>0\\ -1, & \text{αν } t<0\end{array}\right\}=I_{(0,+\infty)}(t)-I_{(-\infty,0)}(t)$,

η συνάρτηση προσήμου.[8]

Από την (8.4) έπεται ότι

$$\lim_{c\to+\infty}g_c(x)=\left\{\begin{array}{ll}0, & \text{αν } x<a \text{ ή } x>b\\ 1/2, & \text{αν } x=a \text{ ή } x=b\\ 1, & \text{αν } a<x<b\end{array}\right\}=I_{(a,b)}(x)+\frac{1}{2}[I_{\{a\}}(x)+I_{\{b\}}(x)]=g(x). \tag{8.11}$$

Επειδή η συνάρτηση $x\mapsto\int_0^x\frac{\sin u}{u}du$, $x\in[0,+\infty)$, είναι συνεχής, με τιμές 0 και $\pi/2$ για $x=0$ και $x=+\infty$ (δηλ., καθώς $x\to+\infty$), έπεται ότι

$$\sup_{x\geq 0}\left|\int_0^x\frac{\sin u}{u}du\right|=m<+\infty.$$

Άρα, $\sup_x|g_c(x)|\leq 2m/\pi<+\infty$, και προφανώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2m}{\pi}dF_X(x)=\frac{2m}{\pi}<+\infty.$$

---

[8] Παρατηρήστε ότι $\int_0^c(\sin\theta t/t)dt=\int_0^{\theta c}(\sin u/u)du$ όταν $\theta>0$, ενώ για $\theta<0$, $\int_0^c(\sin\theta t/t)dt=-\int_0^c(\sin(-\theta t)/t)dt=-\int_0^{-\theta c}(\sin u/u)du$. Φυσικά, για $\theta=0$, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με το 0. Έτσι, γράφουμε $\int_0^c(\sin\theta t/t)dt=\operatorname{sgn}(\theta)\int_0^{|\theta|c}(\sin u/u)du$, μία σχέση που ικανοποιείται για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$.

Επομένως, αφού $\lim_{c\to+\infty} g_c(x) = g(x)$, και $|g_c(x)| \leq 2m/\pi$, με $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{\pi} dF_X(x) < \infty$, έπεται από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Πρόταση 8.3(iii)) ότι

$$\begin{aligned}\lim_{c\to+\infty} I_c &= \lim_{c\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_c(x)dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dF_X(x)\\ &= \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{P}(a < X < b) + \frac{1}{2}[\mathbb{P}(X=a) + \mathbb{P}(X=b)],\end{aligned}$$

δηλαδή η αποδεικτέα. □

Το Θεώρημα 8.10 είναι πολύ βασικό διότι μας εξασφαλίζει το μονοσήμαντο της $\chi.\sigma.$, όπως φαίνεται στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 8.11 (Μονοσήμαντο της χαρακτηριστικής συνάρτησης) Αν οι X και Y είναι τ.μ. με $\sigma.\kappa.$ F_X και F_Y, και $\chi.\sigma.$ φ_X και φ_Y, τότε

$$F_X(x) = F_Y(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } \varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Αν $F_X = F_Y$ τότε, προφανώς, $\varphi_X = \varphi_Y$. Αντίστροφα, αν $\varphi_X = \varphi_Y$, τότε για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και b (με $a < b$), που είναι σημεία συνεχείας των F_X και F_Y (και των δύο), προκύπτει από το Θεώρημα 8.10 ότι

$$F_X(b) - F_X(a) = F_Y(b) - F_Y(a).$$

Παίρνοντας όρια για $a \to -\infty$ (από τιμές του a που είναι σημεία συνεχείας τόσο της F_X όσο και της F_Y), έπεται ότι $F_X(b) = F_Y(b)$ για κάθε σημείο συνεχείας b των F_X και F_Y, δηλαδή το ζητούμενο (πρβλ. και απόδειξη της Πρότασης ;;). □

8.3 Θεώρημα Συνεχείας

Εκείνο που καθιστά την $\chi.\sigma.$ ένα ισχυρό εργαλείο για την μελέτη της ασθενούς σύγκλισης ακολουθίας τ.μ. είναι το γεγονός ότι $F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F$ αν και μόνο αν $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ κατά σημείο, όπου φ_n και φ οι $\chi.\sigma.$ των F_n και F (θεώρημα Συνεχείας των $\chi.\sigma.$). Για να αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα θα χρειαστούμε μία καινούρια έννοια και μερικά βοηθητικά αποτελέσματα.

Ορισμός 8.12 (σφιχτή ακολουθία τυχαίων μεταβλητών) Η ακολουθία σ.κ. $\{F_n,\ n \geq 1\}$ (ή η αντίστοιχη ακολουθία τ.μ. $\{X_n,\ n \geq 1\}$) θα καλείται **σφιχτή** (tight) όταν έχει την εξής ιδιότητα:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει πεπερασμένο διάστημα $(a, b]$, έτσι ώστε

$$\mathbb{P}\left(X_n \in (a, b]\right) > 1 - \varepsilon, \text{ για κάθε } n.$$

Ισοδύναμα:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχουν } x \text{ και } y, \text{ τέτοια ώστε}$$
$$F_n(x) < \varepsilon \text{ και } F_n(y) > 1 - \varepsilon, \text{ για κάθε } n.$$

Η ιδιότητα της σφιχτότητας (tightness) μας εξασφαλίζει ότι δεν θα συμβεί το ανεπιθύμητο φαινόμενο να «χάνεται» κάποιο μέρος της πιθανότητας στο άπειρο, καθώς $n \to \infty$, και είναι μία ιδιότητα αντίστοιχη του φραγμένου για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ κεντρικό και με πολλές εφαρμογές στην ανάλυση (ιδιαίτερα η μέθοδος απόδειξής του). Το διατυπώνουμε εδώ στην μορφή που θα χρησιμοποιηθεί στην συνέχεια.

Θεώρημα 8.13 (Helly) Αν η ακολουθία σ.κ. $\{F_n,\ n \geq 1\}$ είναι σφιχτή, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$, και σ.κ. F, έτσι ώστε

$$F_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{d}} F, \quad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Απόδειξη: Έστω $\{r_1, r_2, \ldots\}$ μία αρίθμηση των ρητών. Προφανώς, $F_n(r_1) \in [0,1]$ για $n = 1, 2, \ldots$, και επομένως, η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{F_n(r_1),\ n \geq 1\}$, θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Διαλέγουμε μία τέτοια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $F_{n,1}(r_1)$. Έτσι, κατασκευάσαμε μία υπακολουθία σ.κ. $\{F_{n,1}(x),\ n \geq 1\}$, για την οποία $F_{n,1}(r_1) \to a_1 \in [0,1]$. Θεωρούμε τώρα την $F_{n,1}(r_2)$, η οποία, με την σειρά της, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $F_{n,2}(r_2)$. Επομένως, $F_{n,2}(r_2) \to a_2 \in [0,1]$, και ταυτόχρονα, $F_{n,2}(r_1) \to a_1$, ως υπακολουθία της $F_{n,1}(r_1)$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $r_1 < r_2$ τότε $a_1 \leq a_2$, ενώ αν $r_1 > r_2$ τότε $a_1 \geq a_2$. Επαγωγικά, για κάθε $k = 2, 3, \ldots$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία υπακολουθία $\{F_{n,k}(r_k)\} \subset \{F_{n,k-1}(r_k)\}$, με την ιδιότητα $F_{n,k}(r_j) \to a_j$, καθώς $n \to \infty$, για $j = 1, 2, \ldots, k$, και μάλιστα, τα a_j θα έχουν την ίδια μονοτονία με τα r_j. Θεωρούμε την συνάρτηση $\widetilde{F}(x)$, η οποία ορίζεται πρώτα στους ρητούς ως

$$\widetilde{F}(r_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

και στην συνέχεια την επεκτείνουμε (κατά αυθαίρετο τρόπο προς το παρόν) και στους άρρητους, ως

$$\widetilde{F}(x) = \inf\{\widetilde{F}(r_i),\ r_i \geq x\}.$$

Η $\widetilde{F}$ δεν γνωρίζουμε αν είναι σ.κ., είναι όμως αύξουσα, γιατί η $\widetilde{F}$ είναι αύξουσα στους ρητούς, και, από τον ορισμό της, διατηρεί αυτή την ιδιότητα και στους άρρητους.

Θεωρούμε τώρα την «διαγώνια» υπακολουθία $\{F_{n,n}\} \subset \{F_n\}$. Τότε, $F_{n,n}(r_i) \to \widetilde{F}(r_i) = a_i$, καθώς $n \to \infty$, **για κάθε** ρητό r_i, διότι, από κατασκευή, η $F_{n,n}$ αποτελείται από όρους της $F_{n,i}$, όταν $n \geq i$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{F}(x) = 1$ και $\lim_{x\to-\infty} \widetilde{F}(x) = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι η $\{F_{n,n},\ n \geq 1\}$ είναι σφιχτή (ως υπακολουθία της $\{F_n,\ n \geq 1\}$), και άρα, υπάρχει $x_0 = x_0(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε $F_{n,n}(x_0) < \varepsilon$ για κάθε n, και υπάρχει $y_0 = y_0(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε $F_{n,n}(y_0) > 1 - \varepsilon$ για κάθε n. Αν εκλέξουμε έναν ρητό $r_i \leq x_0$, τότε $F_{n,n}(r_i) < \varepsilon$, και άρα, $\widetilde{F}(r_i) = \lim_n F_{n,n}(r_i) \leq \varepsilon$. Ομοίως, για κάθε ρητό $r_j \geq y_0$, $\widetilde{F}(r_j) = \lim_n F_{n,n}(r_j) \geq 1 - \varepsilon$. Επομένως, αφού

$0 \leq \widetilde{F}(x) \leq 1$ για κάθε x, έπεται ότι $\widetilde{F}(x) \leq \varepsilon$ για κάθε $x < x_0$, και $\widetilde{F}(x) \geq 1-\varepsilon$ για κάθε $x > y_0$ (και το $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν), άρα, $\widetilde{F}(-\infty) = 0$, και $\widetilde{F}(+\infty) = 1$.

Έστω τώρα x ένα σημείο συνεχείας της $\widetilde{F}$. Τότε $F_{n,n}(x) \to \widetilde{F}(x)$. Πράγματι, αν εκλέξουμε ένα $h > 0$, με $\widetilde{F}(x+h) - \widetilde{F}(x-h) < \varepsilon$, και δύο ρητούς $r_i,\ r_j$, τέτοιους ώστε $x - h < r_i < x < r_j < x + h$, τότε προκύπτει, από την μονοτονία της $\widetilde{F}$, ότι

$$F_{n,n}(x) - \widetilde{F}(x) \leq F_{n,n}(r_j) - \widetilde{F}(r_i) \to \widetilde{F}(r_j) - \widetilde{F}(r_i) \leq \widetilde{F}(x+h) - \widetilde{F}(x-h) < \varepsilon,$$

και, ομοίως,

$$\widetilde{F}(x) - F_{n,n}(x) \leq \widetilde{F}(r_j) - F_{n,n}(r_i) \to \widetilde{F}(r_j) - \widetilde{F}(r_i) \leq \widetilde{F}(x+h) - \widetilde{F}(x-h) < \varepsilon,$$

δηλαδή,

$$|F_{n,n}(x) - \widetilde{F}(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{όταν } n > n_0.$$

Θέτουμε τώρα

$$F(x) = \widetilde{F}(x_+) = \lim_n \widetilde{F}\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Προφανώς $F = \widetilde{F}$ στα σημεία συνεχείας της $\widetilde{F}$, και άρα η F (που είναι δεξιά συνεχής) είναι *σ.κ.* Επίσης, αφού οι F και $\widetilde{F}$ έχουν τα ίδια σημεία συνεχείας, έχουμε

$$F_{n,n}(x) \to \widetilde{F}(x) = F(x),$$

για κάθε σημείο συνεχείας x της F, δηλαδή

$$F_{n,n} \xrightarrow{\mathbf{d}} F. \quad \square$$

Πόρισμα 8.14 Αν η ακολουθία σ.κ. $\{F_n,\ n \geq 1\}$ είναι σφιχτή, και αν κάθε υπακολουθία $\{F_{n_k},\ k \geq 1\} \subset \{F_n,\ n \geq 1\}$ που συγκλίνει ασθενώς, συγκλίνει προς **την ίδια** σ.κ. F, τότε

$$F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι, αντιθέτως, $F_n \stackrel{\mathbf{d}}{\nrightarrow} F$. Άρα, υπάρχει σημείο συνεχείας x της F, και $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε

$$|F_n(x) - F(x)| \geq \varepsilon \ \text{ για άπειρα } n.$$

Ας μαζέψουμε αυτά τα άπειρα n στην υπακολουθία $\{n_1, n_2, \ldots\}$. Τότε για την υπακολουθία $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$ θα έχουμε

$$|F_{n_k}(x) - F(x)| \geq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{8.12}$$

Η $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$ είναι σφιχτή, ως υπακολουθία της $\{F_n,\ n \geq 1\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 8.13, υπάρχει σ.κ. $\widetilde{F}$, και υπακολουθία $\{F_{n_{k(i)}},\ i \geq 1\} \subset \{F_{n_k},\ k \geq 1\}$, έτσι ώστε

$$F_{n_{k(i)}} \xrightarrow{\mathbf{d}} \widetilde{F}, \quad \text{καθώς } i \to \infty.$$

Επειδή όμως $\{F_{n_{k(i)}},\ i \geq 1\} \subset \{F_n,\ n \geq 1\}$, και η $\{F_{n_{k(i)}},\ i \geq 1\}$ συγκλίνει ασθενώς, έπεται από την υπόθεση ότι

$$F_{n_{k(i)}} \xrightarrow{\mathbf{d}} F, \quad \text{καθώς } i \to \infty.$$

Επομένως, αφού το x είναι σημείο συνεχείας της F, θα ισχύει ότι $F_{n_{k(i)}}(x) \to F(x)$, καθώς $i \to \infty$. Αυτό είναι άτοπο διότι, από την (8.12),

$$\left|F_{n_{k(i)}}(x) - F(x)\right| \geq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots . \quad \square$$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το παρακάτω θεμελιώδες θεώρημα.

Θεώρημα 8.15 (Συνεχείας των χαρακτηριστικών συναρτήσεων) Θεωρούμε τις *σ.κ.* $\{F_n,\ n \geq 1\}$ και F, με αντίστοιχες *χ.σ.* $\{\varphi_n,\ n \geq 1\}$ και φ. Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχουμε

$$F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F$$

είναι η

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη: Το ευθύ είναι πολύ εύκολο. Πράγματι, αν $F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F$, τότε για κάθε σταθερό $t \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\cos tX_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \cos tX$, και $\sin tX_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \sin tX$ (όπου X_n και X είναι οι αντίστοιχες τ.μ., με *σ.κ.* F_n και F), διότι οι συναρτήσεις $x \mapsto \cos tx$ και $x \mapsto \sin tx$ είναι συνεχείς – βλ. Άσκηση ;;.3(β). Επειδή, προφανώς, $|\cos tX_n| \leq 1$, και $|\sin tX_n| \leq 1$, προκύπτει, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Θεώρημα ;;), ότι

$$\mathbb{E}(\cos tX_n) \to \mathbb{E}(\cos tX), \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(\sin tX_n) \to \mathbb{E}(\sin tX),$$

δηλαδή,

$$\mathbb{E}(e^{itX_n}) = \mathbb{E}(\cos tX_n)+i\mathbb{E}(\sin tX_n) \to \mathbb{E}(\cos tX)+i\mathbb{E}(\sin tX) = \mathbb{E}(e^{itX}),$$

όπως έπρεπε να δειχθεί.

Για το αντίστροφο θα δείξουμε πρώτα ότι η σύγκλιση της ακολουθίας των χ.σ. $\varphi_n(t)$ προς την χ.σ. $\varphi(t)$ (που, όπως κάθε χ.σ., είναι συνεχής στο 0), συνεπάγεται ότι η ακολουθία των αντιστοίχων σ.κ., $\{F_n,\ n \geq 1\}$, είναι σφιχτή. Για τον σκοπό αυτό σταθεροποιούμε ένα $u > 0$, και θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))dt = \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos tx-i\sin tx)dF_n(x)dt. \tag{8.13}$$

Επειδή $\int_{-u}^{u}\int_{-\infty}^{+\infty}|1-e^{itx}|dF_n(x)dt \leq 4u < \infty$, μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης στην (8.13), σύμφωνα με το Θεώρημα Fubini, παίρνοντας[9]

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))dt &= \frac{1}{u}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(2u - \frac{2}{x}\sin ux\right)dF_n(x)\\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)dF_n(x)\\ &\geq 2\int_{|x|\geq\frac{2}{u}}\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)dF_n(x)\\ &\geq 2\int_{|x|\geq\frac{2}{u}}\left(1-\frac{1}{|ux|}\right)dF_n(x)\\ &\geq \int_{|x|\geq\frac{2}{u}}dF_n(x) = \mathbb{P}\left(|X_n| \geq \frac{2}{u}\right),\end{aligned}$$

[9] Η πρώτη ισότητα δείχνει ότι το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός.

όπου στα προηγούμενα χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες

$$\frac{\sin ux}{ux} \le \left|\frac{\sin ux}{ux}\right| \le 1, \quad (\text{διότι } |\sin t| \le |t|)$$

$$\frac{\sin ux}{ux} \le \frac{1}{ux} = \frac{1}{|ux|}, \quad \text{για } x \ge 2/u, \quad (\text{προφανής}) \text{ και}$$

$$\frac{\sin ux}{ux} = \frac{\sin(u(-x))}{u(-x)} \le \frac{1}{u(-x)} = \frac{1}{|ux|}, \quad \text{για } x \le -2/u. \quad (\text{από την προηγούμενη})$$

Επειδή η φ, ως $\chi.\sigma.$, είναι συνεχής στο 0 (και παντού αλλού), και $\varphi(0) = 1$, έπεται ότι για κάθε δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $u = u(\varepsilon) > 0$ (αρκετά μικρό), για το οποίο[10]

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(t))dt < \varepsilon.$$

Όμως $\varphi_n \to \varphi$ (από υπόθεση), και $|1-\varphi_n| \le 2$ (πάντα), και $\int_{-u}^{u} 2dt = 4u < \infty$ (προφανώς), άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))dt \to \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi(t))dt < \varepsilon,$$

δηλαδή,

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))dt \le \varepsilon, \quad \text{όταν } n > n_0(\varepsilon, u(\varepsilon)).$$

Επομένως, για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $u = u(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}\left(|X_n| \ge \frac{2}{u}\right) \le \varepsilon, \quad \text{όταν } n > n_0(\varepsilon, u(\varepsilon)).$$

[10] Ας σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι, επίσης, μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, και μάλιστα, το $\int_{-u} u(1-\varphi(t))dt$ είναι ένα άνω φράγμα της ποσότητας $u\mathbb{P}(|X| \ge 2/u)$.

Συνεπώς, μεγαλώνοντας το κι άλλο το $2/u$ (αν χρειαστεί), μπορούμε να βρούμε ένα $M > 0$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq M) \leq \varepsilon, \quad \text{για } n = 1, 2, \dots\ .$$

Άρα, η $\{F_n,\ n \geq 1\}$ είναι σφιχτή. Επομένως, υπάρχει υπακολουθία $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$, και σ.κ. $\widetilde{F}$, έτσι ώστε

$$F_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{d}} \widetilde{F}, \quad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Αρκεί να δείξουμε, λόγω του Πορίσματος 8.14, ότι κάθε υπακολουθία $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$ που συγκλίνει ασθενώς, συγκλίνει προς την F. Πράγματι, έστω $\{F_{n_k},\ k \geq 1\}$ μία υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς, και ας πούμε ότι συγκλίνει στην $\widetilde{F}$. Τότε, λόγω του πρώτου μέρους που αποδείξαμε στην αρχή, θα έχουμε

$$\varphi_{n_k}(t) \to \widetilde{\varphi}(t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

όπου $\widetilde{\varphi}$ είναι η $\chi.\sigma.$ της $\widetilde{F}$. Ταυτόχρονα όμως θα έχουμε ότι και

$$\varphi_{n_k}(t) \to \varphi(t), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

αφού $\{\varphi_{n_k},\ k \geq 1\} \subset \{\varphi_n,\ n \geq 1\}$, και υποθέσαμε ότι $\varphi_n \to \varphi$. Άρα, $\widetilde{\varphi} = \varphi$, και από το Μονοσήμαντο (Πόρισμα 8.11), $\widetilde{F} = F$. $\square$

Στο Θεώρημα 8.15 απαιτείται όπως η συνάρτηση φ, προς την οποίαν συγκλίνουν οι $\chi.\sigma.$ φ_n, είναι και η ίδια $\chi.\sigma.$ Υπάρχουν ανάλογα θεωρήματα συνεχείας που δεν απαιτούν η $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$ να είναι $\chi.\sigma.$ κάποιας $\sigma.\kappa.$ Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες με την παραπάνω, και δεν θα δοθούν εδώ, ούτε θα μας χρειαστούν στην συνέχεια. Αναφέρουμε για πληρότητα το εξής θεώρημα, η απόδειξη του οποίου υπάρχει στον Billingsley, 1986, σελ. 360.

Θεώρημα 8.16 Ας υποθέσουμε ότι η $\{F_n,\ n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία $\sigma.\kappa.$, με $\chi.\sigma.$ $\{\varphi_n,\ n \geq 1\}$, και έστω ότι $\lim_n \varphi_n(t) =$

$\varphi(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. [Η φ δεν υποτέθηκε $\chi.\sigma.$, αλλά είναι, απλά, το κατά σημείο όριο των $\chi.\sigma.$ φ_n, το οποίο υποτίθεται πως υπάρχει.] Τότε, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει $\sigma.\kappa.$ F τέτοια ώστε $F_n \xrightarrow{\mathbf{d}} F$ είναι η εξής:

(i) Η οριακή συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$.

Μία δεύτερη ικανή συνθήκη είναι η εξής:

(ii) Η ακολουθία $\{F_n,\ n \geq 1\}$ είναι σφιχτή.

Όταν η (i) ή η (ii) ικανοποιείται, τότε η ϕ είναι η $\chi.\sigma.$ της οριακής $\sigma.\kappa.$ F.

Παράδειγμα 8.17 Εάν η F_n είναι η $\sigma.\kappa.$ της ομοιόμορφης τ.μ. στο διάστημα $(-n, n)$, τότε η $\chi.\sigma.$ δίδεται από την σχέση:

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin(nt)}{nt} \to \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{αν } t \neq 0 \\ 1, & \text{αν } t = 0 \end{array} \right\} = \varphi(t).$$

Σε αυτήν την περίπτωση η οριακή συνάρτηση φ δεν είναι $\chi.\sigma.$ (αφού είναι ασυνεχής στο 0), η ακολουθία $\{F_n,\ n \geq 1\}$ δεν είναι σφιχτή (η πιθανότητα «χάνεται» στο $\pm\infty$), και, τελικά, δεν έχουμε σύγκλιση προς κάποια $\sigma.\kappa.$ F. $\square$

8.4 Σχέση Χαρακτηριστικής Συνάρτησης και Ροπών

Η $\chi.\sigma.$ φ_X της τ.μ. X συνδέεται με τις ροπές, $\mathbb{E}(X^k)$, της X (εφ' όσον υπάρχουν) κατά τρόπο ανάλογο με την ροπογεννήτρια της X, $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$, μόνο που για να είναι χρήσιμη η τελευταία (και να χαρακτηρίζει την αντίστοιχη $\sigma.\kappa.$), πρέπει να υπάρχει κάποια (μικρή) περιοχή του μηδενός, έστω $(-\varepsilon, \varepsilon)$, τέτοια ώστε $M_X(t) < +\infty$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Αποδεικνύεται όμως ότι αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε η $M_X(t)$ να είναι πεπερασμένη για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, τότε **όλες** οι ροπές πρέπει να είναι πεπερασμένες (δηλ. $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ για κάθε $k = 1, 2 \ldots$), και μάλιστα, ούτε καν το αντίστροφο ισχύει, δηλαδή υπάρχει τ.μ. X, με $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ για $k = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε η $M_X(t)$ να είναι πεπερασμένη μόνο στο $t = 0$ (δηλ., $\mathbb{E}(e^{tX}) = +\infty$ για κάθε $t \neq 0$). Αυτές οι παρατηρήσεις καταδεικνύουν την **υπεροχή** της $\chi.\sigma.$ (που ορίζεται για κάθε τ.μ. και για κάθε $t \in \mathbb{R}$), σε σχέση με την ροπογεννήτρια, και εξηγούν τον λόγο για τον οποίον αναγκαζόμαστε, στις πιθανότητες, να μελετήσουμε τ.μ. με μιγαδικές τιμές. Το κοινό χαρακτηριστικό ροπογεννήτριας και $\chi.\sigma.$ είναι το γεγονός ότι μετασχηματίζουν την συνέλιξη σε γινόμενο, και αυτή η ιδιότητα οφείλεται, φυσικά, στην εκθετική συνάρτηση.

Στην συνέχεια, για να μελετήσουμε την σχέση μίας $\chi.\sigma.$ με τις αντίστοιχες ροπές, θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη ολοκληρωτική μορφή (τύπος Cauchy) για το υπόλοιπο Taylor της συνάρτησης e^{ix}, δηλ. για την διαφορά του εκθετικού e^{ix} από το αντίστοιχο προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor βαθμού k, $P_k(x) = \sum_{n=0}^{k}(ix)^n/n!$. Αν και οι τύποι αυτοί μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε σύγγραμμα απειροστικού λογισμού, εδώ θα αναπτύξουμε το θέμα από μία γενικότερη σκοπιά, η οποία έχει και ανεξάρτητο ενδιαφέρον. Για τον σκοπό αυτό, δίνουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 8.18 Έστω $g : [0, a) \longrightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου $a \in (0, +\infty]$. Για $x \in [0, a)$ θέτουμε

$$H_k(x) = H_k(x; g) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-y)^k g(y)dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots \,. \tag{8.14}$$

Για κάθε $k \geq 1$ ισχύει[11] η ισότητα

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-y)^k g(y)dy = \int_0^x \left[\frac{d}{dx}(x-y)^k\right] g(y)dy = k\int_0^x (x-y)^{k-1} g(y)dy,$$

και επομένως,

$$\frac{d}{dx}H_k(x) = H_k'(x) = H_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \,. \tag{8.15}$$

---

[11] «τύπος μεθυσμένου μαθηματικού», ο οποίος, κατά την παραγώγιση ως προς x, αγνόησε το x στο άνω όριο της ολοκλήρωσης

Απόδειξη: Από τον τύπο του διωνύμου του Newton έχουμε

$$\int_0^x (x-y)^k g(y)dy = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x^j \int_0^x y^{k-j} g(y)dy,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^x (x-y)^k g(y)dy &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{d}{dx}\left[x^j \int_0^x y^{k-j} g(y)dy\right] \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j x^{j-1} \int_0^x y^{k-j} g(y)dy \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x^j x^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j x^{j-1} \int_0^x y^{k-j} g(y)dy \\
&\quad + x^k g(x) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j}.
\end{aligned}$$

Προφανώς, το τελευταίο άθροισμα είναι το διωνυμικό ανάπτυγμα του $(1-1)^k$, και επειδή $k \geq 1$, ισούται με 0. Έτσι, χρησιμοποιώντας στο πρώτο άθροισμα την ταυτότητα

$$j\binom{k}{j} = k\binom{k-1}{j-1}, \qquad \text{(που ισχύει για } j \geq 1)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^x (x-y)^k g(y)dy &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j} j \binom{k}{j} x^{j-1}\int_0^x y^{k-j}g(y)dy \\
&= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j} j \binom{k}{j} x^{j-1}\int_0^x y^{k-j}g(y)dy \\
&= k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1} x^{j-1}\int_0^x y^{k-j}g(y)dy \\
&= k\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} x^{j}\int_0^x y^{k-1-j}g(y)dy \\
&= k\int_0^x \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{k-1}{j} x^j y^{k-1-j}\right] g(y)dy \\
&= k\int_0^x (x-y)^{k-1} g(y)dy,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει και πάλι από τον τύπο του διωνύμου. □

Παρατήρηση 8.19 (i) Είναι γνωστό ότι για δοθείσα συνεχή συνάρτηση $g : [0,a) \longrightarrow \mathbb{R}$, η συνάρτηση $G(x) = H_0(x) = \int_0^x g(y)dy$ είναι μία παράγουσα (δηλ. μία αντιπαράγωγος) της g, αφού $H_0'(x) = G'(x) = g(x)$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε συμβολικά $H_0 = g^{(-1)}$. Με διαδοχικές παραγωγίσεις και εφαρμογές της (8.15) προκύπτει ότι

$$H_k^{(k)} = H_{k-1}^{(k-1)} = H_{k-2}^{(k-2)} = \cdots = H_1' = H_0,$$

δηλ. $H_k^{(k)}(x) = \int_0^x g(y)dy$, και συνεπώς, η συνάρτηση H_k στην (8.14) είναι μία αντιπαράγωγος, τάξεως $k+1$, της g, δηλαδή $H_k^{(k+1)} = g$. Επομένως, η σχέση (8.14) μας επιτρέπει, με μία απλή ολοκλήρωση, να βρούμε μία έκφραση για μία αντιπαράγωγο $k+1$ τάξεως οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης g, και μπορούμε συμβολικά να γράφουμε $H_k = g^{(-k-1)}$. Προφανώς, κάθε άλλη αντιπαράγωγος της g τάξεως $k+1$, έστω H, θα διαφέρει από την H_k κατά ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού k, διότι $(H_k - H)^{(k+1)} = H_k^{(k+1)} - H^{(k+1)} = g - g \equiv 0$. Έτσι, η γενική μορφή της αντιπαραγώγου $k+1$ τάξεως της g είναι

$$g^{(-k-1)}(x) = H_k(x; g) + P_k(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου το P_k είναι τυχόν πολυώνυμο βαθμού το πολύ k, και η $H_k(x; g)$ δίδεται από την (8.14).

(ii) Αν η $g(x)$ ορίζεται στο $(-a, 0]$ (όπου $0 < a \le +\infty$), τότε η $H_k(x; g)$, όπως ορίζεται από την σχέση (8.14), εξακολουθεί να μας παρέχει μία έκφραση για μία $g^{(-k-1)}(x)$, δηλ. για μία αντιπαράγωγο, τάξεως $k+1$, της g. Εδώ θα πρέπει, ως συνήθως, να ερμηνεύσουμε το $\int_0^x$ ως $-\int_x^0$, όταν $x \le 0$. Πράγματι, θεωρώντας την συνεχή συνάρτηση $h(x) = g(-x)$, που ορίζεται στο $[0, a)$, έχουμε ότι $h^{(-k-1)}(x) = (-1)^{k+1} g^{(-k-1)}(-x)$, και

$h^{(-k-1)}(x) = H_k(x;h)$ για $x \geq 0$, από το Λήμμα 8.18. Έτσι,

$$\begin{aligned}
h^{(-k-1)}(x) = H_k(x;h) &= \frac{1}{k!}\int_0^x (x-y)^k h(y)dy = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-y)^k g(-y)dy \\
&= \frac{1}{k!}\int_{-x}^0 (x+y)^k g(y)dy = (-1)^k \frac{1}{k!}\int_{-x}^0 (-x-y)^k g(y)dy \\
&= (-1)^{k+1}\frac{1}{k!}\int_0^{-x} (-x-y)^k g(y)dy = (-1)^{k+1} H_k(-x;g),
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$g^{(-k-1)}(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-y)^k g(y)dy = H_k(x;g), \quad \text{για } x \leq 0.$$

(iii) Όταν η συνάρτηση $g(x)$ είναι ορισμένη για $x \leq 0$, η προηγούμενη παρατήρηση μας επιτρέπει να εκφράσουμε την $H_k(x) = H_k(x;g)$ ως $H_k(x) = (-1)^{k+1}H_k(-x;h)$, όπου $h(x) = g(-x)$. Επομένως, η σχέση (8.15), δηλ. η σχέση $H_k'(x) = H_{k-1}(x)$ (που, από το Λήμμα 8.18 ισχύει για $k \geq 1$ και $x \geq 0$), εξακολουθεί να ισχύει και όταν $x \leq 0$. Πράγματι, αν $k \geq 1$, από το Λήμμα 8.18 έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}H_k(x;g) &= \frac{d}{dx}(-1)^{k+1}H_k(-x;h) = (-1)^{k+1}\frac{d}{dx}H_k(-x;h) \\
&= (-1)^k H_{k-1}(-x;h) = H_{k-1}(x;g).
\end{aligned}$$

Θεώρημα 8.20 (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για το υπόλοιπο Taylor) Έστω $f = f_1 + if_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ τυχούσα συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, όπου το I είναι κάποιο διάστημα της μορφής $[0,a)$, ή $(-a,0]$, ή $(-a_1,a_2)$, όπου $a, a_1, a_2 \in (0,+\infty]$.

(i) Αν για κάποιο $k \geq 0$, οι (πραγματικές) συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν συνεχείς παραγώγους, $k+1$ τάξεως, στο I, τότε

$$f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-y)^k f^{(k+1)}(y) dy, \quad x \in I, \tag{8.16}$$

όπου $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) + i f_2^{(n)}(x)$, και $f_j^{(n)}(x) = (d^n/dx^n) f_j(x)$, $n = 0, 1, \ldots, k+1$, $j = 1, 2$. [Φυσικά, $f_j^{(0)} = f_j$, $j = 1, 2$, και $f^{(0)} = f$.]

(ii) Αν για κάποιο $k \geq 1$, οι (πραγματικές) συναρτήσεις f_1 και f_2 έχουν συνεχείς παραγώγους, k τάξεως, στο I, τότε

$$f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-y)^{k-1} (f^{(k)}(y) - f^{(k)}(0)) dy, \quad x \in I, \tag{8.17}$$

όπου $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, k)$ όπως στο (i).

Απόδειξη: Χωρίζοντας σε πραγματικά και φανταστικά μέρη, γίνεται φανερό ότι είναι αρκετό να αποδείξουμε τις ισότητες για πραγματικές συναρτήσεις $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν, π.χ., δεχθούμε ότι ισχύει η (8.17) ξεχωριστά για τις πραγματικές συναρτήσεις $f = f_1$ και $f = f_2$, τότε θα προκύψει ότι ισχύει και για την $f = f_1 + i f_2$, ως εξής:

$$f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \left[f_1(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n \right] + i \left[f_2(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} x^n \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-y)^{k-1}(f_1^{(k)}(y)-f_1^{(k)}(0))dy \\
&\quad + i\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-y)^{k-1}(f_2^{(k)}(y)-f_2^{(k)}(0))dy \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-y)^{k-1}\left\{\left[f_1^{(k)}(y)-f_1^{(k)}(0)\right]\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. +i\left[f_2^{(k)}(y)-f_2^{(k)}(0)\right]\right\} dy \\
&= \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-y)^{k-1}(f^{(k)}(y)-f^{(k)}(0))dy.
\end{aligned}$$

Για το (i) υποθέτουμε ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο τάξεως $k+1$, και θεωρούμε την συνάρτηση[12]

$$H_k(x) = H_k(x; f^{(k+1)}),$$

όπως στην (8.14) του Λήμματος 8.18. Από την Παρατήρηση 8.19(i)–(ii) προκύπτει ότι $H_k^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)$ για κάθε $x \in I$. Θέτοντας

$$R_k(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

παρατηρούμε ότι και $R_k^{(k+1)}(x) = f^{(k+1)}(x)$, δηλαδή,

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[R_k(x)-H_k(x)] = f^{(k+1)}(x)-f^{(k+1)}(x) \equiv 0, \text{ για κάθε } x \in I,$$

οπότε η συνάρτηση $P_k(x) = R_k(x) - H_k(x)$ είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ k. Αφού για κάθε $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ εί-

[12] παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος της (8.16) είναι ακριβώς η συνάρτηση $H_k(x; f^{(k+1)})$, όπως αυτή ορίζεται από την (8.14) του Λήμματος 8.18.

ναι[13] $R_k^{(j)}(0) = 0$, και, ομοίως, $H_k^{(j)}(0) = H_{k-j}(0) = 0$ (από το Λήμμα 8.18 – βλ. και Παρατήρηση 8.19(iii)), έπεται ότι $P_k^{(j)}(0) = 0$ για κάθε $j = 0, 1, \ldots, k$, και συνεπώς, $P_k(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Συνεπώς, $R_k(x) = H_k(x)$ για κάθε $x \in I$, που αποδεικνύει την (8.16).

Για το (ii) υποθέτουμε ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση, με συνεχή παράγωγο τάξεως k στο I, και, όπως στο Λήμμα 8.18, θεωρούμε την συνάρτηση[14]

$$H_{k-1}(x) = H_{k-1}(x; f^{(k)} - c), \quad \text{όπου } c = f^{(k)}(0).$$

Από το ίδιο λήμμα προκύπτει τότε ότι

$$H_{k-1}^{(j)}(x) = H_{k-1-j}(x), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

και συνεπώς,

$$H_{k-1}(0) = H'_{k-1}(0) = H''_{k-1}(0) = \cdots = H_{k-1}^{(k-1)}(0) = 0.$$

Επίσης,

$$H_{k-1}^{(k)}(x) = (H_{k-1}^{(k-1)}(x))' = H'_0(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0).$$

---

[13] Από τον ορισμό του, το προσεγγιστικό πολυώνυμο Taylor, βαθμού k, της f, είναι το πολυώνυμο $T_k(x) = T_k(x; f)$, για το οποίο ισχύει $T_k^{(j)}(0) = f^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, δηλ. το πολυώνυμο του οποίου η τιμή στο 0, καθώς και οι τιμές των πρώτων k παραγώγων του στο 0, συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές της f. Εύκολα αναγνωρίζεται ότι το πολυώνυμο Taylor, βαθμού k, που αντιστοιχεί στην f, είναι το $T_k(x; f) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(0)x^n/n!$.

[14] παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος της (8.17) είναι ακριβώς η συνάρτηση $H_{k-1}(x; f^{(k)} - c)$, $c = f^{(k)}(0)$, όπως αυτή ορίζεται από την (8.14) του Λήμματος 8.18.

Όμως και για το υπόλοιπο Taylor, R_k, ισχύουν ακριβώς τα ίδια:

$$R_k(0) = R_k'(0) = R_k''(0) = \cdots = R_k^{(k-1)}(0) = 0, \quad R_k^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0).$$

Επομένως, $(R_k - H_{k-1})^{(k)} \equiv 0$, που σημαίνει ότι το $R_k - H_{k-1} = P_{k-1}$ είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ $k-1$. Από τις συνθήκες

$$P_{k-1}^{(j)}(0) = R_k^{(j)}(0) - H_{k-1}^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

προκύπτει ότι $P_{k-1}(x) \equiv 0$, δηλαδή $R_k(x) = H_{k-1}(x)$ για κάθε $x \in I$, που αποδεικνύει την (8.17). $\square$

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε την παρακάτω (πολύ ειδική) εφαρμογή του Θεωρήματος 8.20.

Πόρισμα 8.21 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \{1, 2, \ldots\}$,

$$e^{ix} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(ix)^n}{n!} = \frac{i^k}{(k-1)!} \int_0^x (x-y)^{k-1}(e^{iy} - 1)dy \tag{8.18}$$

$$= \frac{i^{k+1}}{k!} \int_0^x (x-y)^k e^{iy} dy. \tag{8.19}$$

Απόδειξη: Άμεση εφαρμογή των (8.16) και (8.17), για $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (δηλ. $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$), και $I = \mathbb{R}$. $\square$

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, το οποίο περιγράφει την σύνδεση των ροπών της τ.μ. X με την αντίστοιχη $\chi.\sigma.$ φ.

Θεώρημα 8.22 (σχέση χαρακτηριστικής συνάρτησης και ροπών) Έστω X μία τ.μ. με $\chi.\sigma.$ φ.

(i) Αν $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$, τότε η φ είναι k φορές παραγωγίσιμη, και ισχύουν[15]

(α) $\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{itX})$,

(β) $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$,

(γ) $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) + o(t^k), \quad$ καθώς $t \to 0$,
όπου ο συμβολισμός $o(t^k)$, καθώς $t \to 0$, δηλώνει κάποια (οποιαδήποτε) μιγαδική συνάρτηση $f(t)$, τέτοια ώστε[16] $f(t)/t^k \to 0$, καθώς $t \to 0$.

(ii) Αν $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, και $\lim_k \left\{ |t|^k \frac{\mathbb{E}|X|^k}{k!} \right\} = 0$, τότε[17]

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

---

[15] Σύμφωνα με το (α), η ύπαρξη της ροπής, k τάξεως, για την τ.μ. X, μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τούς τελεστές της παραγώγισης, k τάξεως, ως προς t, και της μέσης τιμής, $\mathbb{E}$, ως προς την τ.μ. e^{itX}:

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}\left(\frac{d^k}{dt^k} e^{itX} \right).$$

[16] κάθε συνάρτηση $f(t)$ για την οποία $f(t)/t^k \to 0$ καθώς $t \to 0$ θεωρείται «αμελητέα» ως προς το t^k, καθώς $t \to 0$, και για τέτοιες συναρτήσεις έχει καθιερωθεί ο συμβολισμός $f(t) = o(t^k)$, αντί του ακριβέστερου $f(t) \in o(t^k)$, αφού η $o(t^k)$ είναι οικογένεια συναρτήσεων.

[17] Οι προϋποθέσεις μας εξασφαλίζουν ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή του e^{itX}, αθροίζοντας όρο προς όρο τις μέσες τιμές της αντίστοιχης δυναμοσειράς, $e^{itX} = \sum_{n=0}^{\infty} (itX)^n / n!$.

Απόδειξη: Από την (8.18) παίρνουμε αμέσως την ανισότητα

$$\left| e^{itx} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} x^n \right| \le \frac{2|t|^k}{k!} |x|^k. \tag{8.20}$$

Επομένως, όσον αφορά το (ii), έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \varphi(t) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) \right| &= \left| \mathbb{E}\left[e^{itX} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} X^n \right] \right| \\ &\le \mathbb{E}\left| e^{itX} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} X^n \right| \le \frac{2|t|^k}{k!} \mathbb{E}|X|^k \to 0, \end{aligned}$$

καθώς $k \to \infty$, δηλαδή,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n).$$

Για το (i), υποθέτουμε πρώτα ότι $\mathbb{E}|X| < \infty$. Τότε,

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \mathbb{E}(iXe^{itX}) = \mathbb{E}\left(e^{itX} \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} \right), \tag{8.21}$$

και, λόγω της (8.20) για $k = 1$,

$$\left| e^{itX} \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} \right| = \left| \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} \right| \le 2|X|, \tag{8.22}$$

με $\mathbb{E}(2|X|) = 2\mathbb{E}|X| < \infty$. Προφανώς,

$$\lim_{h \to 0} e^{itX} \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} = e^{itX} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} = 0,$$

οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Πρόταση 8.3(iii)), έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left(e^{itX} \frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} \right) \to \mathbb{E}(0) = 0, \quad \text{καθώς } h \to 0.$$

Επομένως, παίρνοντας όρια για $h \to 0$ στην (8.21), προκύπτει ότι $\varphi'(t) = \mathbb{E}(iXe^{itX})$, και φυσικά, $\varphi'(0) = i\mathbb{E}(X)$.

Ας υποθέσουμε ότι η σχέση $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]$ ισχύει για κάποιο $k \geq 1$, και ότι $\mathbb{E}|X|^{k+1} < \infty$. Τότε η απόδειξη του (α) θα είναι πλήρης, αν δείξουμε ότι ισχύει η σχέση $\varphi^{(k+1)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^{k+1}e^{itX}]$. Όμως, αφού $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]$, θα έχουμε

$$\frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} - \mathbb{E}[(iX)^{k+1}e^{itX}] = \mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\right], \tag{8.23}$$

και, λόγω της (8.22),

$$\left|(iX)^k e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\right| = |X|^k \left|\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\right| \leq 2|X|^{k+1},$$

με $\mathbb{E}(2|X|^{k+1}) = 2\mathbb{E}|X|^{k+1} < \infty$. Προφανώς,

$$\lim_{h\to 0}(iX)^k e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} = (iX)^k e^{itX} \lim_{h\to 0}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h} = 0,$$

οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Πρόταση 8.3(iii)), έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left[(iX)^k e^{itX}\frac{e^{ihX} - 1 - ihX}{h}\right] \to \mathbb{E}(0) = 0, \quad \text{καθώς } h \to 0.$$

Παίρνοντας όρια για $h \to 0$ στην (8.23), προκύπτει ότι $\varphi^{(k+1)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^{k+1}e^{itX}]$, και φυσικά, $\varphi^{(k+1)}(0) = i^{k+1}\mathbb{E}(X^{k+1})$. Έτσι, η απόδειξη των (α) και (β) είναι πλήρης.

Όσον αφορά το (γ), από την (8.18) παίρνουμε την ταυτότητα

$$e^{itx} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} x^n = \frac{i^k}{(k-1)!} \int_0^{tx} (tx-y)^{k-1}(e^{iy}-1)dy,$$

και, με την αντικατάσταση $u = y/tx$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα, προκύπτει η σχέση[18]

$$e^{itx} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} x^n = \frac{(itx)^k}{(k-1)!} \int_0^{1} (1-u)^{k-1}(e^{itxu}-1)du.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left|\varphi(t) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)\right| &\le \mathbb{E}\left|e^{itX} - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!} X^n\right| \\ &\le \frac{|it|^k}{(k-1)!} \mathbb{E}\left[|X|^k \int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du\right].\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1| \to 0$, καθώς $t \to 0$, και $(1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1| \le 2(1-u)^{k-1}$, με $\int_0^1 2(1-u)^{k-1}du = 2/k < \infty$. Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (Πρόταση 8.3(iii)),

$$\int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du \to 0, \quad \text{καθώς } t \to 0.$$

Επομένως,

$$|X|^k \int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du \to 0, \quad \text{καθώς } t \to 0,$$

[18] Παρατηρήστε ότι η σχέση που παίρνουμε μετά την αντικατάσταση εξακολουθεί να ισχύει και όταν $tx = 0$, αφού τότε $e^{itxu} = 1$, $(itx)^k = 0$, και παίρνουμε την προφανή ισότητα $0 = 0$.

και
$$|X|^k \int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du \le \frac{2|X|^k}{k},$$
με $\mathbb{E}\left(\frac{2|X|^k}{k}\right) < \infty$, αφού $\mathbb{E}|X|^k < \infty$. Έτσι,
$$\mathbb{E}\left[|X|^k \int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du\right] \to 0, \quad \text{καθώς } t \to 0,$$
και πάλι από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης της Πρότασης 8.3(iii). Τελικά,
$$\frac{\left|\varphi(t) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)\right|}{|t|^k} \le \frac{1}{(k-1)!}\mathbb{E}\left[|X|^k \int_0^1 (1-u)^{k-1}|e^{itXu}-1|du\right],$$
και το άνω φράγμα τείνει στο 0, καθώς $t \to 0$. Συνεπώς,
$$\varphi(t) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n) = o(t^k), \qquad (\text{του } t \to 0)$$
όπως έπρεπε να δειχθεί. $\square$

Τονίζεται ότι η σχέση–αναπαράσταση που δίδεται από το Θεώρημα 8.22(ii), δηλ. η έκφραση
$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n), \tag{8.24}$$
είναι σωστή όταν $\mathbb{E}|X|^k < \infty$ για **κάθε** $k = 1, 2, \ldots$, και ισχύει για εκείνα τα $t \in \mathbb{R}$, για τα οποία $\lim_k \{|t|^k \mathbb{E}|X|^k / k!\} = 0$. Σημειώνεται ότι η (8.24) έχει σημασία ορίου, και συγκεκριμένα, μας διαβεβαιώνει ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπως παραπάνω,

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)=\varphi(t).$$

Ισχύει και ένα είδος αντιστρόφου του Θεωρήματος 8.22, που το αναφέρουμε παρακάτω χωρίς απόδειξη (βλ. Chow and Teicher, 1988, σελ. 278).

Θεώρημα 8.23 Εάν η $\varphi^{(2k)}(0)$ υπάρχει (και είναι πεπερασμένη), τότε $\mathbb{E}(X^{2k})<\infty$. [$k$ κάποιος θετικός ακέραιος.]

Ας σημειωθεί ότι το παραπάνω αποτέλεσμα **μπορεί να μην ισχύει** αν η $\varphi^{(2k+1)}(0)$ υπάρχει (και είναι πεπερασμένη), για κάποιο $k\in\{0,1,\ldots\}$. Για παράδειγμα, είναι δυνατόν η $\varphi'(0)$ να υπάρχει (πεπερασμένη), και όμως (βλ. Άσκηση 8.8), $\mathbb{E}|X|=+\infty$. Μάλιστα, τα αντιπαραδείγματα αυτού του τύπου, καθώς και η διαφορισιμότητα της $\chi.\sigma.$ στο σημείο $t=0$, συνδέονται στενά με την ισχύ του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών (βλ. Σημείωση ;; του Κεφ. ;;).

8.5 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Συνήθων Κατανομών

Μέχρι τώρα δεν δόθηκε κάποιο παράδειγμα συγκεκριμένης $\chi.\sigma.$, διότι στόχος μας ήταν η ανάπτυξη της θεωρίας. Οι συνήθεις κατανομές έχουν $\chi.\sigma.$ φ_X, όπως στον πίνακα:

Κατανομή	Συνάρτηση/πυκνότητα πιθανότητας		Χαρακτ. συνάρτηση
Εκφυλισμένη	$f_X(k) = 1,$	$k \in \{a\}$	$\varphi_X(t) = e^{iat}$
Συμμετρική Bernoulli	$f_X(k) = 1/2,$	$k \in \{-1, 1\}$	$\varphi_X(t) = \cos t$
Διωνυμική	$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$	$k \in \{0, 1, \ldots, n\}$	$\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$ $0 < p < 1$
Αρνητική Διωνυμική (Pascal)	$f_X(k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k,$	$k \in \{0, 1, \ldots\}$	$\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^r$ $0 < p < 1, \quad r > 0$
Poisson	$f_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$	$k \in \{0, 1, \ldots\}$	$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ $\lambda > 0$
Κανονική	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$	$x \in \mathbb{R}$	$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ $\mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$
Συμμετρική Ομοιόμορφη	$f_X(x) = 1/(2a),$	$x \in (-a, a)$	$\varphi_X(t) = \frac{\sin at}{at}$ $a > 0$
Τριγωνική	$f_X(x) = \frac{1}{a}(1 - \frac{\lvert x\rvert}{a}),$	$x \in (-a, a)$	$\varphi_X(t) = \frac{2(1-\cos at)}{a^2 t^2}$ $a > 0$
Γάμμα	$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x},$	$x \in (0, +\infty)$	$\varphi_X(t) = (1 - it/\lambda)^{-a}$ $a > 0, \quad \lambda > 0$
Cauchy	$f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)},$	$x \in \mathbb{R}$	$\varphi_X(t) = e^{-a\lvert t\rvert}$ $a > 0$
Διπλή Εκθετική (Laplace)	$f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\lvert x\rvert},$	$x \in \mathbb{R}$	$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$ $\lambda > 0$

Πίνακας 8.1. Συνήθεις Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις.[19]

[19]Για διακριτές τ.μ. χρησιμοποιούμε, για την συνάρτηση πιθανότητας, τον συνήθη συμβολισμό, $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$, ενώ για τις απόλυτα συνεχείς, η $f_X(x)$ συμβολίζει μία πυκνότητα της τ.μ. X, αναφορικά με το μέτρο Lebesgue, περιορισμένο στα αντίστοιχα διαστήματα του πίνακα.

Ο προσδιορισμός της $\chi.\sigma.$ μίας τ.μ. X, ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των μέσων τιμών $\mathbb{E}(\cos tX)$ και $\mathbb{E}(\sin tX)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως, θα πρέπει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

ή, ισοδύναμα, ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(tx) dF(x) \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) dF(x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τυπικά, η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει θεωρώντας το εκθετικό e^{itx}, και χρησιμοποιώντας το i σαν πραγματική σταθερά. Για παράδειγμα, αν $X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ (τυποποιημένη κανονική, $N(0,1)$), και επειδή για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{a^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2} dx = e^{a^2/2},$$

διότι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right)$ είναι η πυκνότητα της $N(a,1)$, «φανταζόμαστε» ότι ο παραπάνω υπολογισμός θα είναι σωστός και για $a = it$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{(it)^2/2} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Αυτή είναι, πράγματι, η $\chi.\sigma.$ της $N(0,1)$, αλλά η παραπάνω «απόδειξη» δεν είναι σωστή, διότι δεν έχει νόημα η κανονική κατανομή $N(it,1)$, με μέσο $it \notin \mathbb{R}$. Πάντως, με δεδομένη την παραπάνω μορφή της $\chi.\sigma.$ της $X \sim N(0,1)$, μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως την μορφή της $\chi.\sigma.$ της $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, δηλ. της κανονικής με μέσο $\mu \in \mathbb{R}$, διασπορά $\sigma^2 > 0$, και πυκνότητα όπως στον Πίνακα 8.1. Πράγματι, αφού η τ.μ. $Y = \sigma X + \mu$ ακολουθεί, επίσης, κανονική, και συγκεκριμένα, $Y = \sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, θα είναι, λόγω του Θεωρήματος 8.6(i),

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu}\varphi_X(\sigma t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right),$$

όπως στον Πίνακα 8.1.

Ένας σωστός τρόπος υπολογισμού της $\chi.\sigma.$ της τυποποιημένης κανονικής (και πολλών άλλων $\sigma.\kappa.$) δίνεται από το Θεώρημα 8.22(ii), επειδή

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \text{ περιττός}, \\ 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1), & \text{αν } k \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_k \frac{|t|^{2k}\mathbb{E}|X|^{2k}}{(2k)!} = \lim_k \frac{|t|^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} = \lim_k \frac{(t^2/2)^k}{k!} = 0.$$

Επίσης, με απευθείας υπολογισμό προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}|X|^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}2^k k!, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

οπότε, για τυχόν $t \in \mathbb{R}$ και $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{|t|^{2k+1}\mathbb{E}|X|^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}|t|\frac{t^{2k}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}|t|\frac{t^{2k}}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|t|\frac{(t^2/2)^k}{k!} \to 0, \quad \text{καθώς } k \to \infty. \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $|t|^k \mathbb{E}|X|^k/k! \to 0$ καθώς $k \to \infty$, και, από το Θεώρημα 8.22(ii), έπεται ότι

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2/2)^n}{n!} = \exp(-t^2/2).$$

Η αλήθεια είναι ότι η $\chi.\sigma.$ είναι ένα «εργαλείο», του οποίου μόνο τις ιδιότητες θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα. Συγκεκριμένα, στο Κεφ. ;;, βασικά θα χρειαστούμε το Θεώρημα Αντιστροφής (Μονοσήμαντο), το Θεώρημα Συνεχείας, και το Θεώρημα 8.22(i)(γ). Επομένως, όσον αφορά στην θεωρία, δεν ενδιαφέρουν άμεσα οι υπολογισμοί συγκεκριμένων $\chi.\sigma.$, εκτός της κανονικής.

Ασκήσεις Κεφ. 8:

8.1. Έστω φ, φ_1 και φ_2 οι $\chi.\sigma.$ των $\sigma.\kappa.$ F, F_1 και F_2. Αποδείξτε ότι

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \ \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R} \iff F = F_1 * F_2.$$

8.2. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}|X| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos tX)}{t^2} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \mathcal{R}(\varphi(t))}{t^2} dt,$$

όπου $\mathcal{R}(u + iv) = u$ το πραγματικό μέρος (real part) της μιγαδικής συνάρτησης $u + iv$. [Οι παραπάνω ισότητες ισχύουν και όταν $\mathbb{E}|X| = +\infty$.]

8.3. **(Τύπος Αντιστροφής των χαρακτηριστικών συναρτήσεων για συνεχείς πυκνότητες)** Αν η φ_X είναι ολοκληρώσιμη (δηλ. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(t)|dt < \infty$), τότε η X είναι απόλυτα συνεχής, και μάλιστα, έχει **συνεχή πυκνότητα**

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

[Φυσικά, αυτή είναι και η μόνη συνεχής πυκνότητα της X.]

Το αντίστροφο **δεν ισχύει**, δηλ. υπάρχει συνεχής πυκνότητα f_X (ως προς το μέτρο Lebesgue), για την οποία, η αντίστοιχη $\chi.\sigma.$ $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. [**Υπόδειξη:** Billingsley, (1986), Άσκηση 26.3(b), σελ. 363.]

8.4. Αν η φ είναι $\chi.\sigma.$ τότε και οι $\overline{\varphi}$, $\mathcal{R}(\varphi)$ είναι $\chi.\sigma.$ κάποιων τ.μ. Ποιων; Είναι και η $|\varphi|^2$ $\chi.\sigma.$;

8.5. Η $\chi.\sigma.$ φ_X της τ.μ. X είναι πραγματική αν και μόνο αν η X είναι συμμετρική γύρω από το 0 (δηλ. οι X και $-X$ έχουν την ίδια $\sigma.\kappa.$, $X \stackrel{\mathbf{d}}{=} -X$).

8.6. Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $(-1, 1)$, δείξτε ότι η $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ έχει πυκνότητα

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos tx \, dt, \quad n \geq 2.$$

8.7. **(Θεώρημα Bochner ή αναπαράσταση Bochner–Herglotz)** Έστω $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Τότε η φ είναι χ.σ. κάποιας τ.μ. αν και μόνο αν ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες:

(i) Η φ είναι συνεχής.

(ii) $\varphi(0) = 1$.

(iii) Η φ είναι **θετικά ορισμένη**, δηλ. για οποιουσδήποτε πραγματικούς $t_1, \ldots, t_n$, και μιγαδικούς $z_1, \ldots, z_n$ (και οποιοδήποτε n), ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z_i \varphi(t_i - t_j) \overline{z}_j \geq 0.$$

[**Υπόδειξη:** Το ευθύ είναι απλό. Για το αντίστροφο βλ. Chung, (1974), Theorem 6.5.2, σελ. 179–181.]

8.8. Η συνάρτηση $\varphi_X(t) = A \sum_{k=2}^{\infty} (\cos kt)/(k^2 \log k)$, όπου $A^{-1} = \sum_{k=2}^{\infty} 1/(k^2 \log k)$, είναι χ.σ. κάποιας τ.μ. X, η $\varphi'_X(0)$ υπάρχει (πεπερασμένη), και όμως, $\mathbb{E}|X| = +\infty$ (πρβλ. Θεώρημα 8.23).

[**Υπόδειξη:** Θεωρήστε την διακριτή τ.μ. X, με συνάρτηση πιθανότητας

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{A}{2n^2 \log |n|}, \quad n = \pm 2, \pm 3, \ldots \ .$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ., επίσης, Chow and Teicher, (1988), Άσκηση 8.4.4, σελ. 289, ή Chung, (1974), Άσκηση

6.4.13, σελ. 174.]

8.9. **(κριτήριο Pólya)** Αν η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ είναι συνεχής, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(-t) = \varphi(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (άρτια), και η $\varphi(t)$ είναι κυρτή (και άρα, φθίνουσα) για $t \in [0, +\infty)$, τότε είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιας τυχαίας μεταβλητής. [**Υπόδειξη:** Billingsley, (1986), Άσκηση 26.3(c), σελ. 363.]

8.10. Για κάθε $T > 0$ (πεπερασμένο αλλά οσοδήποτε μεγάλο), υπάρχουν τ.μ. X και Y που **δεν είναι ισόνομες** (δηλ., δεν ισχύει $X \stackrel{\mathbf{d}}{=} Y$), και όμως, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ για κάθε $t \in [-T, T]$. [**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Pólya, Άσκηση 8.9.]

8.11. Αν οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες τ.μ. και $X_1 + X_3 \stackrel{\mathbf{d}}{=} X_2 + X_3$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $X_1 \stackrel{\mathbf{d}}{=} X_2$; [**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το κριτήριο Pólya, Άσκηση 8.9.]