

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2021-2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΘΕΜΕΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Το «ΑΡΙΣΤΑ» αντιστοιχεί σε 30 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1. (i) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2.$$

(Υπόδειξη: Για το επαγωγικό βήμα χρησιμοποιείτε τη σχέση $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha_k}{\alpha_{n+1}} \geq 2$) **(Μονάδες 5)**

(ii) Αν n, k μη αρνητικοί ακέραιοι, δείξτε ότι

$$\sum_{r=0}^n \binom{k+r}{r} = \binom{k+n+1}{k+1}.$$

(Υπόδειξη: Επαγωγή ως προς n . Για το επαγωγικό βήμα χρησιμοποιείτε την τριγωνική σχέση του Pascal.) **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 2. (i) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $15 - 8i$. **(Μονάδες 5)**

(ii) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| < 1$ και $|z_2| < 1$, δείξτε ότι

$$|z_1 - z_2| < |1 - \bar{z}_1 z_2|.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3. Αν n θετικός ακέραιος, δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $(i + z)^{2n} + (i - z)^{2n} = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$z = -\tan \frac{(2k+1)\pi}{4n},$$

όπου $k = 0, 1, \dots, 2n-1$.

(Μονάδες 10)