

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2021-2022**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΘΕΜΕΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**  
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 17-01-2022**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 1 ΩΡΑ και 30 ΛΕΠΤΑ**

**Το «ΑΡΙΣΤΑ» αντιστοιχεί σε 30 μονάδες.**

**ΘΕΜΑ 1. (i)** Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  πραγματικοί αριθμοί με

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \text{ και } \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n,$$

δείξτε ότι

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \leq n \cdot (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n).$$

**(Μονάδες 5)**

**(ii)** Αν  $n$  θετικός ακέραιος, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

**(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 2. (i)** Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού  $3 - 4i$ .

**(Μονάδες 5)**

**(ii)** Αν  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  και  $\lambda$  θετικός πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (1 + \lambda)|z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2.$$

**(Μονάδες 5)**

**ΘΕΜΑ 3.** Αν  $n$  θετικός ακέραιος, δείξτε ότι οι ρίζες της εξισώσεως  $(1 + z)^{2n} + (1 - z)^{2n} = 0$  δίνονται από τον τύπο

$$z = i \tan \frac{(2k+1)\pi}{4n},$$

όπου  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ .

**(Μονάδες 10)**

**Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστών τσέπης και σημειώσεων.**